



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #20

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

04/11/2025



Princípio da Energia Complementar Mínima

- Para resolução de estruturas hiperestáticas

- Graus de hiperestaticidade:

$$g = m - n$$

$m \rightarrow$ número de reações vinculares

$n \rightarrow$ número de equações de equilíbrio

- Energia complementar como função de g incógnitas vinculares *independentes* (*incógnitas hiperestáticas*):

$$U^* = U^*(R_1, R_2, \dots, R_g)$$

- Pelo teorema de *Crotti-Engesser*:

$$\frac{\partial U^*}{\partial R_i} = 0$$



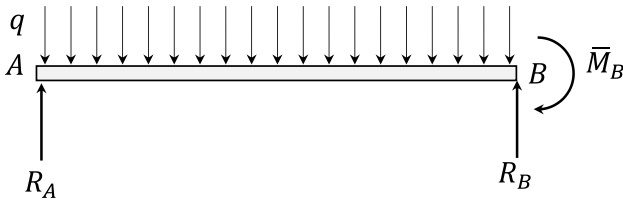
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo

A barra prismática da figura está apoiada em A e engastada em B. Ela tem rigidez flexional EI , comprimento L e está submetida a uma força uniformemente distribuída de magnitude q . Pede-se:

- a) Calcular as reações vinculares;**
- b) Calcular a rotação no ponto A.**

a) ■ DCL:

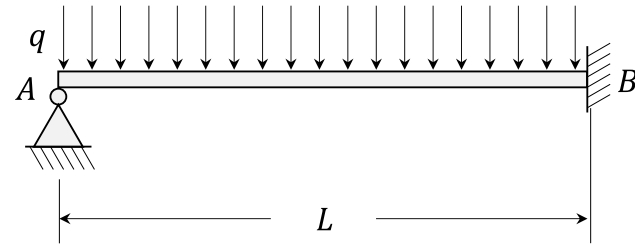


■ Equilíbrio:

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow R_A + R_B = qL$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow R_A L + \bar{M}_B = \frac{qL^2}{2}$$

$$m = 3 \quad n = 2 \quad \Rightarrow g = 1$$



■ Incógnita hiperestática:

vou escolher R_A

■ Energia complementar:

$$U^* = U^*(R_A)$$

■ Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial R_A} = 0$$

■ Na forma modificada:

$$\int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial R_A} dx = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

- *Momento fletor apenas em função da incógnita hiperestática R_A*

$$M(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2}$$

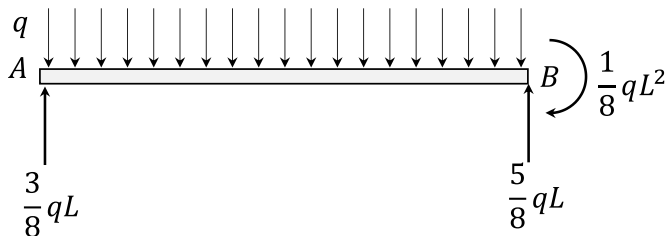
$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

$$\int_0^L \left(R_A x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3}{8} qL$$

- *Das equações de equilíbrio:*

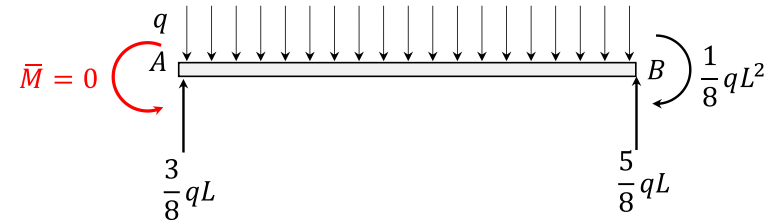
$$R_B = \frac{5}{8} qL \quad \bar{M}_B = \frac{1}{8} qL^2$$

- *DCL após o cálculo das reações:*



- b) *Cálculo da rotação*

- *Colocando um momento fictício:*



- *Pelo Teorema de Crotti-Engesser:*

$$\theta = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0} \quad \theta = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M(x) \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0} dx$$

$$M(x) = -\bar{M} + \frac{3ql}{8} x - \frac{qx^2}{2} \quad \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = -1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\bar{M} - \frac{3ql}{8} x + \frac{qx^2}{2} \right)_{\bar{M}=0} dx$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{qL^3}{48EI}$$

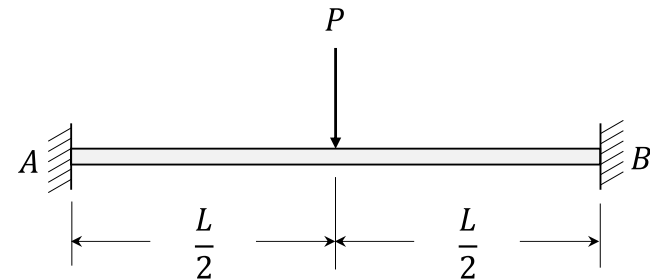


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

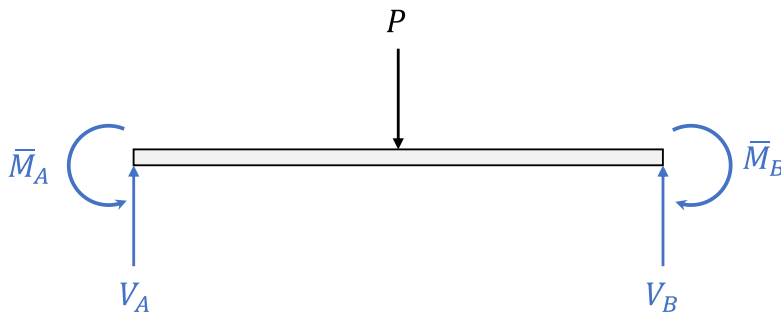
A barra prismática da figura está engastada em A e em B. Ela tem rigidez flexional EI , comprimento L e está submetida a uma força concentrada P aplicada ao seu ponto médio. Pedem-se, para o ponto médio da barra:

- a) o deslocamento vertical;**
- b) a rotação.**

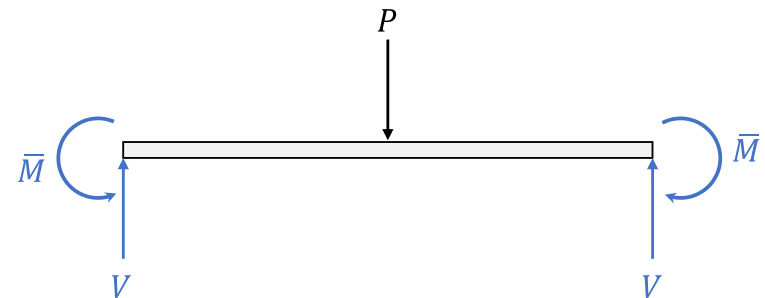


a)

- DCL



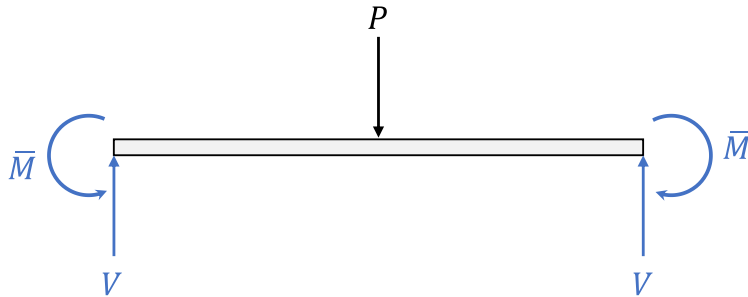
- Simetria





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

▪ *Equilíbrio:*



$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V + V - P = 0 \Rightarrow V = \frac{P}{2}$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$\bar{M} = ?$$

▪ *Grau de hiperestaticidade:*

$$g = 1$$

▪ *Incógnita hiperestática:*

$$\bar{M}$$

▪ Teorema da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} = 0 = \frac{2}{EI} \int_0^{L/2} M(x) \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} dx$$

$$M(x) = \frac{P}{2}x - \bar{M}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{EI} \int_0^{L/2} \left(\bar{M} - \frac{P}{2}x \right) dx = 0$$

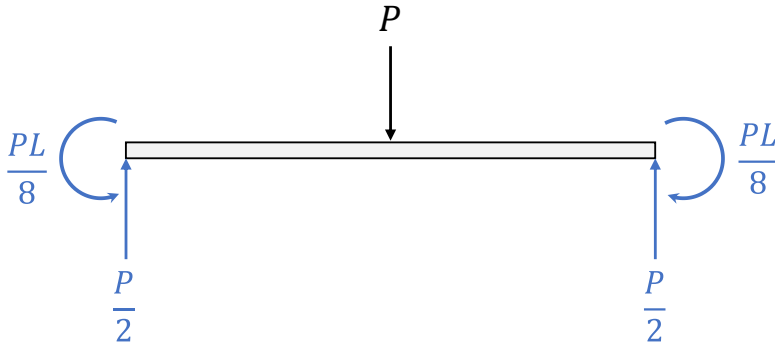
$$\Rightarrow \bar{M} = \frac{PL}{8}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Deslocamento vertical do ponto médio:

- b) Pela simetria, a rotação do ponto médio será nula!



$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{2}{EI} \int_0^{L/2} M(x) \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$M(x) = \frac{P}{2}x - \frac{PL}{8} = \frac{P}{8}(4x - L)$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{1}{8}(4x - L)$$

$$\delta = \frac{PL^3}{192EI}$$

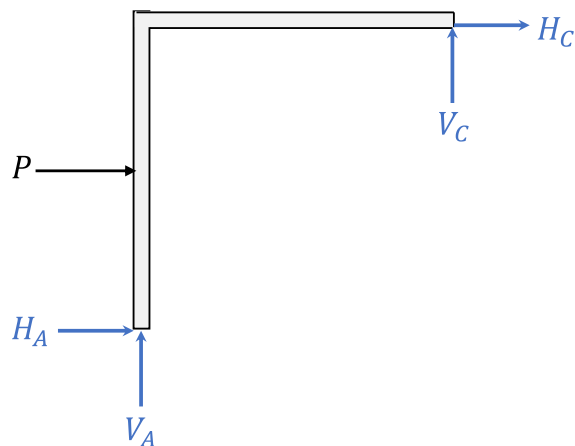


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício:

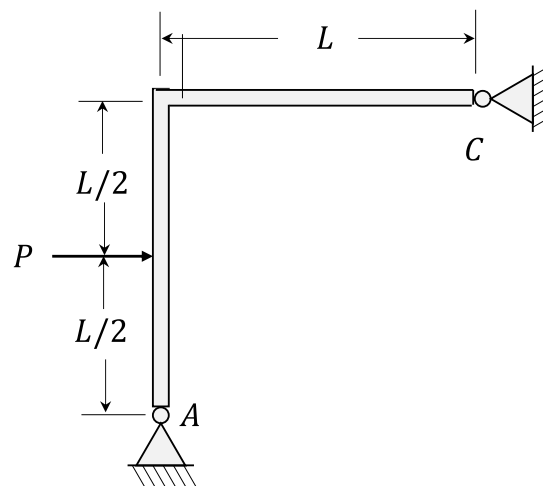
O pórtico da figura é formado por barras prismáticas com rigidez flexional EI . Calcular as reações, desprezando o efeito da força normal.

▪ DCL



▪ Grau de hiperestaticidade:

$$g = 1$$



▪ Equilíbrio:

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_A + H_C + P = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_C = 0$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow H_A L - V_A L + P \frac{L}{2} = 0$$

▪ Incógnitas hiperestáticas independentes:

Vou escolher H_A

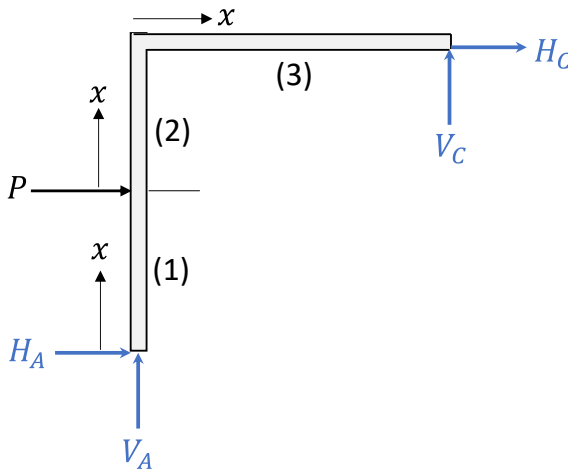


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

▪ *Princípio da Energia Complementar Mínima:*

$$\frac{\partial U^*}{\partial H_A} = 0 \Rightarrow \int_0^{L/2} M_1(x) \frac{\partial M_1}{\partial H_A} dx + \int_0^{L/2} M_2(x) \frac{\partial M_2}{\partial H_A} dx + \int_0^L M_3(x) \frac{\partial M_3}{\partial H_A} dx = 0$$



$$M_1(x) = -H_A x \quad \frac{\partial M_1}{\partial H_A} = -x$$

$$M_2(x) = -H_A \frac{L}{2} - (H_A + P)x \quad \frac{\partial M_2}{\partial H_A} = -\left(\frac{L}{2} + x\right)$$

$$M_3(x) = -H_A L - P \frac{L}{2} + V_A x \quad V_A = H_A + \frac{P}{2}$$

$$M_3(x) = -H_A L - P \frac{L}{2} + H_A x + \frac{P}{2} x \quad \frac{\partial M_3}{\partial H_A} = -L + x$$

$$\Rightarrow H_A = -\frac{13}{32} P$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- *As outras reações são calculadas a partir das equações de equilíbrio:*

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_A + H_C + P = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_C = 0$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow H_A L - V_A L + P \frac{L}{2} = 0$$

$$H_A = -\frac{13}{32}P \Rightarrow H_C = -\frac{19}{32}P \Rightarrow V_A = \frac{3}{32}P \Rightarrow V_C = -\frac{3}{32}P$$

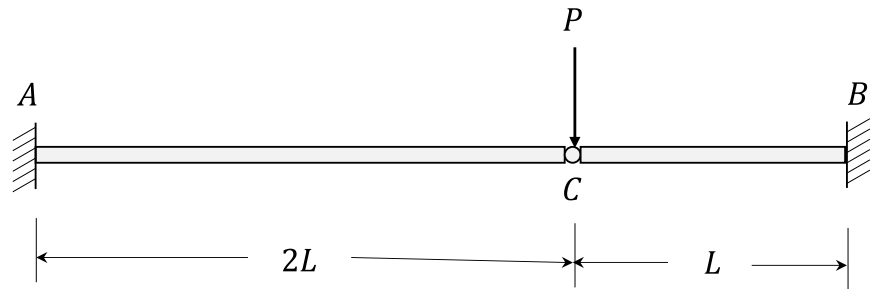
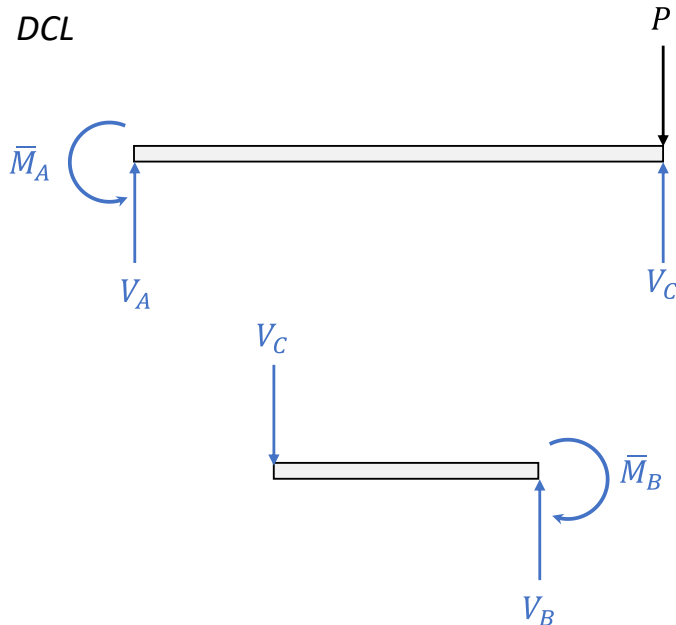


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

A estrutura da figura é formada por duas barras prismáticas de mesma rigidez flexional EI . Pede-se determinar as reações e a rotação da barra CB junto à articulação.

▪ DCL



▪ Equilíbrio:

▪ Barra AC:

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_C - P = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow (V_C - P)2L + \bar{M}_A = 0$$

▪ Barra CB:

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_B - V_C = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow V_C L - \bar{M}_B = 0$$

▪ Grau de hiperestaticidade:

$$g = 1$$

▪ Incógnita hiperestática:

vou escolher V_C



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

▪ **Princípio da Energia Complementar Mínima:**

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_C} = 0$$

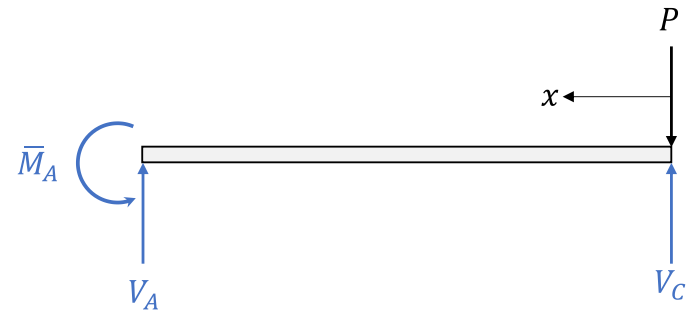
Tenho que escrever U^* como função de V_C

(não podem aparecer em U^* as outras incógnitas vinculares)

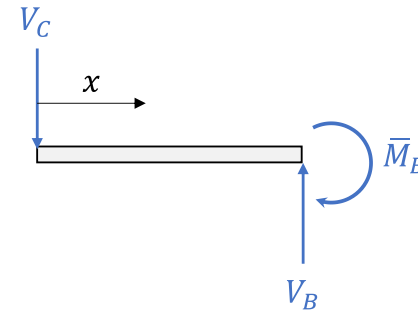
$$U^* = U_{AC}^* + U_{CB}^*$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U^*}{\partial V_C} = \frac{\partial U_{AC}^*}{\partial V_C} + \frac{\partial U_{CB}^*}{\partial V_C} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{2L} M_{AC}(x) \frac{\partial M_{AC}}{\partial V_C} dx + \int_0^L M_{CB}(x) \frac{\partial M_{CB}}{\partial V_C} dx = 0$$



$$M_{AC}(x) = (V_C - P)x \quad \frac{\partial M_{AC}}{\partial V_C} = x$$



$$M_{CB}(x) = V_C x \quad \frac{\partial M_{CB}}{\partial V_C} = x$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{8P}{9}$$



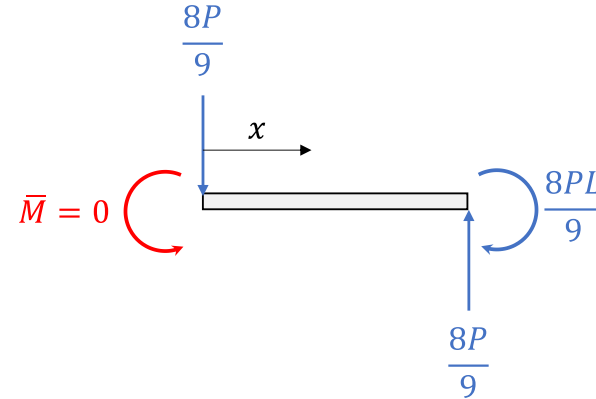
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- As outras reações são calculadas a partir das equações de equilíbrio:

$$V_A = \frac{P}{9} \quad \bar{M}_A = \frac{2PL}{9}$$

$$V_B = \frac{8P}{9} \quad \bar{M}_B = \frac{8PL}{9}$$

- Cálculo da rotação:



$$\theta = \frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} dx$$

$$M(x) = -\left(\bar{M} + \frac{8P}{9}x\right) \quad \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = -1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{4PL^2}{9EI}$$

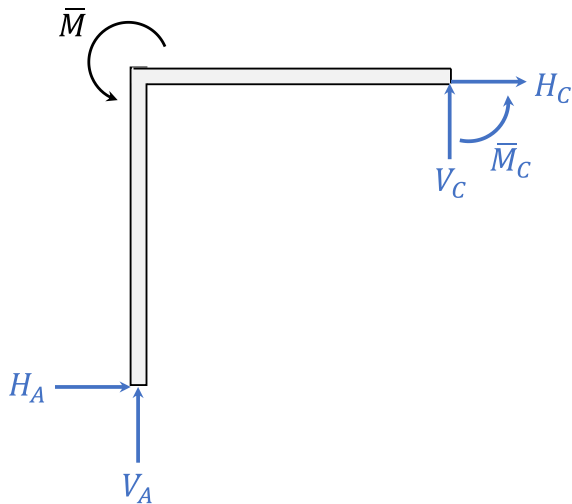


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

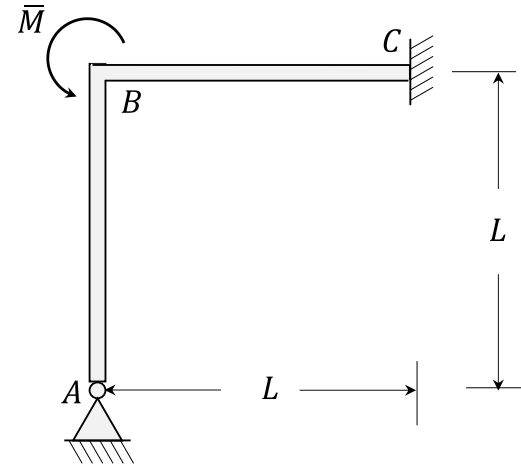
O pórtico da figura é formado por barras prismáticas com rigidez flexional EI . Calcular a rotação em B . Desprezar os efeitos das forças normais e cortantes.

▪ DCL



▪ Grau de hiperestaticidade:

$$g = 2$$



▪ Equilíbrio:

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_A + H_C = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_C = 0$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow H_A L - V_A L + \bar{M} + \bar{M}_C = 0$$

▪ Incógnitas hiperestáticas independentes:

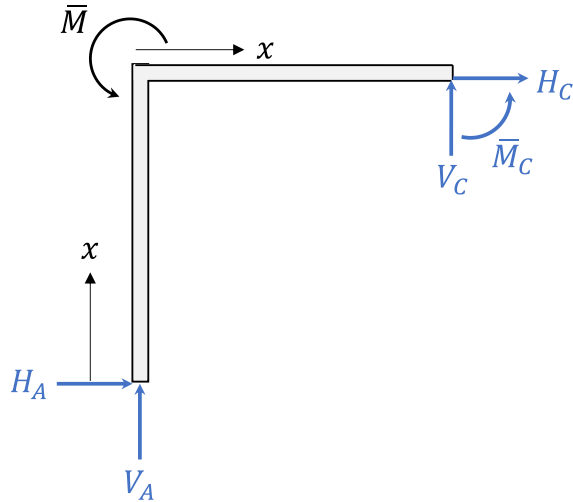
$$H_A$$

$$V_A$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

▪ **Princípio da Energia Complementar Mínima:**



$$\frac{\partial U^*}{\partial H_A} = 0 \Rightarrow \int_0^L M_1(x) \frac{\partial M_1}{\partial H_A} dx + \int_0^L M_2(x) \frac{\partial M_2}{\partial H_A} dx = 0$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_A} = 0 \Rightarrow \int_0^L M_1(x) \frac{\partial M_1}{\partial V_A} dx + \int_0^L M_2(x) \frac{\partial M_2}{\partial V_A} dx = 0$$

$$M_1(x) = -H_A x \quad \frac{\partial M_1}{\partial H_A} = -x \quad \frac{\partial M_1}{\partial V_A} = 0$$

$$M_2(x) = -H_A L - \bar{M} + V_A x \quad \frac{\partial M_2}{\partial H_A} = -L \quad \frac{\partial M_2}{\partial V_A} = x$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial H_A} = 0 \Rightarrow 8H_A L - 3V_A L = -6\bar{M}$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_A} = 0 \Rightarrow 3H_A L - 2V_A L = -3\bar{M}$$

$$\Rightarrow H_A = -\frac{3\bar{M}}{7L} \Rightarrow V_A = \frac{6\bar{M}}{7L}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- As outras incógnitas vinculares são calculadas a partir das equações de equilíbrio:

$$H_C = \frac{3\bar{M}}{7L} \quad V_C = -\frac{6\bar{M}}{7L} \quad \bar{M}_C = \frac{2\bar{M}}{7}$$

- Cálculo da rotação:

$$\theta = \frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}}$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \int_0^L M_1(x) \frac{\partial M_1}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_2(x) \frac{\partial M_2}{\partial \bar{M}} dx$$

$$M_1(x) = \frac{3\bar{M}}{7L} x \quad \frac{\partial M_1}{\partial \bar{M}} = \frac{3x}{7L}$$

$$M_2(x) = -\frac{4\bar{M}}{7} + \frac{6\bar{M}}{7L} x \quad \frac{\partial M_2}{\partial \bar{M}} = -\frac{4}{7} + \frac{6x}{7L}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\bar{M}L}{7EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar*. Disponível no Moodle