



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #21

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

11/11/2025

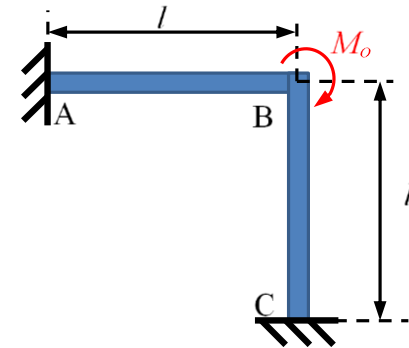


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício:

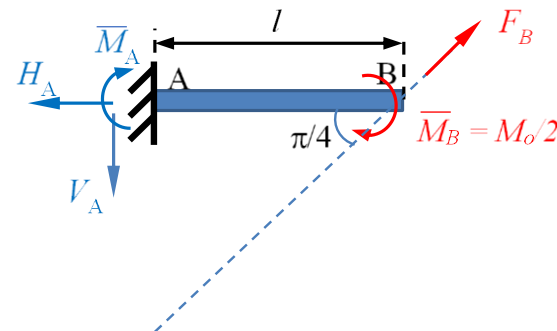
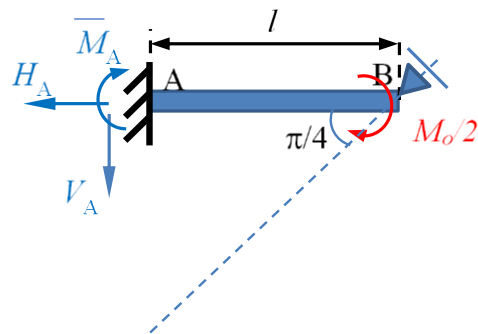
A estrutura ABC indicada na figura é formada pelas barras AB e BC, de mesmo comprimento (l) e mesma rigidez flexional (EI), engastada nas seções A e C e rigidamente ligadas em B. Sobre a seção B é aplicado um binário de intensidade M_o no sentido indicado. Pedem-se:

- o DCL final da estrutura com as indicações corretas dos valores e dos sentidos das reações de apoio em A e em C;
- a rotação em B.



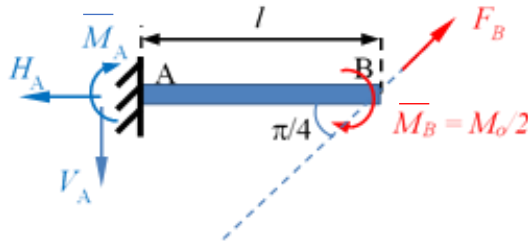
- Considerando 1/2 estrutura:

DCL





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



- Equilíbrio:

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} F_B - H_A = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} F_B - V_A = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} F_B l - \bar{M}_B - \bar{M}_A = 0$$

- Vamos adotar F_B como incógnita hiperestática

- Pelo Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial F_B} = 0 \Rightarrow \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F_B} dx = 0$$

$$M(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B x - \bar{M}_B$$

$$\frac{\partial M}{\partial F_B} = \frac{\sqrt{2}}{2} x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_B x - \bar{M}_B \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x \right) dx = 0$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{M_0}{l}$$

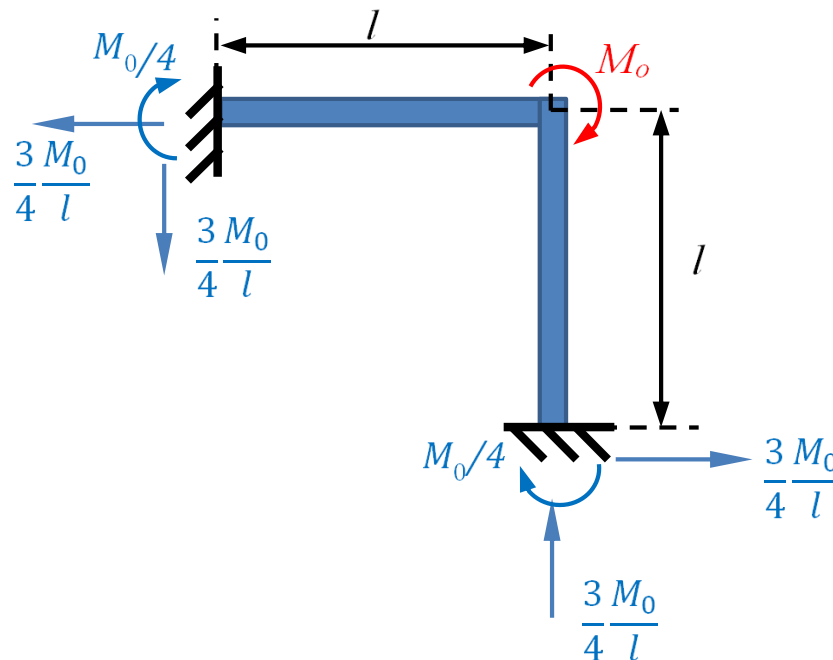


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- As outras reações são obtidas a partir das equações de equilíbrio:

$$H_A = \frac{3 M_0}{4 l} \quad V_A = \frac{3 M_0}{4 l} \quad \bar{M}_A = \frac{M_0}{4}$$

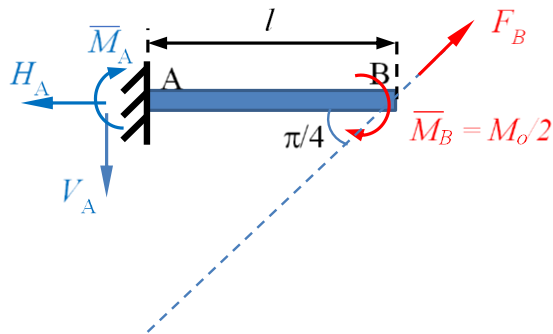
- Como a estrutura é simétrica e o carregamento é antissimétrico, as reações vinculares devem ser antissimétricas:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Para calcular a rotação em B usamos o Teorema de Crotti-Engesser:



$$\theta_B = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}_B} \right)_{\bar{M}_B = \frac{M_0}{2}} = \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial \bar{M}_B} \right)_{\bar{M}_B = \frac{M_0}{2}} dx$$

$$M(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B x - \bar{M}_B$$

$$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}_B} = -1$$

$$\Rightarrow \theta_B = \frac{M_0 l}{2EI} - \frac{\sqrt{2} F_B l^2}{4 EI}$$

$$\Rightarrow \theta_B = \frac{1}{8} \frac{M_0 l}{EI}$$

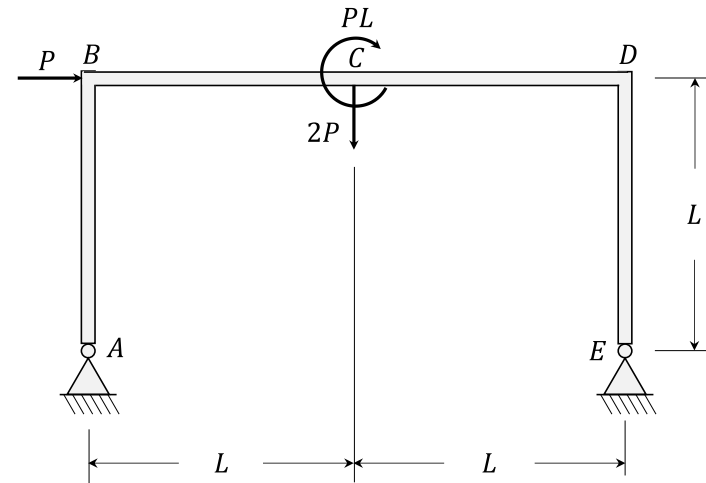


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo

O pórtico da figura é formado por barras prismáticas de mesma rigidez flexional EI . Desprezando as energias complementares devidas às forças normais e às forças cortantes, determine:

- a) o deslocamento vertical da seção C ;*
- b) a rotação da seção C .*



Solução:

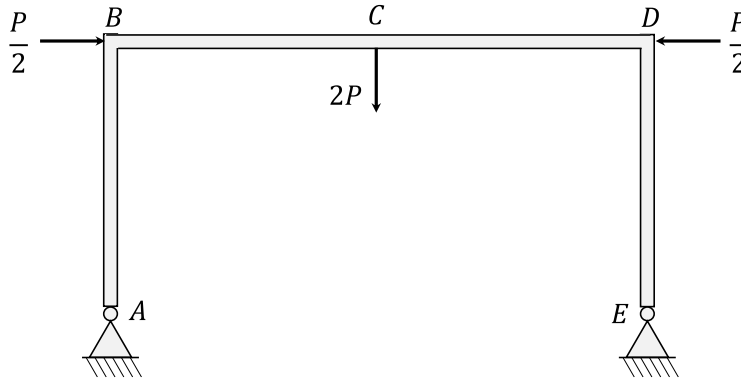
Como a estrutura é simétrica:

- O deslocamento vertical em C é causado apenas pela parte simétrica do carregamento
- A rotação em C é causado apenas pela parte antissimétrica do carregamento

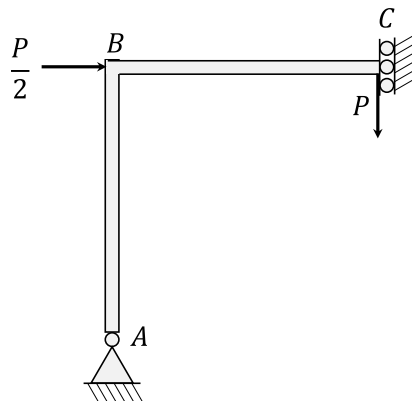


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

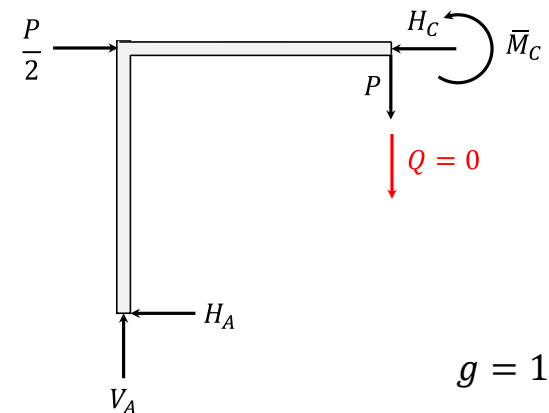
a) Cálculo do deslocamento vertical em C :



posso considerar apenas metade da estrutura colocando os vínculos adequados para representar o efeito da simetria do carregamento:



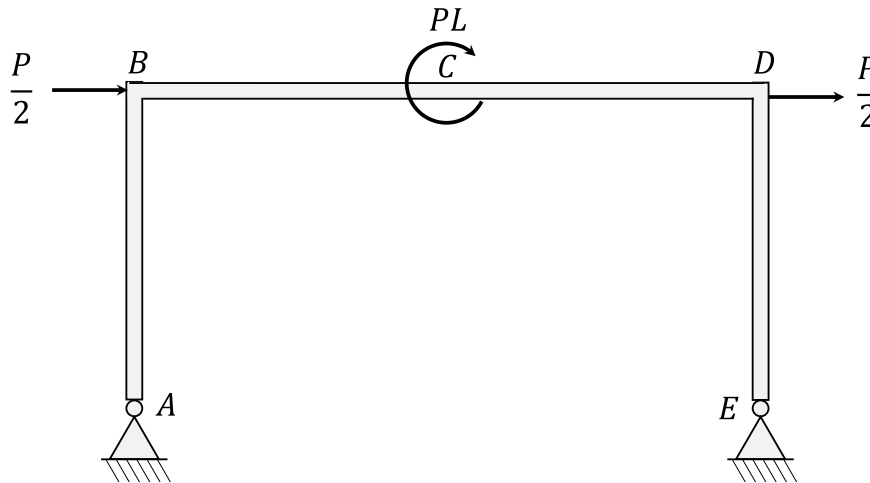
DCL



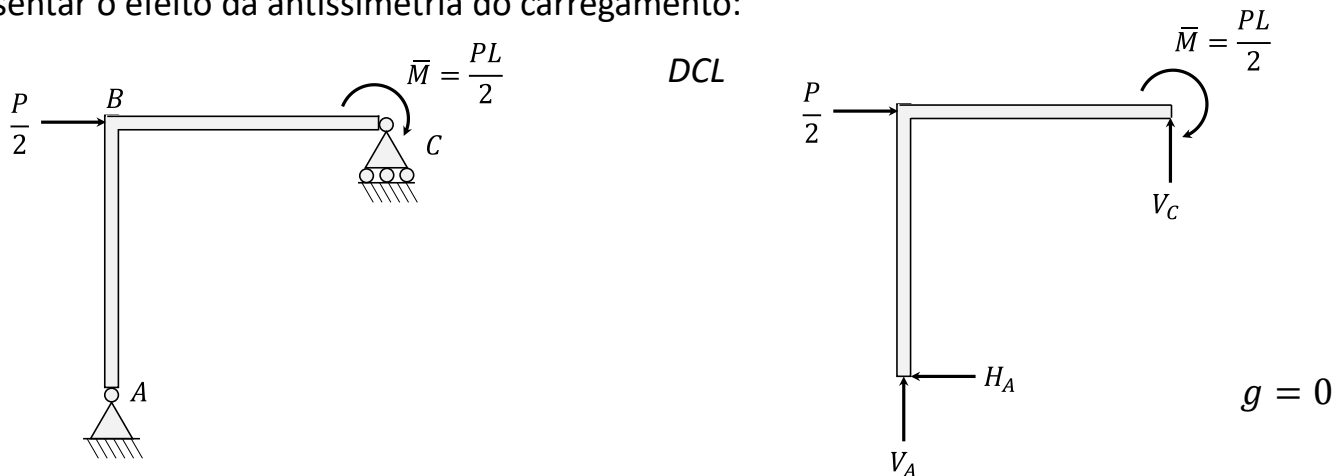


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

b) Cálculo da rotação em C :



posso considerar apenas metade da estrutura colocando os vínculos adequados para representar o efeito da antissimetria do carregamento:

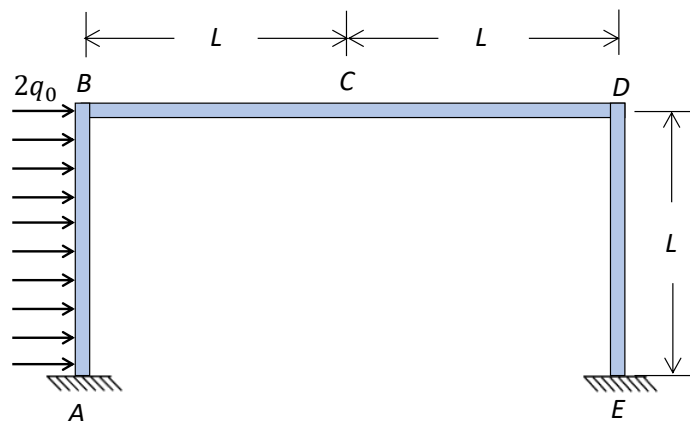




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

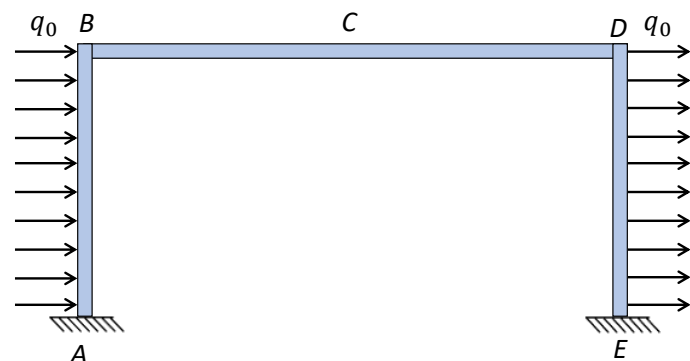
Exemplo

O pórtico plano $ABCDE$ da figura está engastado em A e em E . Ele é formado por barras retas, de mesma rigidez flexional EI dada, soldadas em ângulos de 90° . Sobre a lateral AB está aplicada uma força distribuída uniforme, de magnitude $2q_0$. Desprezando os efeitos devidos à força normal e à força cortante, pede-se determinar a rotação no ponto C .



Solução:

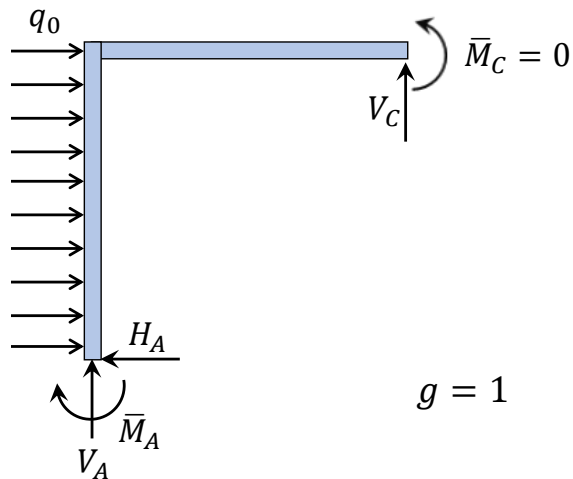
Como a estrutura é simétrica, apenas a parte antissimétrica do carregamento produz rotação em C !





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

posso considerar apenas metade da estrutura colocando os vínculos adequados para representar o efeito da antissimetria do carregamento:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar*. Disponível no Moodle