



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #12

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

24/09/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

Uma placa de magnésio em tensão biaxial está submetida a tensões de tração $\sigma_x = 30 \text{ MPa}$ e $\sigma_y = 15 \text{ MPa}$. As deformações correspondentes na placa são $\varepsilon_x = 550\mu$ e $\varepsilon_y = 100\mu$.

Determine o coeficiente de Poisson ν e o módulo de elasticidade E do material.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{\sigma_y - \nu\sigma_x}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x\sigma_y - \nu\varepsilon_x\sigma_x = \varepsilon_y\sigma_x - \nu\varepsilon_y\sigma_y$$

$$\Rightarrow \nu(\varepsilon_x\sigma_x - \varepsilon_y\sigma_y) = \varepsilon_x\sigma_y - \varepsilon_y\sigma_x$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{\varepsilon_x\sigma_y - \varepsilon_y\sigma_x}{\varepsilon_x\sigma_x - \varepsilon_y\sigma_y} \Rightarrow \nu = 0,35$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{\varepsilon_x}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\Rightarrow E = 45 \text{ GPa}$$



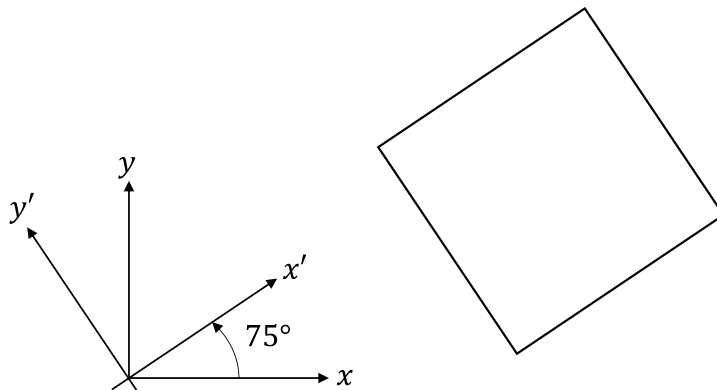
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

Um elemento de material em estado plano de deformações está submetido às deformações $\varepsilon_x = 480\mu$, $\varepsilon_y = 70\mu$ e $\gamma_{xy} = 420\mu$.

Determine:

- a) as deformações para um elemento orientado em um ângulo de 75° ,
- b) as deformações principais
- c) a distorção máxima



a)

$$[E] = \begin{bmatrix} 480 & 210 \\ 210 & 70 \end{bmatrix} \mu$$

$$\varepsilon_{x'} = \begin{Bmatrix} \cos 75 \\ \sin 75 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 480 & 210 \\ 210 & 70 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos 75 \\ \sin 75 \end{Bmatrix} \mu$$
$$= 202\mu$$

$$\varepsilon_{y'} = \begin{Bmatrix} -\sin 75 \\ \cos 75 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 480 & 210 \\ 210 & 70 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin 75 \\ \cos 75 \end{Bmatrix} \mu$$
$$= 348\mu$$

(Note que $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'}$)

$$\gamma_{x'y'} = 2 * \begin{Bmatrix} \cos 75 \\ \sin 75 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 480 & 210 \\ 210 & 70 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin 75 \\ \cos 75 \end{Bmatrix} \mu$$
$$= -569\mu$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

Um elemento de material em estado plano de deformações está submetido às deformações $\varepsilon_x = 480\mu$, $\varepsilon_y = 70\mu$ e $\gamma_{xy} = 420\mu$.

Determine:

- a) as deformações para um elemento orientado em um ângulo de 75° ,
- b) as deformações principais
- c) a distorção máxima

b)

$$\begin{vmatrix} 480 - \varepsilon & 210 \\ 210 & 70 - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (480 - \varepsilon) * (70 - \varepsilon) - 210^2 = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 - 550\varepsilon - 10500 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 568\mu \\ \varepsilon_2 = 0 \\ \varepsilon_3 = -18\mu \end{cases}$$

(Note que $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$)

c)

$$\gamma_{m\acute{a}x} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = 586\mu$$

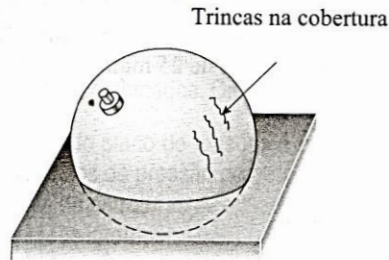


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

8.2-6 Um vaso de pressão esférico de aço (diâmetro de 480 mm e espessura de 8,0 mm) é coberto com verniz frágil que trinca quando a deformação excede 150×10^{-6} (veja a figura).

Qual o valor da pressão interna que faz o verniz desenvolver trincas? (Assuma $E = 205 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,30$.)



- Tensões principais:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad \sigma_3 = 0$$

- Deformações principais:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{1 - \nu}{E} \frac{pr}{2t}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = \frac{1 - \nu}{E} \frac{pr}{2t}$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) = -\frac{\nu}{E} \frac{pr}{t}$$

- Pressão interna:

$$\varepsilon_{m\acute{a}x} = \frac{1 - \nu}{E} \frac{pr}{2t}$$

$$\Rightarrow p = \frac{2tE\varepsilon_{m\acute{a}x}}{(1 - \nu)r} = 2,93 \text{ MPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

8.3-5 Um extensômetro é instalado na direção longitudinal na superfície de uma lata de alumínio (veja a figura). A razão entre raio e espessura da lata é de 200. Quando a tampa da lata é aberta, a deformação varia $\varepsilon_0 = 170 \times 10^{-6}$.

Qual era a pressão interna p na lata? (Assuma $E = 70 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,33$.)



$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \quad \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad \sigma_3 = 0$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = \frac{pr}{2tE}(1 - 2\nu) = \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow p = \frac{2tE\varepsilon_0}{(1 - 2\nu)r} = 350 \text{ KPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

Uma placa quadrada tem lado $a=200\text{ mm}$ e espessura $t=10\text{ mm}$. Esta placa foi submetida a um estado biaxial de tensão, com $\sigma_x = 40\text{ MPa}$ e $\sigma_y = 20\text{ MPa}$. Com a aplicação desse carregamento, as deformações medidas foram $\varepsilon_x = 200\mu$, $\varepsilon_y = 0$. Pede-se:

a) determinar o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν do material da placa;

b) obter as deformações principais;

c) calcular a máxima distorção;

d) calcular a variação que houve na espessura da placa com a aplicação do carregamento;

e) calcular a variação que houve no volume da placa com a aplicação do carregamento.

$$\text{a)} \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\Rightarrow E = 150\text{ GPa}$$

$$\Rightarrow \nu = 0,5$$

$$\text{b)} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = -200\mu$$

$$\varepsilon_1 = 200\mu \quad \varepsilon_2 = 0 \quad \varepsilon_3 = -200\mu$$

$$\text{c)} \quad \gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \Rightarrow \gamma_{max} = 400\mu$$

$$\text{d)} \quad \Delta t = \varepsilon_z t = -0,002\text{ mm}$$

$$\text{e)} \quad \Delta V = 0 \text{ (material incompressível)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Deformações*. Disponível no Moodle

Gere, J.M. & Goodno, B.J. *Mecânica dos Materiais* – 7ª edição – Capítulos 8