



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #18

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

15/10/2025

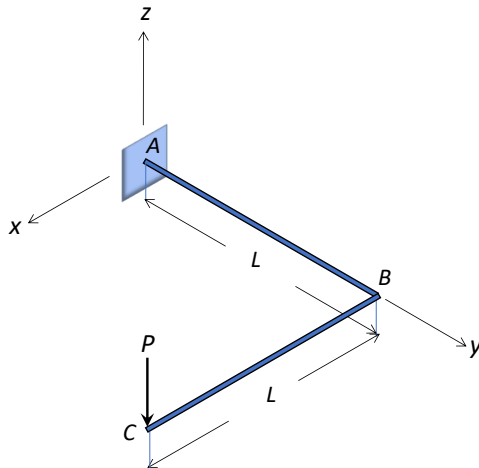


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

A estrutura ABC da figura está contida em um plano horizontal. Ela é formada por uma barra dobrada em ângulo de 90° e engastada no ponto A. A estrutura está submetida apenas à força vertical P aplicada ao ponto C. Pede-se o deslocamento vertical do ponto C, desprezando a contribuição da força cortante à energia complementar.



Dado:

$$GI_P = \frac{4}{5}EI$$

- Energia Complementar:

$$U^* = U_{flexão}^* + U_{torção}^*$$

$$U_{flexão}^* = (U_{flexão}^*)_{AB} + (U_{flexão}^*)_{BC}$$

$$(U_{flexão}^*)_{AB} = \frac{1}{2EI} \int_0^L (Px)^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$(U_{flexão}^*)_{BC} = (U_{flexão}^*)_{AB} = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$\Rightarrow U_{flexão}^* = \frac{P^2 L^3}{3EI}$$

$$U_{torção}^* = (U_{torção}^*)_{AB} = \frac{P^2 L^3}{2GI_P}$$

$$\Rightarrow U_{torção}^* = \frac{5P^2 L^3}{8EI}$$

$$\Rightarrow U^* = \frac{23P^2 L^3}{24EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Energia Complementar:

$$\Rightarrow U^* = \frac{23P^2L^3}{24EI}$$

- Trabalho:

$$W = \frac{1}{2}P\delta$$

- Deslocamento:

$$W = U = U^* \Rightarrow \frac{1}{2}P\delta = \frac{23P^2L^3}{24EI} \Rightarrow \delta = \frac{23PL^3}{12EI}$$

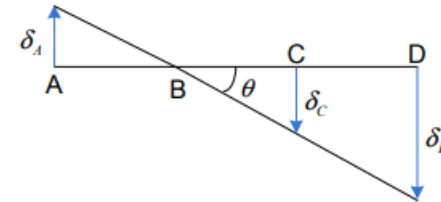
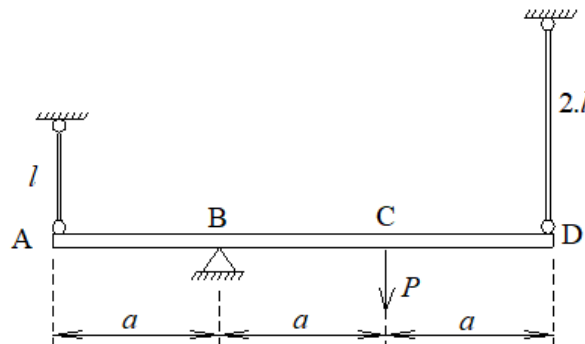


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

A estrutura da figura é formada por duas hastes verticais, de mesma rigidez axial EA , e uma barra horizontal rígida (indeformável) $ABCD$. As hastes possuem comprimentos l e $2l$, conforme indicado na figura, e estão articuladas à barra horizontal, que se encontra simplesmente apoiada em B . Considerando que uma única força vertical de intensidade P seja aplicada em C , determine o ângulo de rotação θ da barra horizontal.



a) Trabalho realizado pela força P :

$$W = \frac{P\delta_C}{2} = \frac{P\theta a}{2}$$

b) Energia de deformação:

$$U = U^{(1)} + U^{(2)}$$

$$U^{(1)} = \frac{EA}{l} \frac{\delta_A^2}{2} = \frac{EA}{l} \frac{\theta^2 a^2}{2}$$

$$U^{(2)} = \frac{EA}{2l} \frac{\delta_D^2}{2} = \frac{EA}{l} \theta^2 a^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{3EA}{2l} \theta^2 a^2$$

c) Princípio do Trabalho e da Energia:

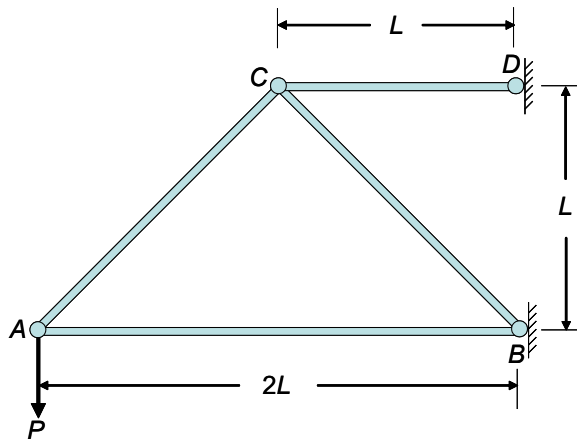
$$W = U \Rightarrow \theta = \frac{1}{3} \frac{P}{EA} \frac{l}{a}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

A treliça da figura é formada por barras com rigidez axial EA dada e está contida em um plano vertical. Sabendo que ela está submetida a uma força P aplicada ao seu nó A , pede-se determinar o deslocamento vertical do nó A .



- Forças nas barras:

$$F_{AC} = P\sqrt{2} \quad F_{AB} = -P \quad F_{BC} = -P\sqrt{2} \quad F_{CD} = 2P$$

- Energia complementar:

$$U^* = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2EA}$$
$$= \frac{1}{2EA} [P^2 2L + 2P^2 L\sqrt{2} + 2P^2 L\sqrt{2} + 4P^2 L]$$

$$\Rightarrow U^* = \frac{P^2 L}{EA} [3 + 2\sqrt{2}]$$

- Deslocamento:

$$W = U = U^*$$

$$\Rightarrow \frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 L}{EA} [3 + 2\sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2PL}{EA} [3 + 2\sqrt{2}]$$



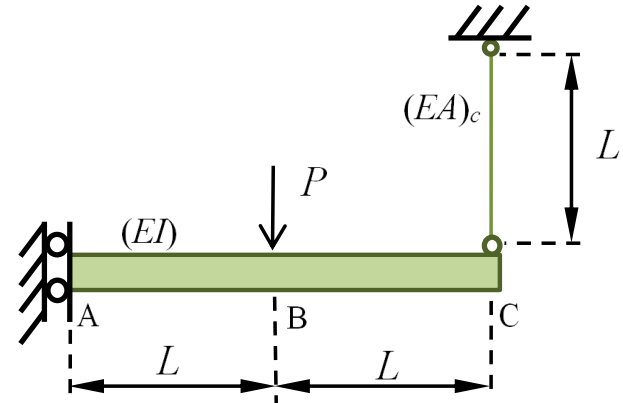
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

A estrutura da figura é formada por uma viga uniforme ABC, de comprimento total $2L$, seção transversal retangular ($b \times h$), feita com material de módulo de elasticidade E , e é submetida a um único esforço vertical de intensidade P , aplicado no meio do vão. Considerando que a extremidade C esteja ligada a um cabo de rigidez axial $(EA)_c$ e comprimento L , pede-se determinar o deslocamento vertical em B (expressão literal e valor numérico), após a aplicação da carga, utilizando o Princípio do Trabalho e da Energia.

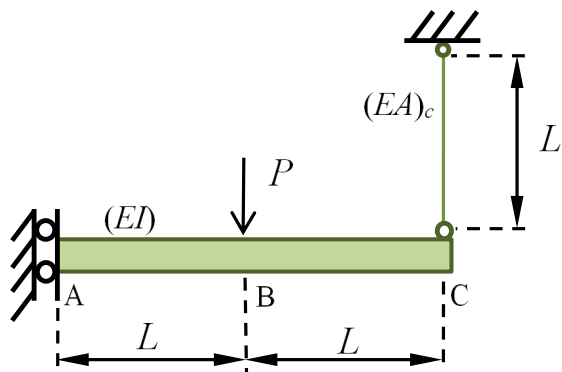
Dados:

$$P = 2 \text{ kN}, \quad L = 1,0 \text{ m}, \quad b = 5 \text{ cm}, \quad (h/L) = 0,1, \\ E = 200 \text{ GPa}, \quad (EA)_c = 1000 \text{ kN}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



▪ Equilíbrio:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_D = P$$

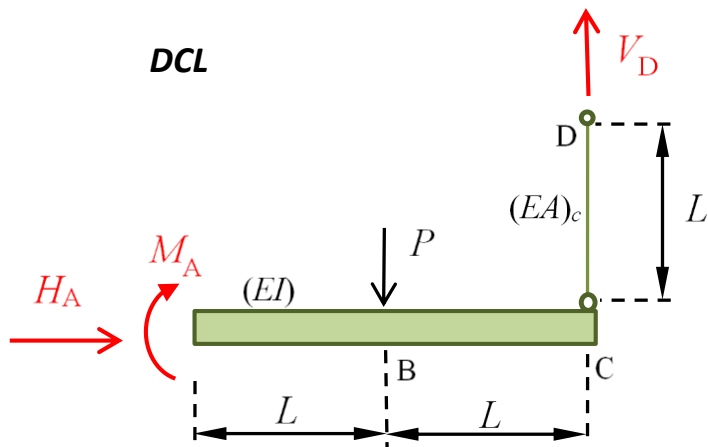
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow V_D \cdot 2L = PL + M_A \Rightarrow M_A = PL$$

▪ Princípio do Trabalho e da Energia:

$$U = U^* = W^* = W$$

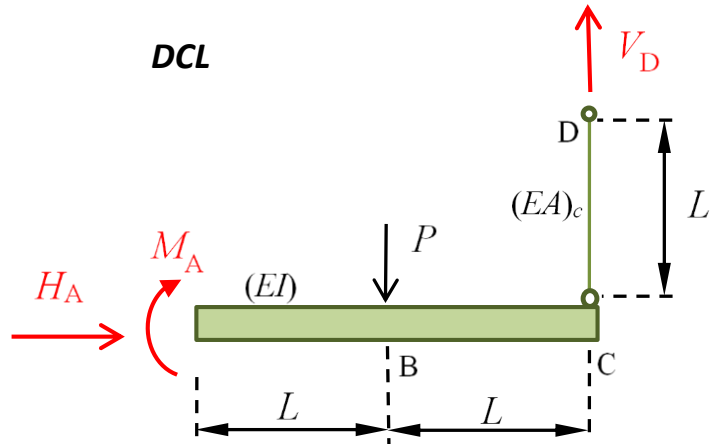
• Trabalho:

$$W = \frac{P \delta_{v,B}}{2}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



▪ Energia Complementar

$$U^* = \left(\sum \int \frac{M^2}{2EI} ds \right) \Big|_{\text{viga}} + \left(\int \frac{N^2}{2(EA)_c} ds \right) \Big|_{\text{cabo}}$$

$$U^* = \int_0^L \frac{(P s)^2}{2EI} ds + \int_0^L \frac{(P L)^2}{2EI} ds + \int_0^L \frac{(P)^2}{2(EA)_c} ds$$

$$U^* = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{P^2 L^3}{2EI} + \frac{P^2 L}{2(EA)_c} = \frac{2P^2 L^3}{3EI} + \frac{P^2 L}{2(EA)_c}$$

▪ Deslocamento vertical em B

$$\frac{P \delta_{v,B}}{2} = \frac{2P^2 L^3}{3EI} + \frac{P^2 L}{2(EA)_c}$$

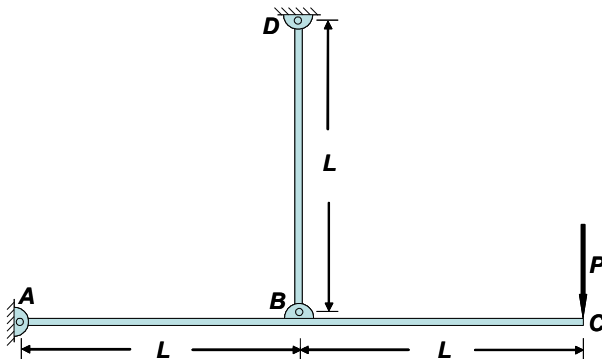
$$\Rightarrow \delta_{v,B} = \frac{4PL^3}{3EI} + \frac{PL}{(EA)_c}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício:

A viga ABC da figura está articulada em A e é suportada por um tirante em B. O comprimento da viga é $2L$ e a sua rigidez flexional é EI . O comprimento do tirante é L e sua rigidez axial é EA . Pede-se determinar, usando o Princípio do Trabalho e da Energia, o deslocamento vertical d que sofre a extremidade livre C da viga quando nela é aplicada uma força vertical P .



a) Força normal no tirante DB :

$$N = 2P$$

b) Energia complementar armazenada no tirante DB :

$$U_{DB}^* = \frac{N^2 L}{2EA} = \frac{2P^2 L}{EA}$$

c) Energia complementar armazenada na barra AC :

$$U_{AC}^* = 2 \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad M(x) = -Px$$

$$\Rightarrow U_{AC}^* = \frac{P^2 L^3}{3EI}$$

d) Energia complementar total:

$$U^* = U_{AC}^* + U_{DB}^* \Rightarrow U^* = \frac{P^2 L^3}{3EI} + \frac{2P^2 L}{EA}$$

e) Trabalho realizado pela força aplicada:

$$W = \frac{P\delta}{2}$$

f) Princípio do Trabalho e da Energia

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 L^3}{3EI} + \frac{2P^2 L}{EA} \Rightarrow \delta = \frac{2PL^3}{3EI} + \frac{4PL}{EA}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar*. Disponível no Moodle