



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #14

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

01/10/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Critérios de Resistência ou Critérios de Falha

É uma função matemática $\mathbb{F}([T])$ que visa a quantificar se um determinado material resiste aos esforços aplicados sem falhar.

Falha:

- Fratura
- Esmagamento
- Escoamento
- Deformação excessiva
- Deslocamento excessivo

De forma geral:

- $\mathbb{F}([T]) < \mathbb{C} \Leftrightarrow$ o material resiste aos esforços aplicados
- $\mathbb{F}([T]) = \mathbb{C} \Leftrightarrow$ o material alcançou seu limite de resistência
- $\mathbb{F}([T]) > \mathbb{C} \Leftrightarrow$ o material não resiste aos esforços aplicados

Fator de segurança:

$$FS = \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{F}([T])}$$



Critério de Tresca (1868)

- Empírico
- Materiais dúcteis
- Material dúctil é um material que apresenta um patamar de escoamento antes de se romper
- Supõe que a máxima tensão de cisalhamento governa a resistência do material

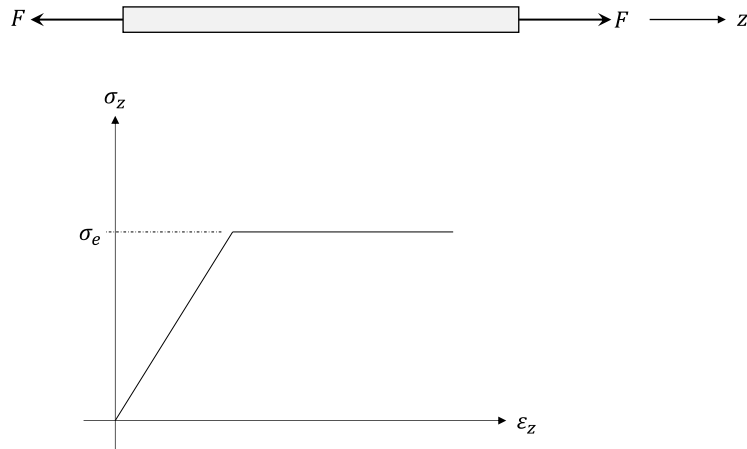
$$\mathbb{F}([T]) = \tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

- Também é chamado de *Critério da Máxima Tensão de Cisalhamento*



Critério de Tresca

- Ensaio de tração



- Quando o material atinge o escoamento

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_e \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_e \\ \sigma_2 &= \sigma_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_e}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} = \frac{\sigma_e}{2}$$

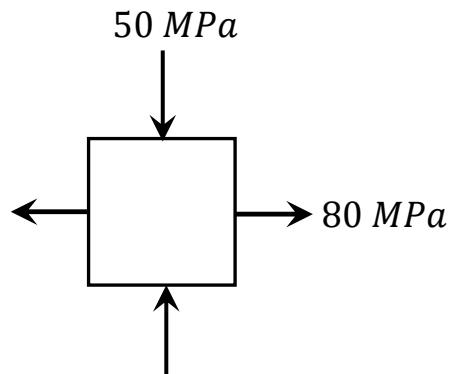
$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

O elemento infinitesimal mostra as tensões no ponto crítico de uma estrutura. Supondo que seu material seja aço com limite de escoamento $\sigma_e = 700 \text{ MPa}$, determinar o fator de segurança.



Material dúctil $\Rightarrow$ Critério de Tresca

$$\sigma_1 = 80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -50 \text{ MPa}$$

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{700}{80 - (-50)} = 5,4$$



Critério de Tresca – Estado Plano de Tensões

Vamos supor que uma das tensões principais seja nula e as outras duas sejam σ_a e σ_b

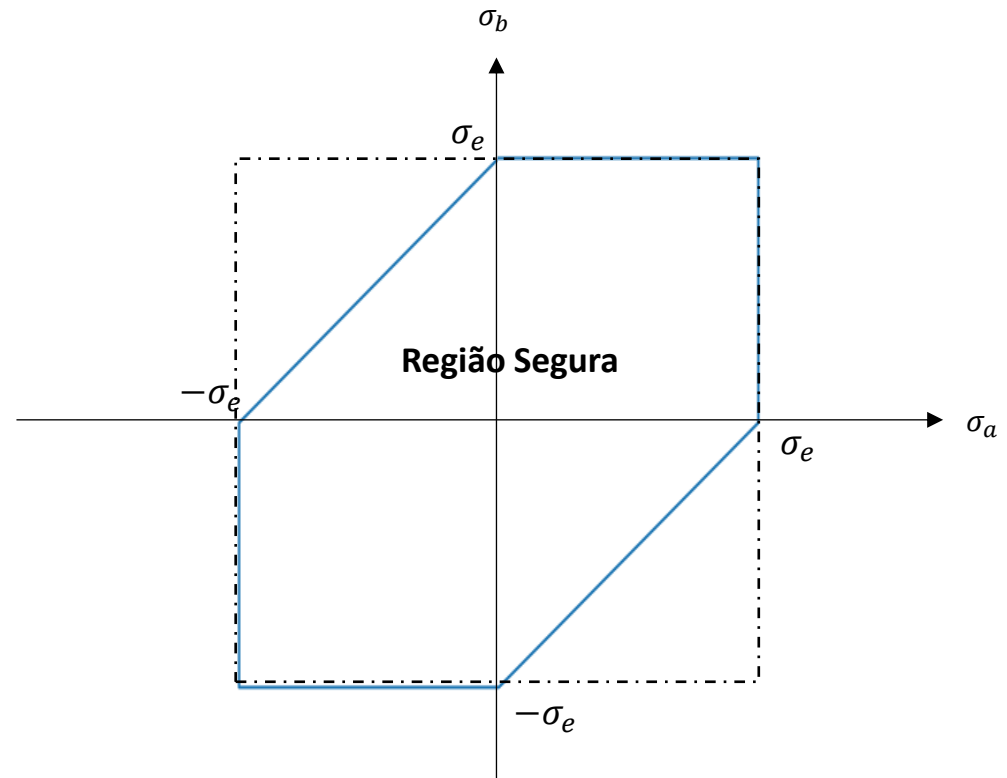
Se σ_a e σ_b têm o mesmo sinal:

$$|\sigma_a| < \sigma_e$$

$$|\sigma_b| < \sigma_e$$

Se σ_a e σ_b têm sinais opostos:

$$|\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_e$$





Critério de von Mises (1913)

- Postula que um material dúctil atinge o seu limite de resistência quando a energia acumulada pela distorção atinge um certo valor limite
- Também é chamado de *Critério da Energia de Distorção Máxima*
- É possível mostrar que a Energia de Distorção é dada por:

$$U_d = \frac{\sigma_{eq}^2}{6G}$$

onde σ_{eq} é a Tensão Equivalente de von Mises

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

ou

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

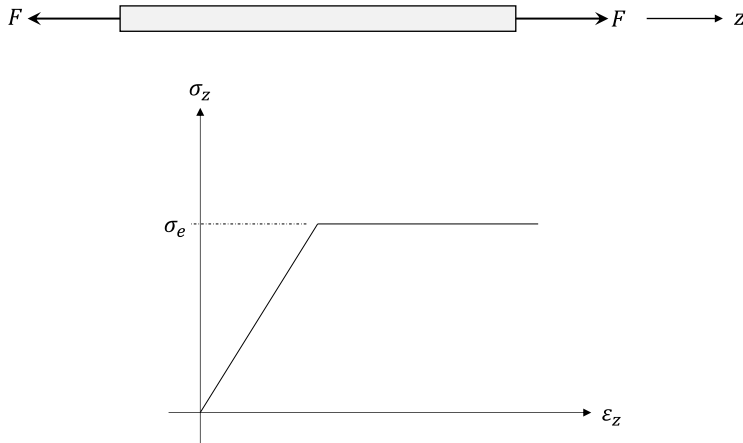
- Equivale a dizer que o que governa a resistência de materiais dúcteis é a *Tensão Equivalente de von Mises*

$$\mathbb{F}([T]) = \sigma_{eq}$$



Critério de von Mises

- Ensaio de tração



- Quando o material atinge o escoamento

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_e \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_e \\ \sigma_2 &= \sigma_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\mathbb{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_e - 0)^2 + (\sigma_e - 0)^2 + (0 - 0)^2}$$

$$\mathbb{C} = \sigma_e$$

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

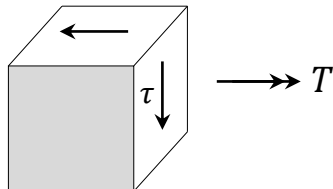
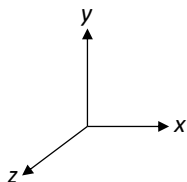
Uma liga de alumínio com tensão de escoamento de 255 MPa deve ser usada em um eixo de acionamento para que transmita 50 hp a 1800 rpm . Usando um fator de segurança igual a 2, determine o menor diâmetro que deve ter o eixo usando o critério de von Mises.

$$P = 50 \text{ hp} = 50 \times 745,7 \text{ W} = 37285 \text{ W}$$

$$\omega = 1800 \text{ rpm} = 1800 \times \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s} = 188,5 \text{ rad/s}$$

$$P = T \times \omega \Rightarrow T = \frac{P}{\omega} \Rightarrow T = 198 \text{ Nm}$$

$$\tau = \frac{T d}{I_p 2} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{1008}{d^3} \quad \begin{matrix} \tau \rightarrow \text{Pa} \\ d \rightarrow \text{m} \end{matrix}$$



$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -\tau & 0 \\ -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \sigma_1 = \tau \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -\tau \end{matrix}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\tau^2 + 4\tau^2 + \tau^2} \Rightarrow \sigma_{eq} = \sqrt{3} \tau$$

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{255 \times 10^6}{\sqrt{3}} \frac{d^3}{1008}$$

$$\Rightarrow d = 0,024 \text{ m}$$

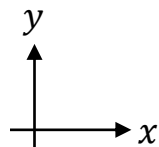
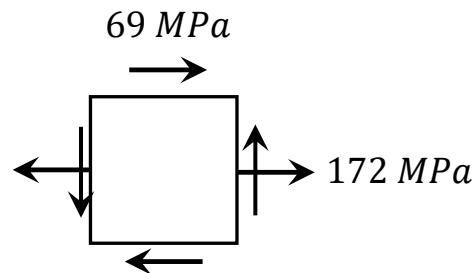


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

O elemento infinitesimal mostra as tensões no ponto crítico de uma estrutura. Determine o menor limite de escoamento que deve ter o material usando:

- a) o critério de von Mises
- b) o critério de Tresca



$$[T] = \begin{bmatrix} 172 & 69 & 0 \\ 69 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 196 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -24 \text{ MPa}$$

$$\text{a) } \sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(196)^2 + (196 + 24)^2 + (24)^2} = 209 \text{ MPa}$$

$$\sigma_e \geq \sigma_{eq} \Rightarrow \sigma_e \geq 209 \text{ MPa}$$

$$\text{b) } \sigma_e \geq \sigma_1 - \sigma_3 \Rightarrow \sigma_e \geq 220 \text{ MPa}$$



Critério de von Mises – Estado Plano de Tensões

Vamos supor que uma das tensões principais seja nula e as outras duas sejam σ_a e σ_b

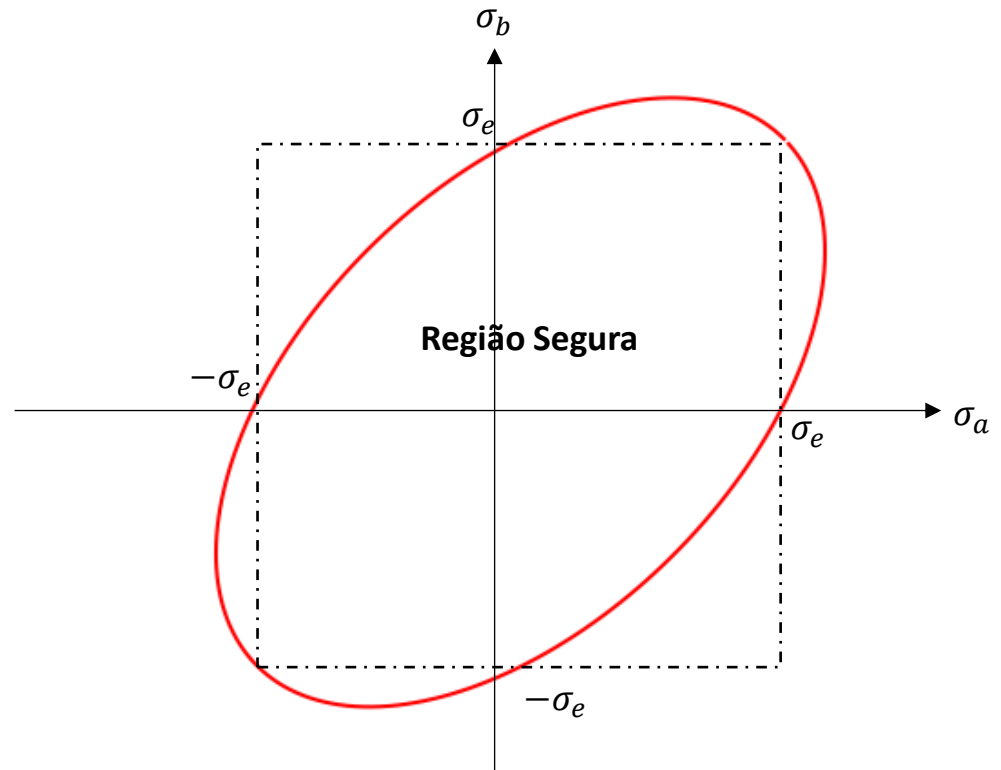
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_a - \sigma_b)^2 + \sigma_a^2 + \sigma_b^2} \leq \sigma_e$$

ou

$$\sqrt{\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2} \leq \sigma_e$$

ou

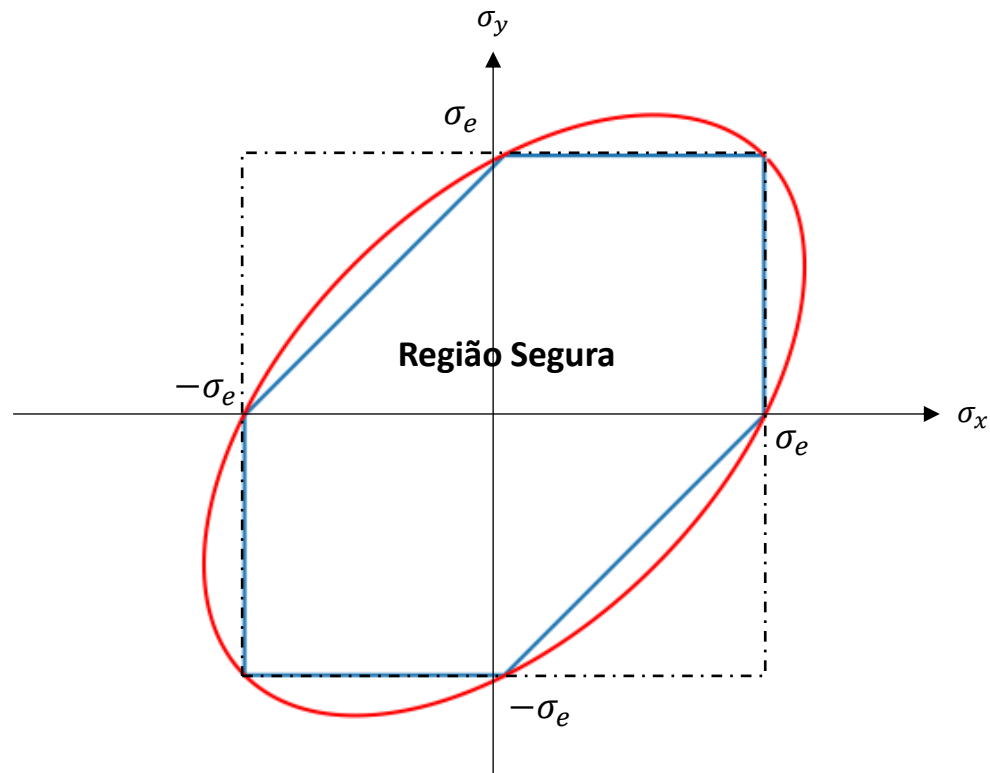
$$\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2 \leq \sigma_e^2$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Comparação entre critérios de Tresca e von Mises – Estado Plano de Tensões





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Tensões*. Disponível no Moodle