



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #11

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

23/09/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Da aula passada:

Vetor deformação:

$$\vec{\delta}(\vec{n}) = E[\vec{n}]$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}(\vec{n}) = \varepsilon(\vec{n}) \vec{n} + \frac{1}{2} \gamma(\vec{n}, \vec{t}) \vec{t}$$



Deformações principais e direções principais de deformação

- $\vec{m}$ é uma direção principal de deformação se for nula a distorção entre $\vec{m}$ e qualquer direção ortogonal a $\vec{m}$, ou seja, se:

$$\vec{\delta}(\vec{m}) = \varepsilon \vec{m}$$

- Então:

$$E[\vec{m}] - \varepsilon \vec{m} = 0$$

- Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} - \varepsilon \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Deformações principais e direções principais de deformação

- O sistema de equações algébricas lineares:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Admite a solução trivial:

$$m_x = m_y = m_z = 0$$

- Para que ele tenha mais de uma solução é necessário que:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$



Deformações principais e direções principais de deformação

- Equação característica:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 - K_1\varepsilon^2 + K_2\varepsilon - K_3 = 0$$

onde:

$$K_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

$$K_3 = |E|$$

são invariantes



Deformações principais e direções principais de deformação

- Como o tensor E é simétrico, a equação característica admite três raízes reais:

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$$

- Essas raízes são as *deformações principais* e são os *autovalores* de $[E]$
- Os autovetores associados a esses autovalores representam as *direções principais de deformação*:

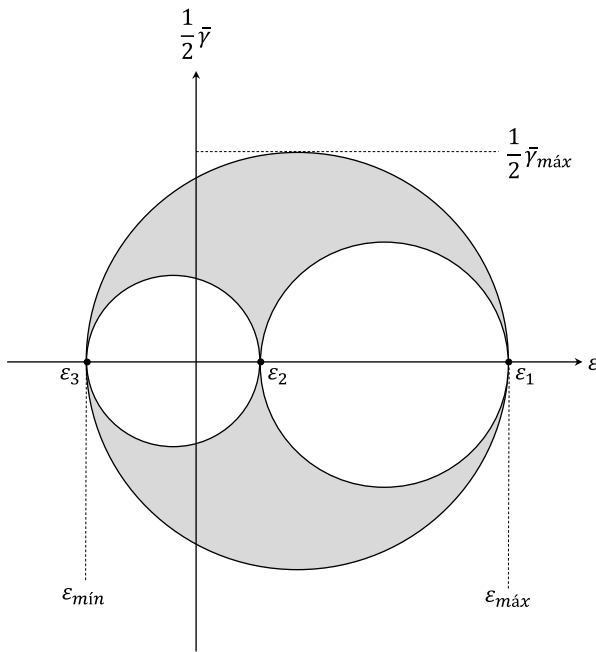
$$\vec{m}_1, \vec{m}_2 \text{ e } \vec{m}_3$$

- A simetria de $[E]$ implica que:

$$\vec{m}_1 \perp \vec{m}_2 \perp \vec{m}_3$$



Círculos de Mohr das deformações



- A simetria de $[E]$ também implica na existência dos *círculos de Mohr* para as deformações
- O menor alongamento é ε_3
- O maior alongamento é ε_1
- A máxima distorção é

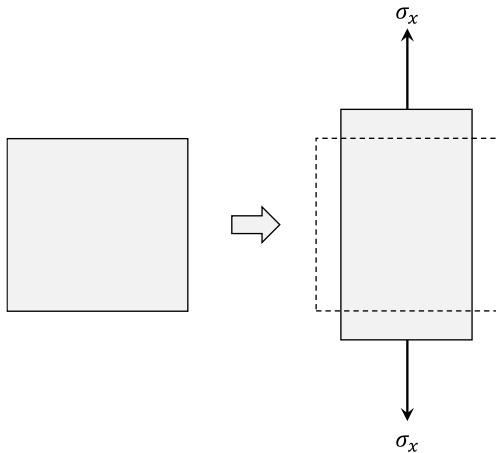
$$\bar{\gamma}_{m\acute{a}x} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

que ocorre entre as direções $\vec{\xi}$ e $\vec{\eta}$ dadas por:

$$\vec{\xi} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{m}_1 + \vec{m}_3) \quad \vec{\eta} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{m}_1 - \vec{m}_3)$$



Lei de Hooke – Alongamentos



- Para material de comportamento *elástico linear*

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad \text{ou} \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x$$

- Nas direções transversais

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \quad \text{e} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x$$

- O *módulo de elasticidade* E e o *coeficiente de Poisson* são propriedades do material

- No estado de tensão completo

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$



Lei de Hooke – Alongamentos

- As equações

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

permitem calcular os
alongamentos em função
das tensões

- Mas esse sistema de equações pode ser invertido, para calcular as tensões a partir das deformações:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)]$$

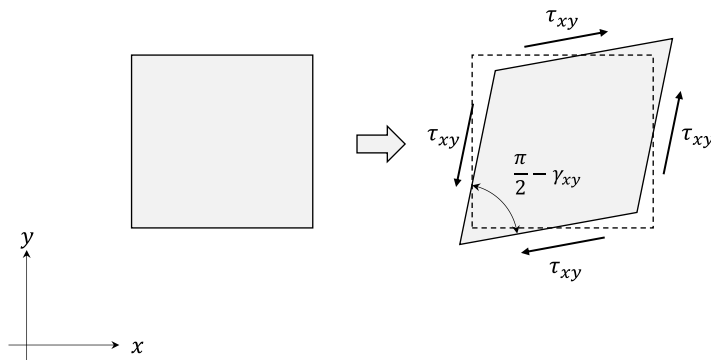
$$\sigma_y = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Lei de Hooke - Distorções



- Para material de comportamento elástico e linear:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

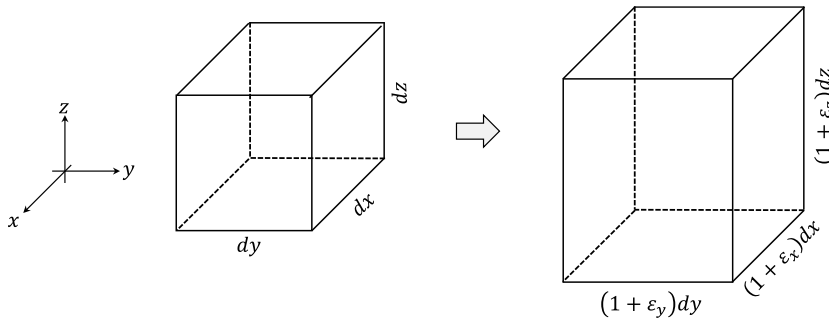
- G é o *módulo de elasticidade ao cisalhamento* ou, simplesmente, *módulo de cisalhamento*

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- Note que, se x , y e z forem direções principais de tensões, pela lei de Hooke também serão direções principais de deformações



Dilatação volumétrica



- Volume inicial

$$V_0 = dxdydz$$

- Volume após a deformação

$$V = (1 + \varepsilon_x)dx(1 + \varepsilon_y)dy(1 + \varepsilon_z)dz$$

- Variação de volume

$$\begin{aligned}\delta V &= V - V_0 \\ &= (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)dxdydz \\ &\quad - dxdydz\end{aligned}$$

- Para pequenas deformações

$$\delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)dxdydz$$

- Deformação por unidade de volume ou *deformação volumétrica*

$$e = \frac{\delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

- Em função das tensões

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

- Note que para $\nu = 0,5$ o material é incompressível



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

Uma placa retangular em tensão biaxial está submetida a tensões normais $\sigma_x = 65 \text{ MPa}$ e $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$. A placa tem dimensões $200 \times 300 \times 15 \text{ mm}$ e é feita de alumínio com $E = 75 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,33$.

- a) Determine a distorção máxima no plano da placa $\gamma_{m\acute{a}x}$
- b) Determine a variação Δt na espessura da placa
- c) Determine a variação ΔV no volume da placa

a)

$$\sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = 955 \mu = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = -553 \mu = \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = -198 \mu = \varepsilon_2$$

$$\gamma_{m\acute{a}x} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = 1508 \mu$$

b)

$$\Delta t = \varepsilon_z t = 2,97 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

c)

$$\delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) a b c = 184 \text{ mm}^3$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Deformações*. Disponível no Moodle

Gere, J.M. & Goodno, B.J. *Mecânica dos Materiais* – 7ª edição – Capítulos 7