



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #21

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

05/11/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Propriedades das estruturas simétricas

Propriedade 1:

Um carregamento simétrico produz sobre uma estrutura simétrica um efeito simétrico.

Efeito:

deslocamentos e reações vinculares

Consequência:

Para um ponto que pertence ao plano de simetria:

- os deslocamentos perpendiculares ao plano de simetria são nulos
- as rotações paralelas ao plano de simetria são nulas



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Propriedades das estruturas simétricas

Propriedade 2:

Um carregamento antissimétrico produz sobre uma estrutura simétrica um efeito antissimétrico.

Efeito:

deslocamentos e reações vinculares

Consequência:

Para um ponto que pertence ao plano de simetria:

- os deslocamentos paralelos ao plano de simetria são nulos
- as rotações perpendiculares ao plano de simetria são nulas



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Propriedades das estruturas simétricas

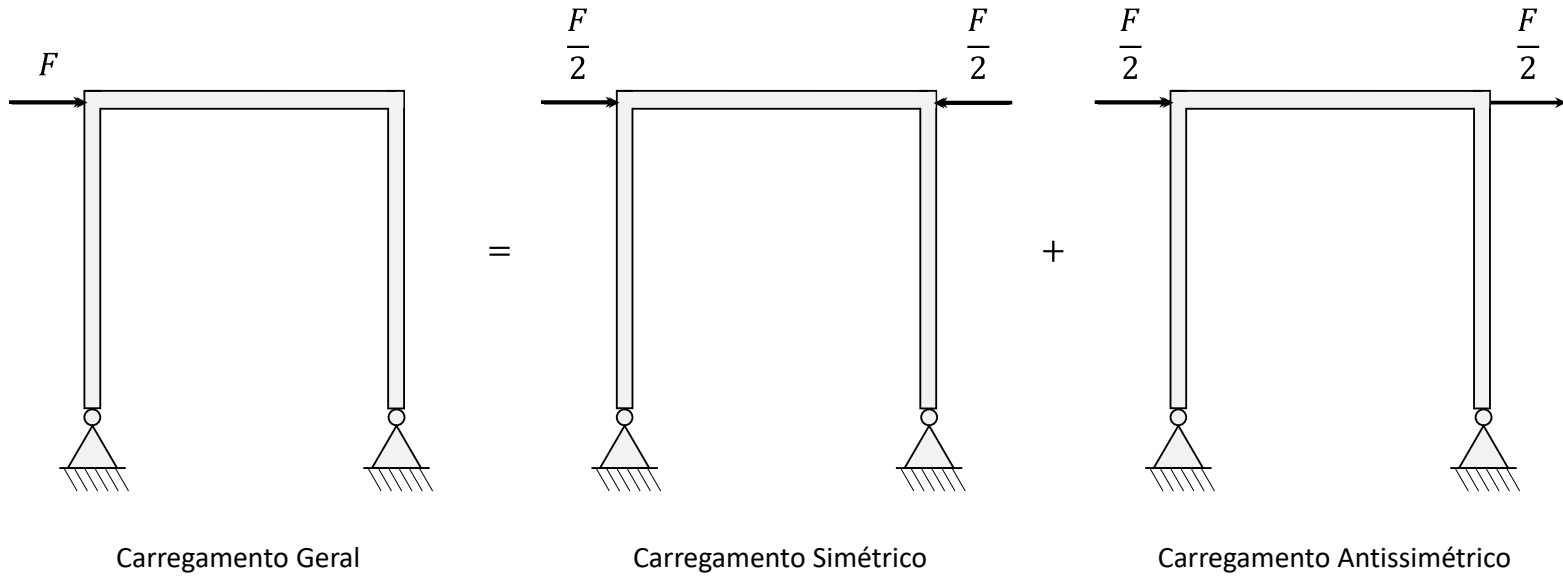
Propriedade 3:

Todo carregamento pode ser decomposto na soma de um carregamento simétrico com um antissimétrico.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

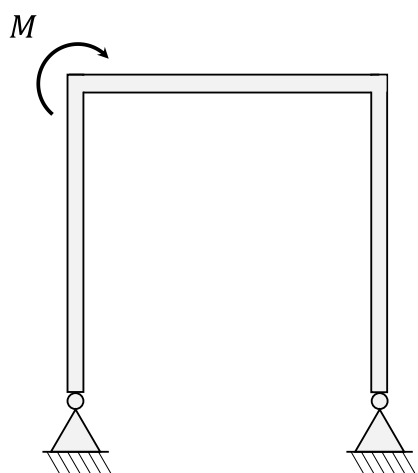
Exemplos



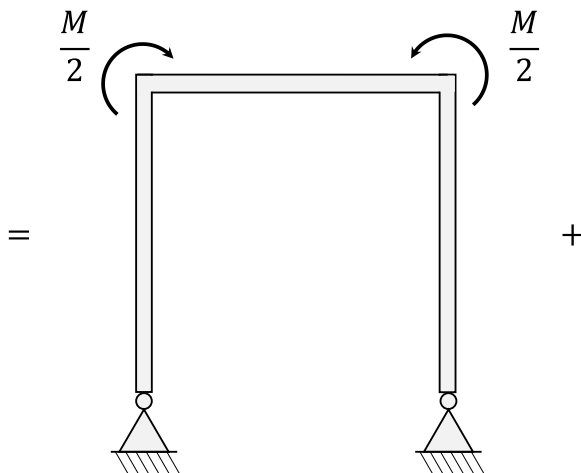


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

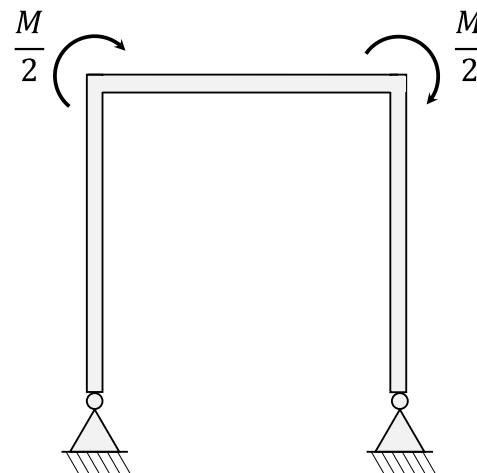
Exemplos



Carregamento Geral



Carregamento Simétrico

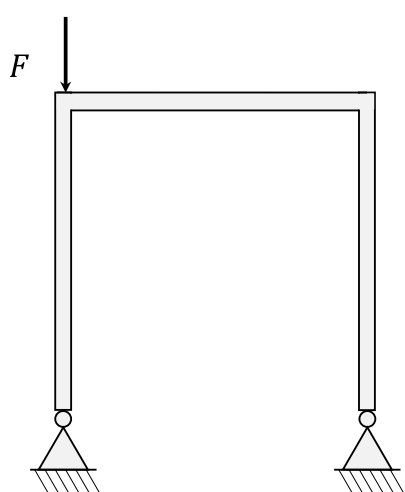


Carregamento Antissimétrico



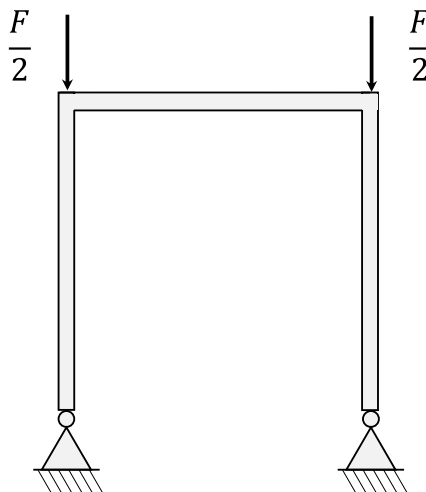
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplos



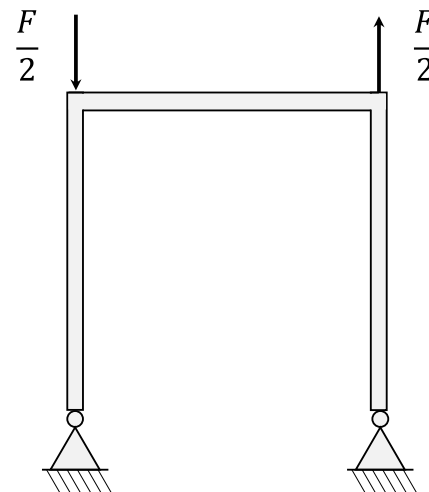
Carregamento Geral

=



Carregamento Simétrico

+

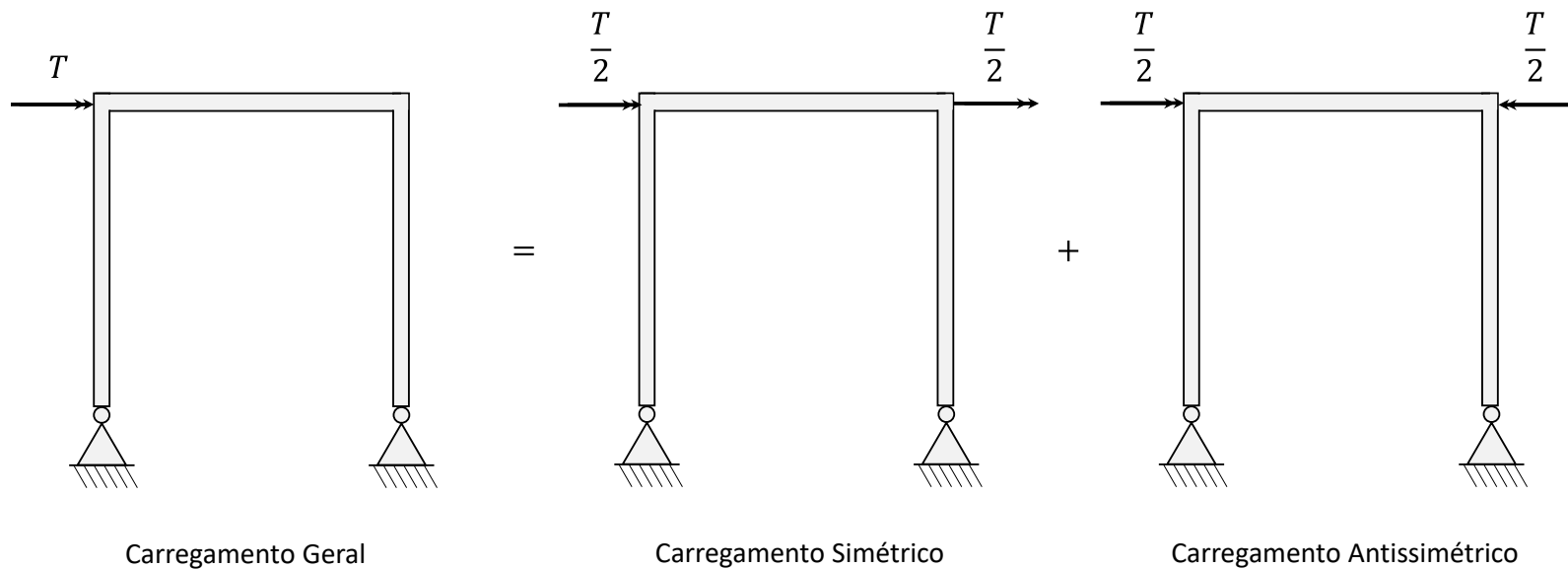


Carregamento Antissimétrico



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

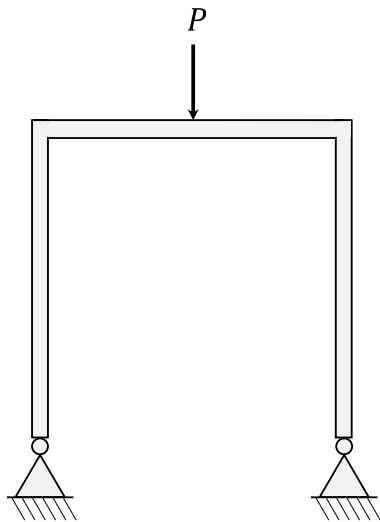
Exemplos





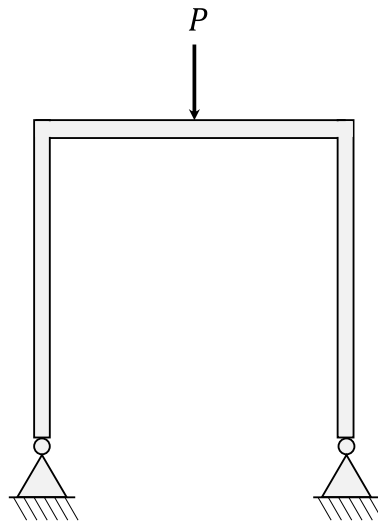
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplos



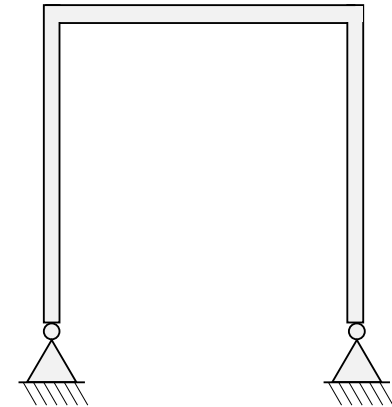
Carregamento Geral

=



Carregamento Simétrico

+

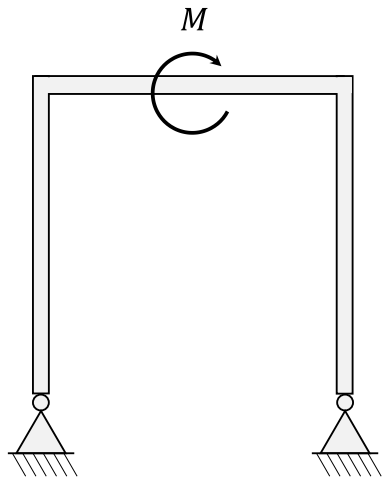


Carregamento Antissimétrico



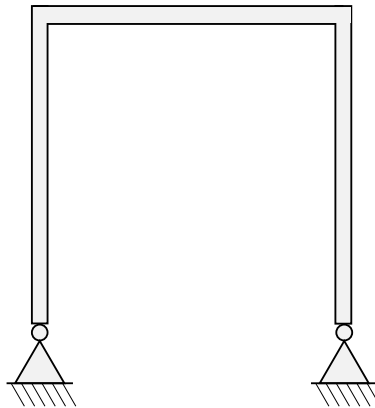
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplos



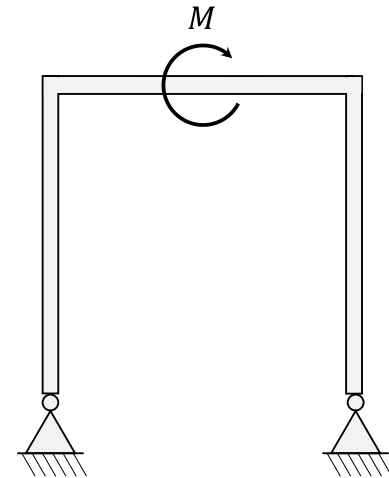
Carregamento Geral

=



Carregamento Simétrico

+

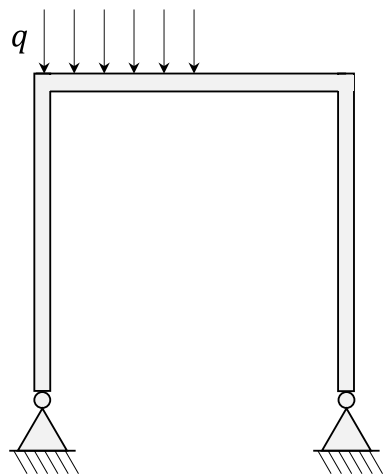


Carregamento Antissimétrico



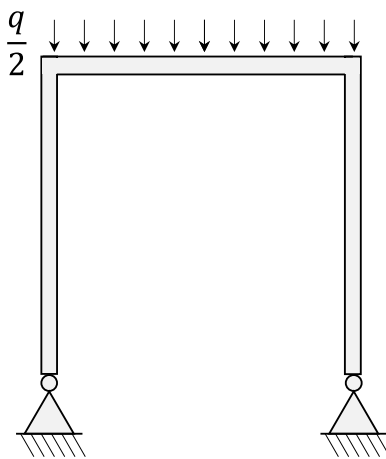
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplos



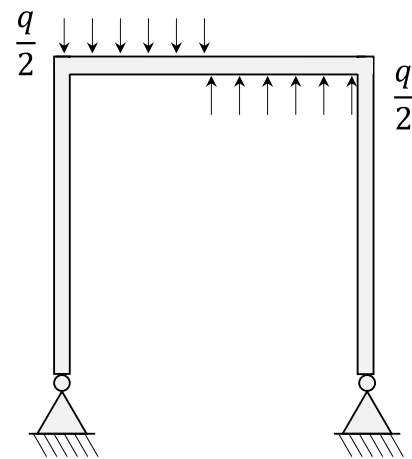
Carregamento Geral

=



Carregamento Simétrico

+



Carregamento Antissimétrico

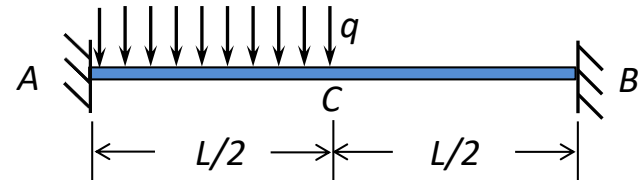


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

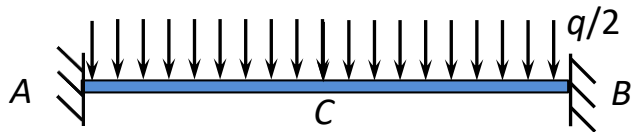
Exercício

A barra AB está engastada em suas duas extremidades e está submetida à carga distribuída q , conforme a figura. Considerando apenas o efeito da flexão e usando as propriedades de simetria da estrutura, calcule:

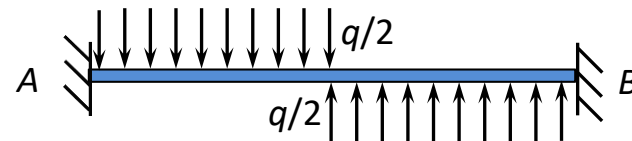
- a) a rotação em C ;
- b) o deslocamento vertical em C .



A carga distribuída pode ser dividida na soma de uma parcela simétrica com uma parcela antissimétrica:



(parcela simétrica)



(parcela antissimétrica)

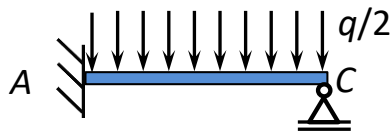
- Apenas a parcela simétrica contribui para o deslocamento vertical em C
- Apenas a parcela antissimétrica contribui para a rotação em C



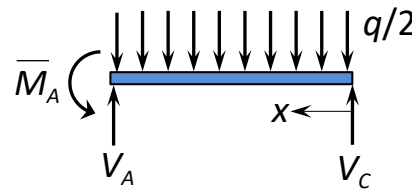
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

a) Cálculo da rotação em C: (apenas a parte antissimétrica do carregamento)

Considerando-se apenas a metade esquerda da estrutura:



DCL



• Equilíbrio:

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_C = \frac{qL}{2}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A + V_C \frac{L}{2} - \frac{qL^2}{8} = 0$$

• Grau de hiperestaticidade

$$g = 1$$

• Incógnita hiperestática:

Escolho V_C

• Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_C} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} M(x) \frac{\partial M}{\partial V_C} dx = 0$$

$$M(x) = V_C x - \frac{qx^2}{2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial V_C} = x$$

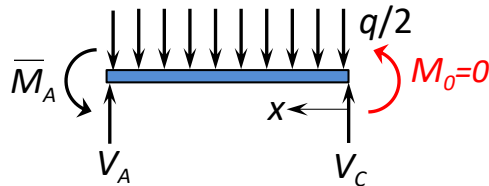
$$\Rightarrow \int_0^{L/2} \left(V_C x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx = 0 \Rightarrow \left(\frac{V_C x^3}{3} - \frac{qx^4}{8} \right) \Big|_0^{L/2} = 0$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{3qL}{32}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Para calcular a rotação em C podemos aplicar um momento fictício nesse ponto:



- Pelo Teorema de Crotti-Engesser:

$$\theta_C = \left(\frac{\partial U^*}{\partial M_0} \right)_{M_0=0} = \frac{1}{EI} \left(\int_0^{\frac{L}{2}} M(x) \frac{\partial M}{\partial M_0} dx \right)_{M_0=0}$$

$$M(x) = V_C x - \frac{qx^2}{4} + M_0 = \frac{3qL}{32} x - \frac{qx^2}{4} + M_0$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$$

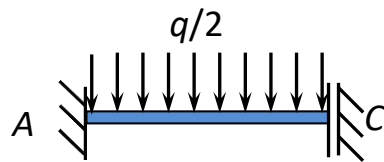
$$\Rightarrow \theta_C = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{3qL}{32} x - \frac{qx^2}{4} \right) dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{3qLx^2}{64} - \frac{qx^3}{12} \right)_0^{\frac{L}{2}} \Rightarrow \theta_C = \frac{qL^3}{768EI}$$



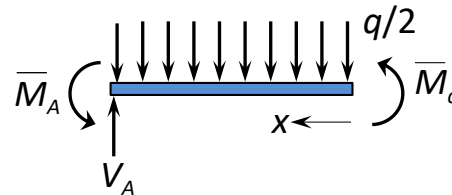
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

b) Cálculo do deslocamento vertical em C: (apenas a parte simétrica do carregamento)

Considerando-se apenas a metade esquerda da estrutura:



DCL



• Equilíbrio:

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_A = \frac{qL}{4}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A + \bar{M}_C - \frac{qL^2}{16} = 0$$

• Grau de hiperestaticidade

$$g = 1$$

• Incógnita hiperestática:

Escolho $\bar{M}_C$

• Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}_C} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} M(x) \frac{\partial M}{\partial \bar{M}_C} dx = 0$$

$$M(x) = \bar{M}_C - \frac{qx^2}{4}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}_C} = 1$$

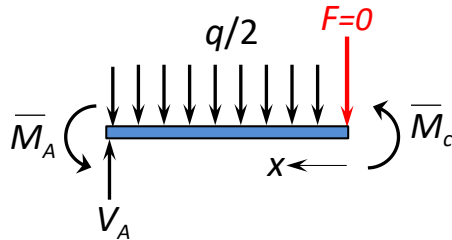
$$\Rightarrow \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\bar{M}_C - \frac{qx^2}{4} \right) dx = 0 \Rightarrow \left(\bar{M}_C x - \frac{qx^3}{12} \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{M}_C = \frac{qL^2}{48}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Para calcular o deslocamento vertical em C podemos aplicar uma força fictícia nesse ponto:



- Pelo Teorema de Crotti-Engesser:

$$\delta_C = \left(\frac{\partial U^*}{\partial F} \right)_{F=0} = \frac{1}{EI} \left(\int_0^{\frac{L}{2}} M(x) \frac{\partial M}{\partial F} dx \right)_{F=0}$$

$$M(x) = \bar{M}_C - Fx - \frac{qx^2}{4} = \frac{qL^2}{48} - Fx - \frac{qx^2}{4}$$

$$\frac{\partial M}{\partial F} = x$$

$$\Rightarrow \delta_C = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(-\frac{qL^2}{48} + \frac{qx^2}{4} \right) x dx = \frac{1}{EI} \left(-\frac{qL^2 x^2}{96} + \frac{qx^4}{16} \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}}$$

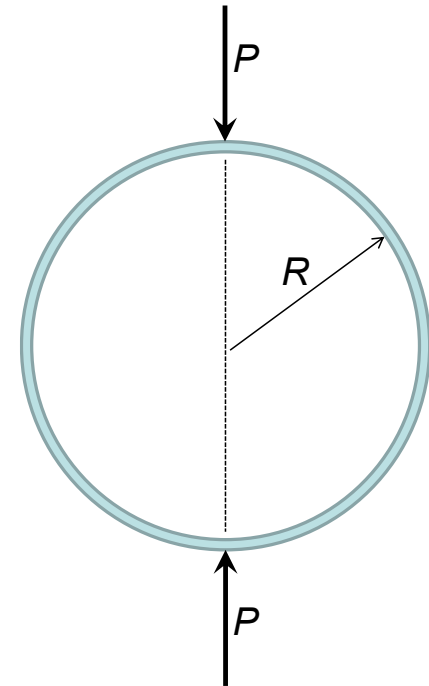
$$\Rightarrow \delta_C = \frac{qL^4}{768EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício:

O anel da figura tem raio R e rigidez à flexão EI constante. A ele são aplicadas forças P diametralmente opostas, conforme esquematizado. Pede-se determinar a variação de diâmetro sofrida pelo anel com a aplicação das forças P . Usar a simetria do problema.

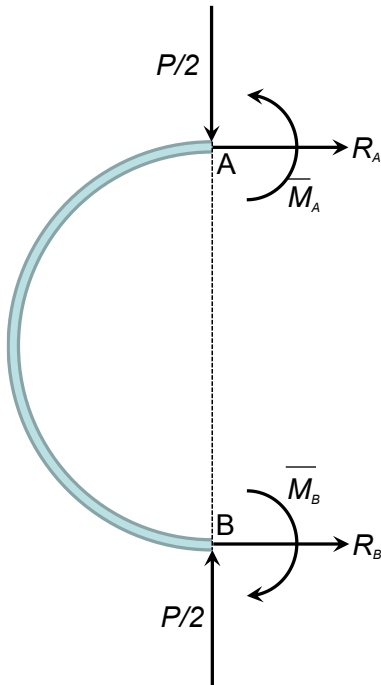




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

- O anel é simétrico em relação ao seu diâmetro vertical e está submetido a esforços simétricos. Assim, podemos cortá-lo ao meio, colocando os esforços vinculares adequados:



- O anel também tem uma simetria em relação ao seu diâmetro horizontal:

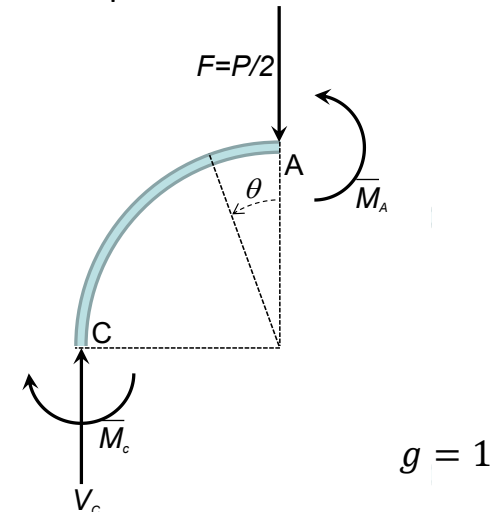
$$\bar{M}_A = \bar{M}_B$$

$$R_A = R_B$$

- Equilíbrio:

$$R_A + R_B = 0 \Rightarrow R_A = R_B = 0$$

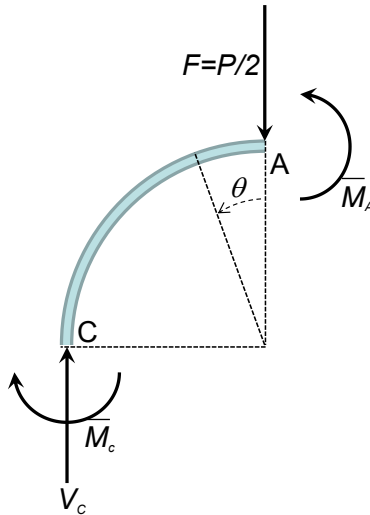
- Considerando a simetria horizontal, podemos dividir o anel mais uma vez, considerando os esforços vinculares adequados:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica



- Vamos adotar $\bar{M}_A$ como incógnita hiperestática
- Pelo Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}_A} = 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi R}{2}} \frac{M(s)}{EI} \frac{\partial M}{\partial \bar{M}_A} ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M(\theta)}{EI} \frac{\partial M}{\partial \bar{M}_A} R d\theta = 0$$

$$M(\theta) = \bar{M}_A - FR \sin \theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}_A} = 1$$

$$\Rightarrow \bar{M}_A = \frac{PR}{\pi}$$

- A variação do diâmetro pode ser calculada pelo Teorema de Croti-Engesser:

$$\delta = 2 \left(\frac{\partial U^*}{\partial F} \right)_{F=\frac{P}{2}} = 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M(\theta)}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} R d\theta \right)_{F=\frac{P}{2}}$$

$$M(\theta) = \frac{PR}{\pi} - FR \sin \theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial F} = -R \sin \theta$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2PR^3}{EI} \left[-\frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{8} \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar*. Disponível no Moodle