



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Mecânica*

*PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II*

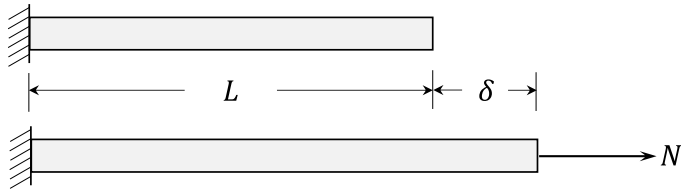
*Aula #16*

*Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins*

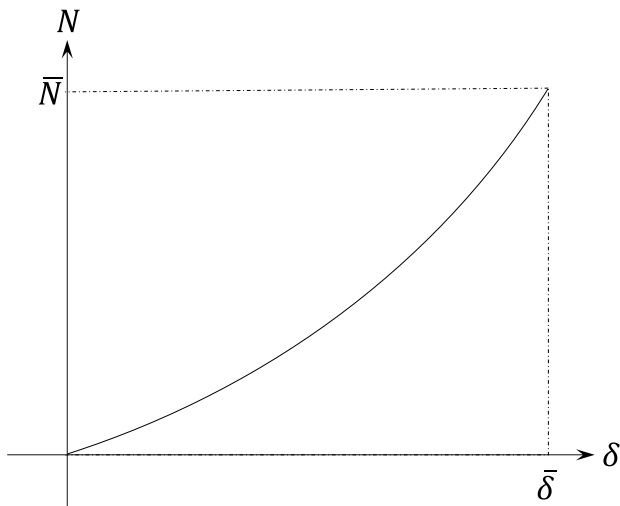
*08/10/2025*



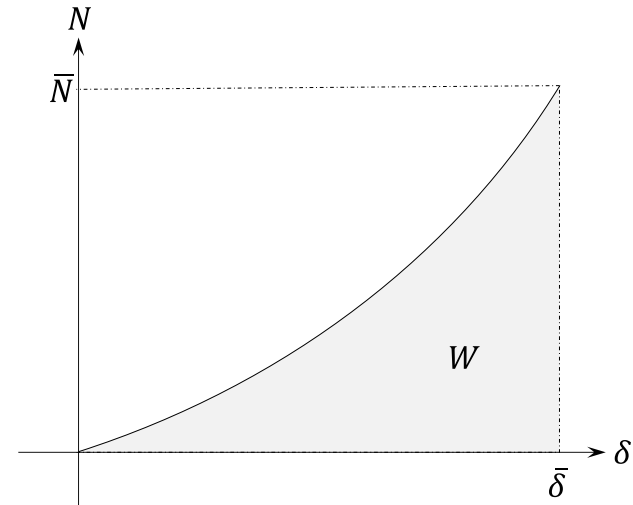
### **Trabalho e trabalho complementar**



- Curva da força normal em função do deslocamento



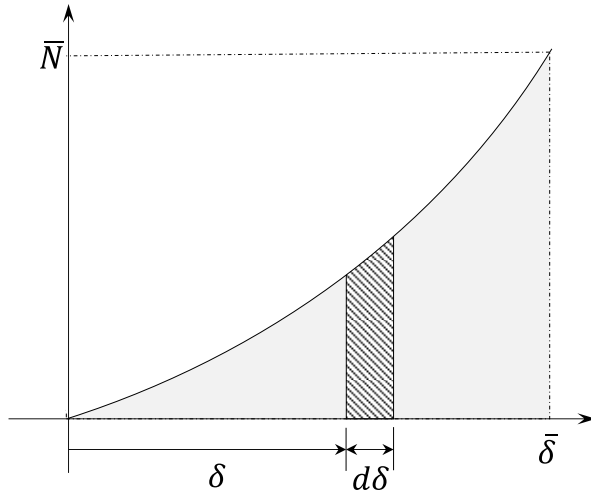
- A forma da curva depende do material
- Para material de comportamento elástico a curva é reversível
- Trabalho





## **Trabalho e trabalho complementar**

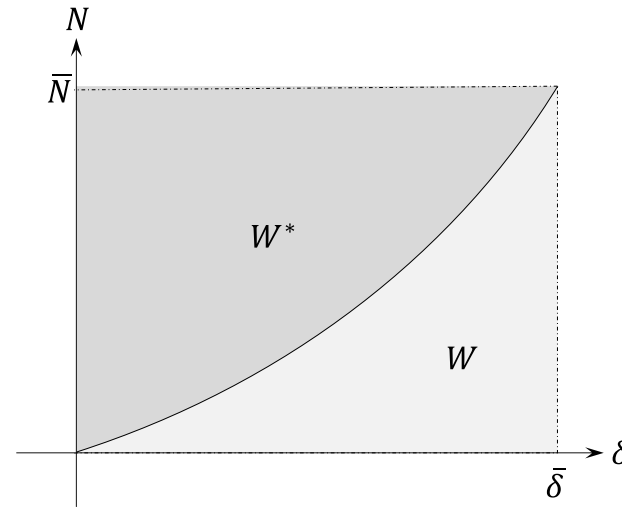
- Cálculo do trabalho



$$dW = N d\delta$$

$$W = \int_0^{\bar{\delta}} N d\delta$$

- Trabalho complementar



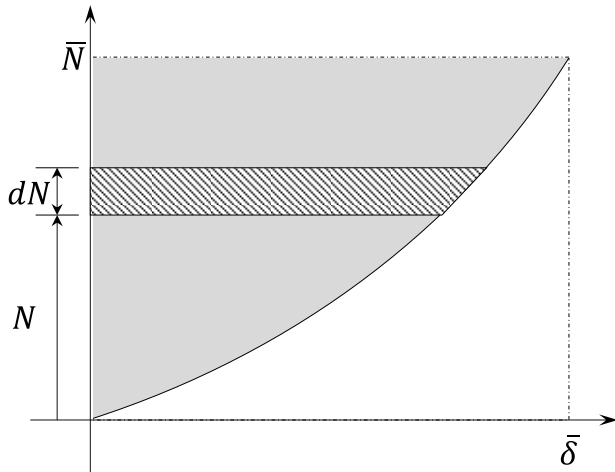
- Relação entre  $W$  e  $W^*$

$$W + W^* = \bar{N} \bar{\delta}$$



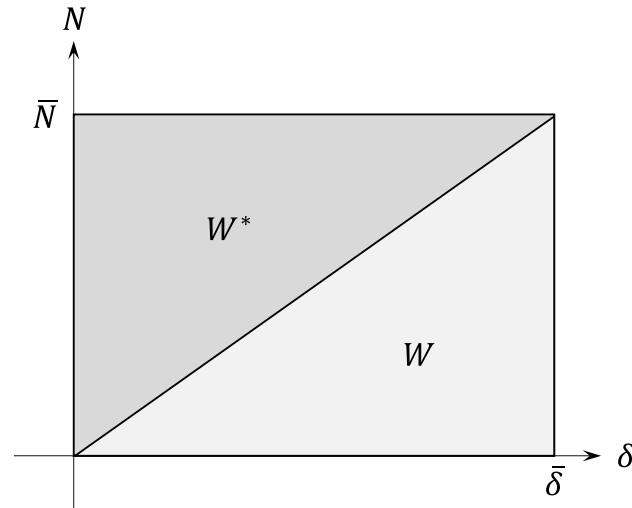
## Trabalho e trabalho complementar

- Cálculo de  $W^*$



$$W^* = \int_0^{\bar{N}} \delta dN$$

- Material de comportamento elástico-linear



$$W = W^* = \frac{1}{2} \bar{N} \bar{\delta}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

***Princípio do trabalho e da energia***

- Todo o trabalho realizado por um esforço para deformar um corpo é armazenado sob a forma de *energia de deformação*:

$$W = U$$

- Se o material tiver comportamento elástico, quando cessa a aplicação do esforço toda a energia é devolvida sob a forma de trabalho.
- Da mesma maneira, todo o trabalho complementar é armazenado sob a forma de *energia complementar*:

$$W^* = U^*$$

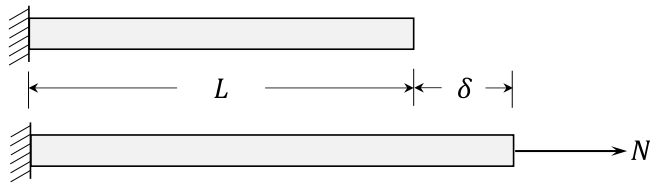
- Para um material de comportamento elástico-linear:

$$U = W = W^* = U^*$$



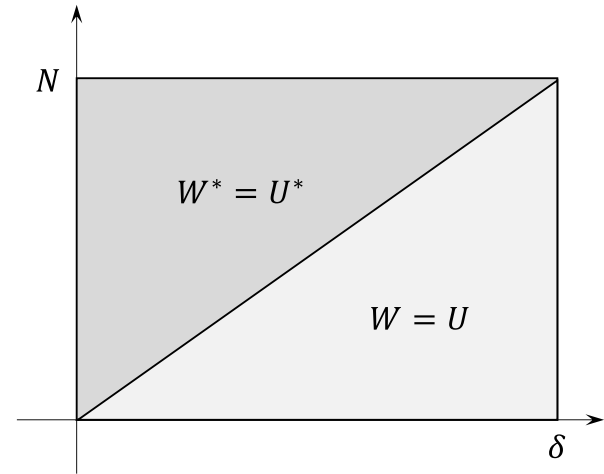
### Barra sob força axial

- Material de comportamento elástico-linear



- Barra prismática

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = \frac{N}{A} \\ \varepsilon = \frac{\delta}{L} \\ \sigma = E\varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \delta = \frac{NL}{EA} \Rightarrow N = \frac{EA}{L} \delta$$



$$U = \frac{1}{2} \delta N = \frac{EA}{2L} \delta^2$$

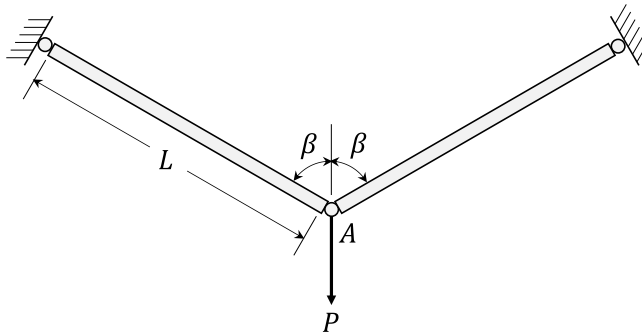
$$U^* = \frac{1}{2} N \delta = \frac{N^2 L}{2EA}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Exemplo**

**O suporte da figura é formado por duas barras iguais que têm o mesmo comprimento  $L$  e a mesma rigidez axial  $EA$ . Usando o Princípio do Trabalho e da Energia, determine o deslocamento vertical sofrido pelo ponto  $A$  com a aplicação da força  $P$ .**



- Força em cada barra:

$$2N \cos \beta = P \Rightarrow N = \frac{P}{2 \cos \beta}$$

- Energia complementar:

$$U^* = 2 \frac{N^2 L}{2EA} = \frac{P^2 L}{4EA \cos^2 \beta}$$

- Trabalho de  $P$ :

$$W = \frac{1}{2} P \delta$$

- Princípio do trabalho e da energia

$$W = U = U^*$$

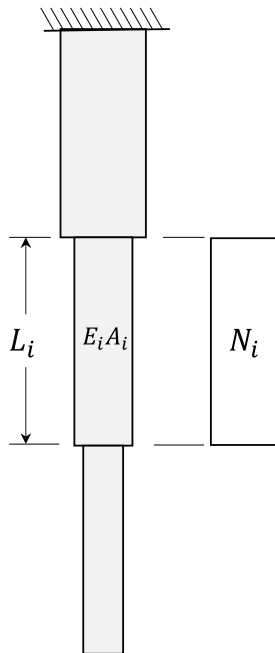
$$\Rightarrow \frac{1}{2} P \delta = \frac{P^2 L}{4EA \cos^2 \beta}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{PL}{2EA \cos^2 \beta}$$



## ***Barra sob força axial***

- Barra escalonada:



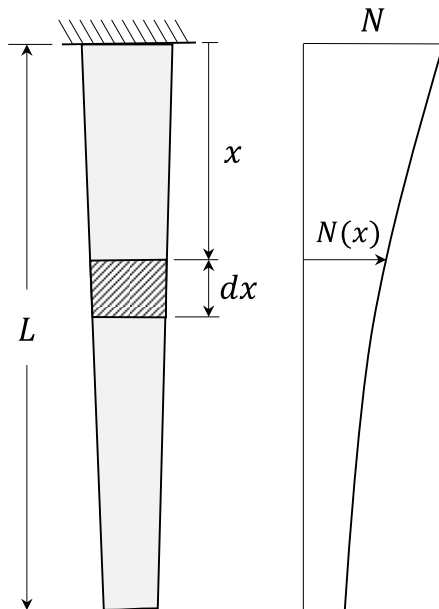
$$U_i^* = \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i}$$

$$U^* = \sum_{i=1}^n U_i^*$$

$$U^* = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i}$$



**Barra não-uniforme**



$$dU^* = \frac{N^2(x)}{2E(x)A(x)} dx$$

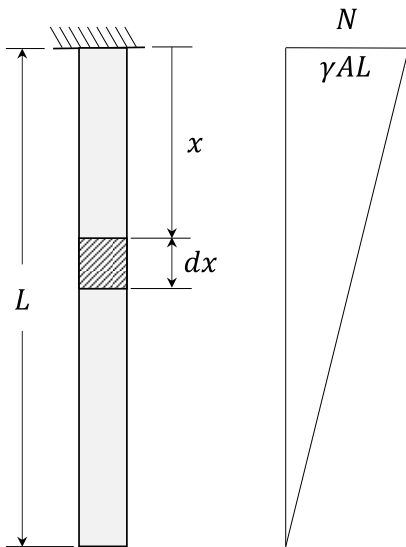
$$U^* = \int_0^L \frac{N^2(x)}{2E(x)A(x)} dx$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Exemplo**

**A barra prismática da figura está suspensa pela extremidade superior e submetida apenas ao seu peso próprio. Sabendo que o módulo de elasticidade do material da barra é  $E$ , a área de sua seção transversal é  $A$  e o seu peso por unidade de volume é  $\gamma$ , calcular a energia complementar armazenada.**



$$U^* = \frac{1}{2EA} \int_0^L N^2(x) dx$$

$$N(x) = \gamma A(L - x)$$

$$U^* = \frac{\gamma^2 A}{2E} \int_0^L (L - x)^2 dx$$

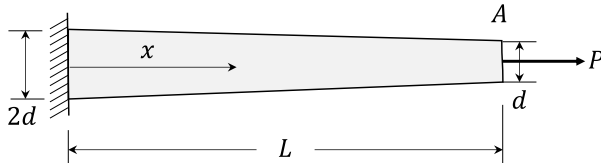
$$\Rightarrow U^* = \frac{\gamma^2 AL^3}{6E}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Exemplo**

A barra da figura tem a forma de um tronco de cone cujo diâmetro varia linearmente ao longo do eixo. O módulo de elasticidade do material da barra é  $E$ . Pede-se calcular o deslocamento  $\delta$  sofrido pela extremidade  $A$  com a aplicação da força  $P$ .



$$U^* = \frac{P^2}{2E} \int_0^L \frac{dx}{A(x)}$$

- Área:

$$A(x) = \frac{\pi}{4} d^2(x)$$

$$d(x) = d \left( 2 - \frac{x}{L} \right) \Rightarrow A(x) = \frac{\pi d^2}{4} \left( 2 - \frac{x}{L} \right)^2$$

- Energia complementar

$$U^* = \frac{2P^2}{\pi d^2 E} \int_0^L \frac{dx}{\left( 2 - \frac{x}{L} \right)^2} = \frac{P^2 L}{\pi d^2 E}$$

- Trabalho

$$W = \frac{1}{2} P \delta$$

- Deslocamento

$$W = U = U^*$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} P \delta = \frac{P^2 L}{\pi d^2 E} \Rightarrow \delta = \frac{2PL}{\pi d^2 E}$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***Referência***

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar*. Disponível no Moodle