



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #19

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

29/10/2025



Teorema de Crotti-Engesser

- Seja um conjunto de cargas $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ aplicadas a uma estrutura
- A energia complementar pode ser escrita como função dessas cargas:

$$U^* = U^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

- Sejam $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ os deslocamentos dos pontos de aplicação dessas cargas na direção das mesmas
- Suponhamos que exclusivamente a carga P_i sofra um acréscimo dP_i
- Haverá um acréscimo na energia complementar:

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} dP_i$$

- O trabalho complementar adicional realizado pelo acréscimo da força será:

$$dW^* = \delta_i dP_i$$

- Mas o trabalho complementar realizado deve igualar o acréscimo na energia complementar:

$$dW^* = dU^* \Rightarrow \delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i}$$



Primeiro Teorema de Castigliano

- Seja um conjunto de cargas $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ aplicadas a uma estrutura
- Sejam $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ os deslocamentos dos pontos de aplicação dessas cargas na direção das mesmas
- A energia de deformação pode ser escrita como função desses deslocamentos:

$$U = U(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$$

- Suponhamos que exclusivamente o deslocamento δ_i sofra um acréscimo $d\delta_i$
- Haverá um acréscimo na energia de deformação:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i$$

- O trabalho adicional realizado pelo acréscimo do deslocamento será:

$$dW = P_i d\delta_i$$

- Mas o trabalho realizado deve igualar o acréscimo na energia de deformação:

$$dW = dU \Rightarrow P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i}$$



Segundo Teorema de Castigliano

- Seja uma estrutura com comportamento elástico-linear
- Seja um conjunto de cargas $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ aplicadas a essa estrutura
- Sejam $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ os deslocamentos dos pontos de aplicação dessas cargas na direção das mesmas
- O Segundo Teorema de Castigliano diz que:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$$

- Note que este teorema é equivalente ao de Crotti-Engesser, porque já vimos que para uma estrutura de comportamento elástico-linear $U = U^*$



Teorema de Castigliano modificado

- Considere uma barra prismática de comportamento elástico-linear submetida apenas a força normal:

$$U^* = \frac{1}{2EA} \int_0^L N^2(x) dx$$

- Pelo Segundo Teorema de Castigliano:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{1}{2EA} \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\int_0^L N^2(x) dx \right)$$

- A forma modificada do Segundo Teorema de Castigliano consiste em trocar a ordem da derivada e da integral:

$$\delta_i = \frac{1}{EA} \int_0^L N(x) \frac{\partial N}{\partial P_i} dx$$

- Esta modificação torna o problema algebricamente mais simples



Teorema de Castigliano Modificado

- Expressões análogas podem ser escritas para os outros tipos de esforços:
- Flexão:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x) dx \right) = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial P_i} dx$$

- Torção:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\frac{1}{2GI_P} \int_0^L T^2(x) dx \right) = \frac{1}{GI_P} \int_0^L T(x) \frac{\partial T}{\partial P_i} dx$$



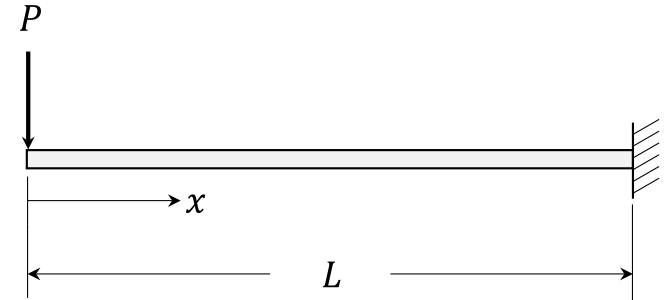
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo

A viga prismática, em balanço, da figura, tem comprimento L , rigidez flexional EI . Na sua extremidade livre está aplicada uma força vertical P . Pedem-se:

- a) o deslocamento vertical δ da extremidade livre devido a P ;*
- b) a rotação θ da extremidade livre devida a P .*

(Despreze a energia complementar devida à força cortante)



$$a) \quad \delta = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$M(x) = -Px$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

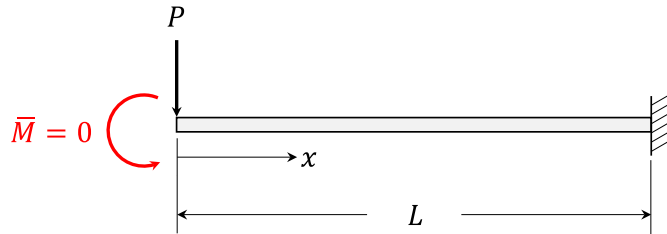
$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{EI} \int_0^L Px^2 dx$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{3EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

b)



$$\theta = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0} \quad \theta = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M(x) \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0} dx$$

$$M(x) = -\bar{M} - Px \quad \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = -1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{EI} \int_0^L (\bar{M} + Px)_{\bar{M}=0} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L Px dx$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{PL^2}{2EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

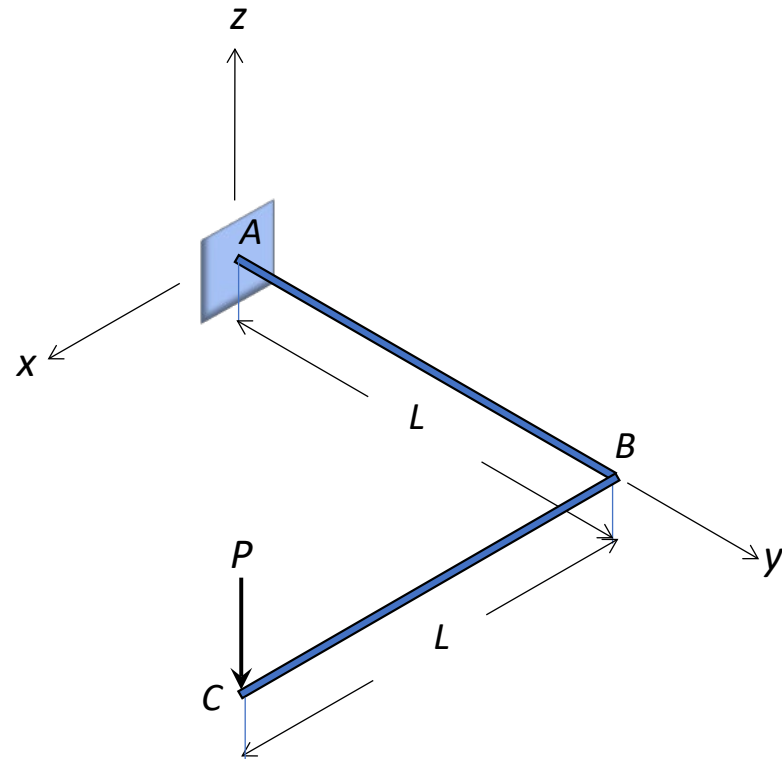
Exercício

A estrutura ABC da figura está contida em um plano horizontal. Ela é formada por uma barra de seção circular cheia, de raio R , dobrada em ângulo de 90° , e engastada no ponto A. A estrutura está submetida apenas à força vertical P aplicada ao ponto C. É dada a rigidez flexional da viga EI . Pedem-se:

- a) o deslocamento vertical do ponto C;
- b) a rotação do ponto C em torno da direção x ;
- c) a rotação do ponto C em torno da direção y .

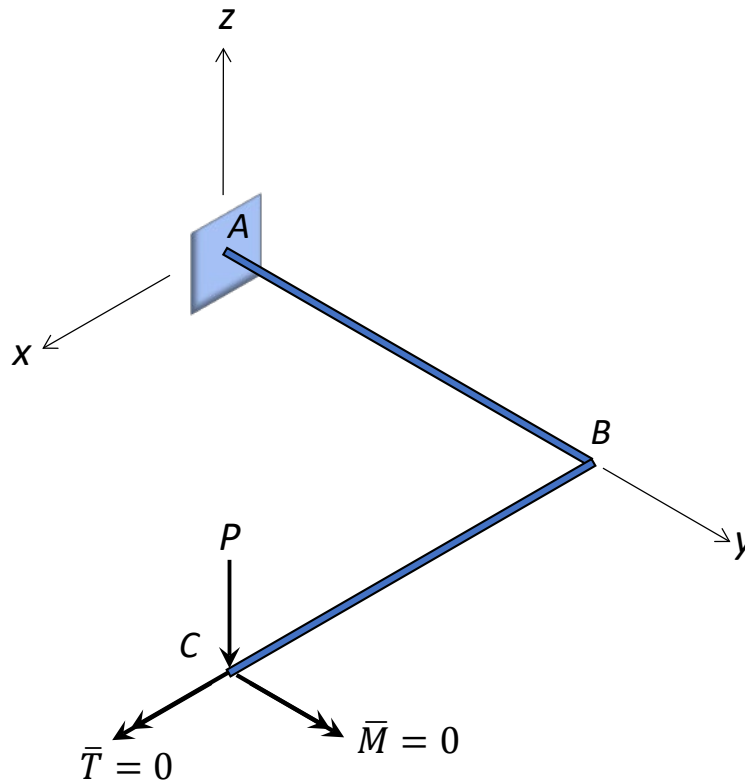
Notas:

- 1) Desprezar a contribuição das forças cortantes à energia complementar.
- 2) Usar $GI_P = \frac{4}{5}EI$.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial P}$$

$$\phi = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{T}} \right)_{\bar{T}=0}$$

$$\theta = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- o deslocamento vertical do ponto C será:

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_1 \frac{\partial T_1}{\partial P} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_2 \frac{\partial T_2}{\partial P} dx$$

- a rotação do ponto C em torno da direção x será:

$$\phi = \left(\frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial \bar{T}} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial \bar{T}} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \bar{T}} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_2 \frac{\partial T_2}{\partial \bar{T}} dx \right)_{\bar{T}=0}$$

- a rotação do ponto C em torno da direção y será:

$$\theta = \left(\frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_2 \frac{\partial T_2}{\partial \bar{M}} dx \right)_{\bar{M}=0}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$M_1(x) = -(\bar{M} + Px) \quad \frac{\partial M_1}{\partial P} = -x \quad \frac{\partial M_1}{\partial \bar{M}} = -1 \quad \frac{\partial M_1}{\partial \bar{T}} = 0$$

$$M_2(x) = \bar{T} - Px \quad \frac{\partial M_2}{\partial P} = -x \quad \frac{\partial M_2}{\partial \bar{M}} = 0 \quad \frac{\partial M_2}{\partial \bar{T}} = 1$$

$$T_1(x) = \bar{T} \quad \frac{\partial T_1}{\partial P} = 0 \quad \frac{\partial T_1}{\partial \bar{M}} = 0 \quad \frac{\partial T_1}{\partial \bar{T}} = 1$$

$$T_2(x) = \bar{M} + PL \quad \frac{\partial T_2}{\partial P} = L \quad \frac{\partial T_2}{\partial \bar{M}} = 1 \quad \frac{\partial T_2}{\partial \bar{T}} = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- *Resultam:*

$$\delta = \frac{23}{12} \frac{PL^3}{EI}$$

$$\phi = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$\theta = \frac{7}{4} \frac{PL^2}{EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar*. Disponível no Moodle