**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**
**Departamento de Engenharia Mecânica**

# *PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II*

*Aula #17*

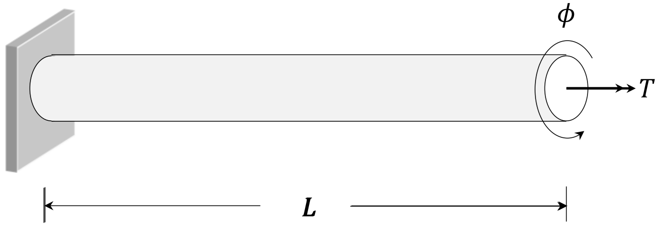
*Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins*

*14/10/2025*

## Eixo sob torção

- Material elástico-linear

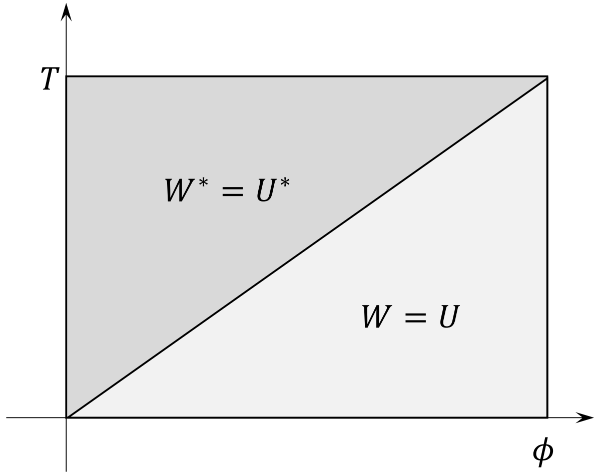
- Eixo prismático




$$\phi = \frac{TL}{GI_P}$$

$$T = \frac{GI_P}{L}\phi$$

- Energia de deformação e energia complementar

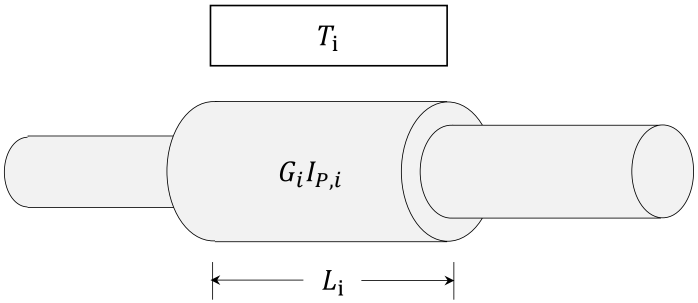



$$U = \frac{1}{2}\phi T = \frac{GI_p}{2L}\phi^2$$

$$U^* = \frac{1}{2}\phi T = \frac{T^2 L}{2GI_P}$$

## Eixo sob torção

- Eixo escalonado



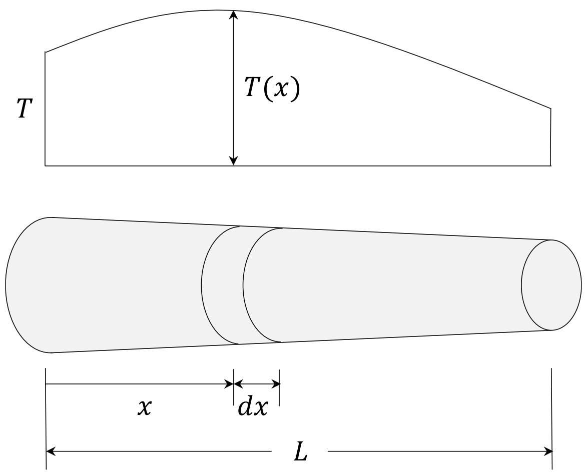

$$U_i^* = \frac{T_i^2 L_i}{2G_i I_{pi}}$$

$$U^* = \sum_{i=1}^{n} U_i^*$$

$$U^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i^2 L_i}{2G_i I_{p,i}}$$

## Eixo sob torção

- Eixo não-uniforme

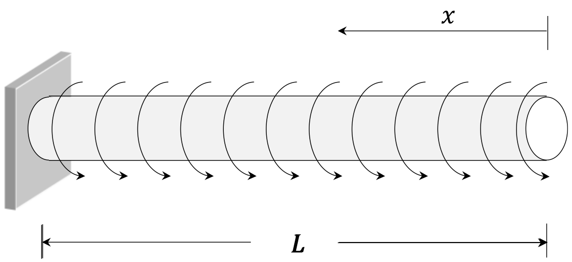



$$dU^* = \frac{T^2(x)}{2G(x)I_p(x)}dx$$

$$U^* = \int_0^L \frac{T^2(x)}{2G(x)I_p(x)}dx$$

## Exemplo

***O eixo prismático da figura tem comprimento $L$, momento polar $I_P$ e seu material tem módulo ao cisalhamento $G$. Se o eixo estiver submetido a um torque por unidade de comprimento $t$ constante, qual será a energia complementar armazenada?***




$$U^* = \frac{1}{2GI_P}\int_0^L T^2(x)dx$$

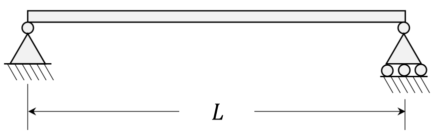
$$T(x) = t\,x$$

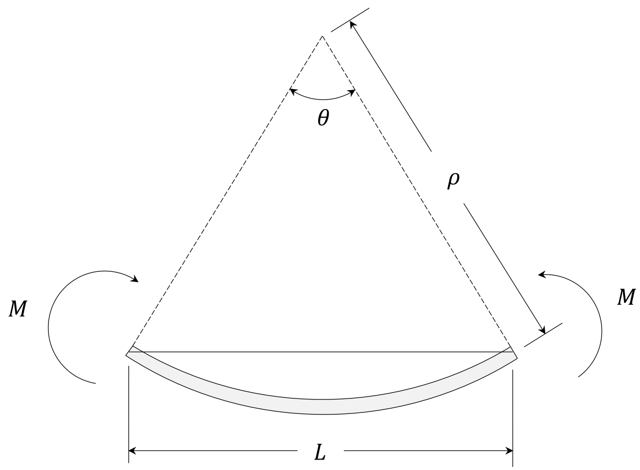
$$U^* = \frac{1}{2GI_P}\int_0^L (t\,x)^2 dx$$

$$\Rightarrow U^* = \frac{t^2 L^3}{6GI_P}$$

## Barra sob flexão

- Flexão uniforme



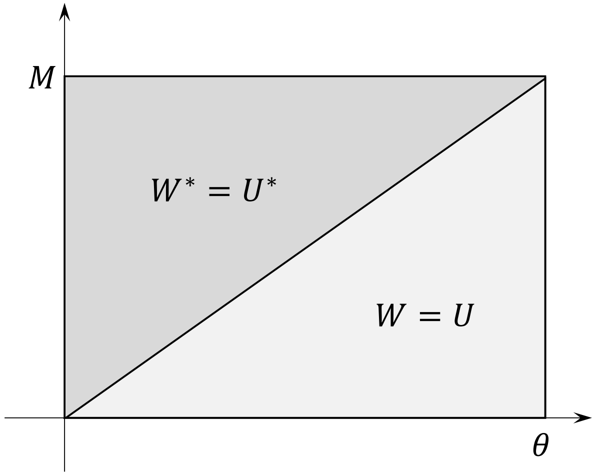




- Material elástico-linear

$$\left.\begin{aligned} \kappa &= \frac{M}{EI} \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{M}{EI} \\ \rho\,\theta &= L \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{ML}{EI} \Rightarrow M = \frac{EI}{L}\theta$$

## *Barra sob flexão*

- Energia de deformação e energia complementar



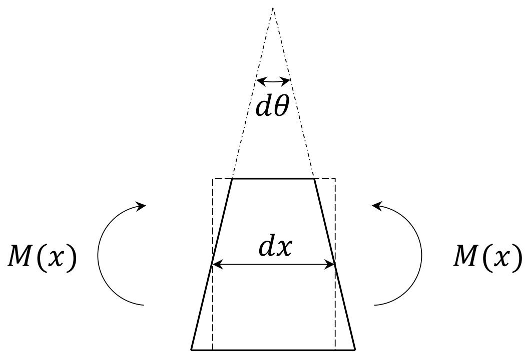

$$\theta = \frac{ML}{EI} \qquad M = \frac{EI}{L}\theta$$

$$U = \frac{1}{2}M\theta = \frac{EI}{2L}\theta^2$$

$$U^* = \frac{1}{2}M\theta = \frac{M^2L}{2EI}$$

## *Barra sob flexão*

- Flexão não-uniforme:

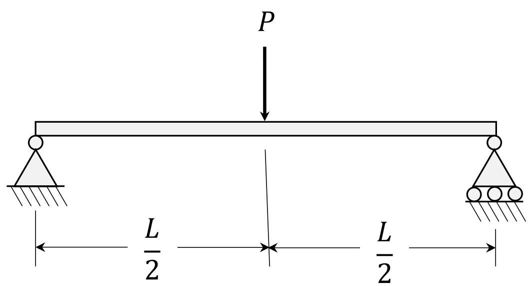



$$dU^* = \frac{M^2(x)}{2E(x)I(x)}dx$$

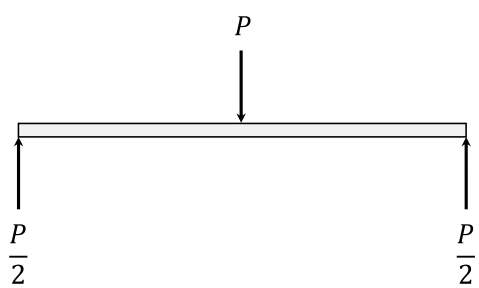
$$U^* = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2E(x)I(x)}dx$$

## Exemplo

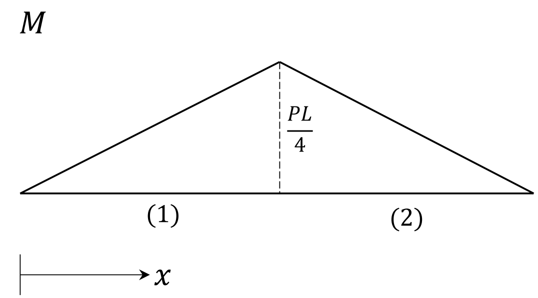
***A viga prismática biapoiada da figura tem comprimento $L$ e rigidez flexional constante $EI$. Determine o deslocamento vertical sofrido pelo ponto médio da barra, quando a ela é aplicada uma força vertical $P$.***




- DCL




- Diagrama de momento fletor




- Energia complementar:

$$U^* = U^*_{(1)} + U^*_{(2)} \Rightarrow U^* = 2\,U^*_{(1)}$$

$$U^* = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} M^2_{(1)}(x)dx$$

$$M_{(1)} = \frac{P}{2}x$$

$$U^* = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{P}{2}x\right)^2 dx \Rightarrow U^* = \frac{P^2L^3}{96EI}$$

- Trabalho de $P$

$$W = \frac{1}{2}P\delta$$

- Deslocamento

$$W = U = U^* \;\Rightarrow \frac{1}{2}P\delta = \frac{P^2L^3}{96EI} \Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

## Barra sob força cortante

- Por analogia com as outras fórmulas de energia complementar poderia ser:

$$U^* = \int_0^L \frac{V^2(x)}{2G(x)A(x)}dx$$

- Fórmula completa:

$$U^* = \int_0^L f_c(x)\frac{V^2(x)}{2G(x)A(x)}dx$$

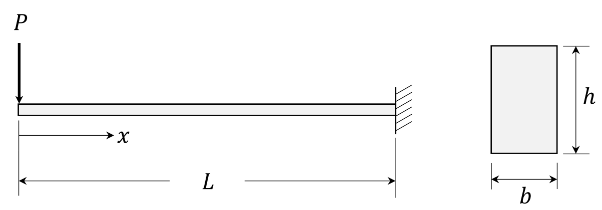
- Barra prismática:

$$U^* = f_c\int_0^L \frac{V^2(x)}{2GA}dx$$

| Forma da Seção | Fator de Forma $f_c$ |
|---|---|
| Retangular cheia | 6/5 |
| Circular cheia | 10/9 |
| Tubo de parede fina | 2 |
| Perfil caixa ou I | $A/A_{alma}$ |

## Exemplo

***A barra prismática da figura está engastada em uma das suas extremidades e submetida a uma força vertical $P$ na outra. A seção transversal da barra é retangular, como indicado na figura. Calcule a energia complementar devida ao momento fletor e a energia complementar devida à força cortante. Compare os dois valores.***




- Energia complementar devida ao momento fletor:

$$U_M^* = \frac{1}{2EI}\int_0^L M^2(x)\,dx = \frac{1}{2EI}\int_0^L (-Px)^2\,dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow U_M^* = \frac{2P^2L^3}{Ebh^3}$$

- Energia complementar devida à força cortante:

$$U_V^* = \frac{f_c}{2GA}\int_0^L V^2(x)\,dx = \frac{3}{5GA}\int_0^L (-P)^2\,dx = \frac{3P^2L}{5GA}$$

- Relação entre as energias

$$\frac{U_V^*}{U_M^*} = \frac{3P^2L}{5Gbh}\frac{Ebh^3}{2P^2L^3} = \frac{3}{10}\frac{E}{G}\left(\frac{h}{L}\right)^2$$

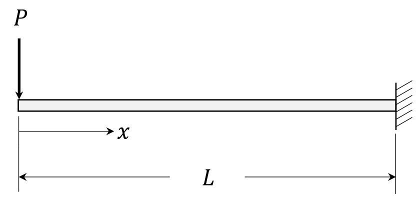
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow 2 \leq \frac{E}{G} \leq 3$$

$$\frac{U_V^*}{U_M^*} \sim \left(\frac{h}{L}\right)^2 \ll 1$$

## Composição de esforços

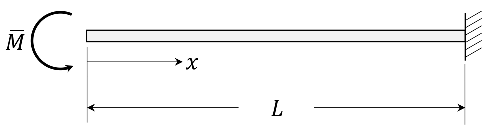
*Calcular a energia complementar armazenada por uma viga em balanço quando submetida a três tipos de carregamentos diferentes:*

*i) uma força vertical $P$ aplicada à sua extremidade livre:*



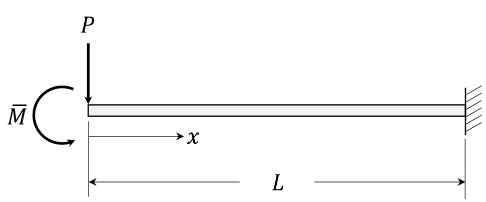

$$U_i^* = \frac{1}{2EI}\int_0^L M^2(x)\,dx = \frac{1}{2EI}\int_0^L (-Px)^2\,dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

*ii) um binário $\overline{M}$ aplicado à sua extremidade livre:*




$$U_{ii}^* = \frac{1}{2EI}\int_0^L M^2(x)\,dx = \frac{1}{2EI}\int_0^L (-\overline{M})^2\,dx = \frac{\overline{M}^2L}{2EI}$$

*iii) uma força vertical $P$ e um binário $\overline{M}$ aplicados à sua extremidade livre:*




$$U_{iii}^* = \frac{1}{2EI}\int_0^L M^2(x)\,dx = \frac{1}{2EI}\int_0^L (-\overline{M} - Px)^2\,dx$$

$$\Rightarrow U_{iii}^* = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{P\overline{M}L^2}{2EI} + \frac{\overline{M}^2L}{2EI}$$

$$U_{iii}^* \neq U_i^* + U_{ii}^*$$

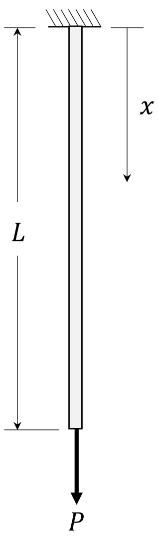
## Exercício

***A barra prismática da figura está suspensa pela extremidade superior e submetida ao seu peso próprio e a uma força $P$ aplicada à sua extremidade inferior. Sabendo que o módulo de elasticidade do material da barra é $E$, a área de sua seção transversal é $A$ e o seu peso por unidade de volume é $\gamma$, calcular a energia complementar armazenada nos seguintes casos:***

***a)*** $\boldsymbol{\gamma = 0}$ ***e*** $\boldsymbol{P \neq 0}$

***b)*** $\boldsymbol{\gamma \neq 0}$ ***e*** $\boldsymbol{P = 0}$

***c)*** $\boldsymbol{\gamma \neq 0}$ ***e*** $\boldsymbol{P \neq 0}$




a)

$$U^* = \frac{P^2 L}{2EA}$$

b)

$$U^* = \frac{\gamma^2 A L^3}{6E}$$ (da aula #16)

c)

$$U^* = \frac{1}{2EA}\int_0^L N^2(x)dx$$

$$N(x) = P + \gamma A(L - x)$$

$$\Rightarrow U^* = \frac{P^2 L}{2EA} + \frac{\gamma P L^2}{2E} + \frac{\gamma^2 A L^3}{6E}$$

## *Referência*

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar.* Disponível no Moodle