



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #09

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

16/09/25



Alongamento em uma dada direção

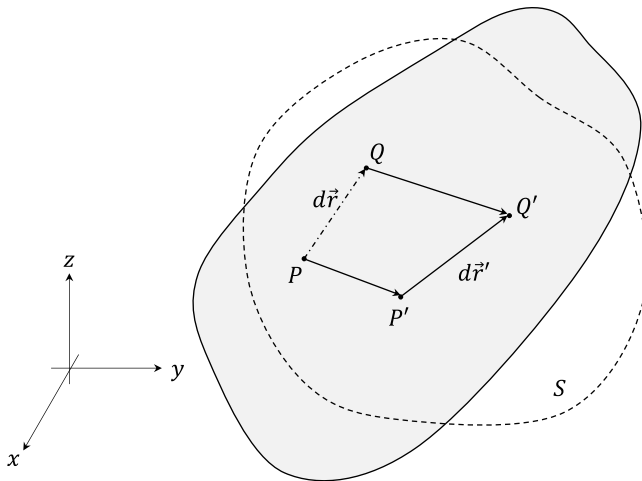
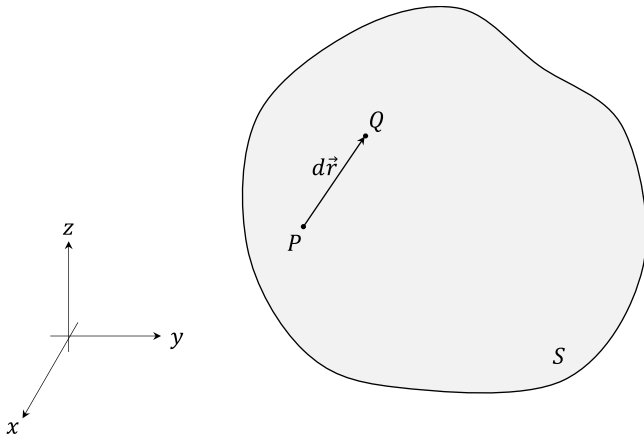
- Seja $\vec{n}$ o versor de $(Q - P)$:

$$(Q - P) = d\vec{r} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{d\vec{r}}{dr} = \begin{Bmatrix} \frac{dx}{dr} \\ \frac{dy}{dr} \\ \frac{dz}{dr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

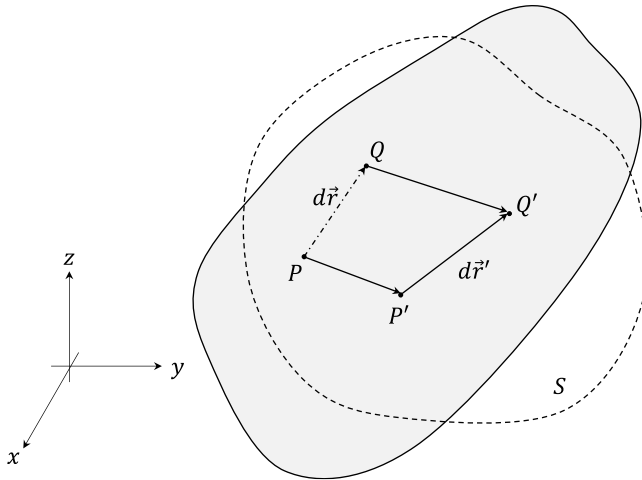
- Sejam u , v e w funções que representam as componentes do deslocamento de um ponto:

$$(P' - P) = \begin{Bmatrix} u(P) \\ v(P) \\ w(P) \end{Bmatrix} \quad (Q' - Q) = \begin{Bmatrix} u(Q) \\ v(Q) \\ w(Q) \end{Bmatrix}$$





Alongamento em uma dada direção



- O ponto P se moveu para uma nova posição P' e o ponto Q se moveu para uma nova posição Q' :

$$d\vec{r}' = (Q' - P') = (Q' - Q) + (Q - P) - (P' - P)$$

$$d\vec{r}' = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(Q) - u(P) \\ v(Q) - v(P) \\ w(Q) - w(P) \end{Bmatrix}$$

- Do cálculo das funções de múltiplas variáveis:

$$u(Q) - u(P) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$v(Q) - v(P) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$w(Q) - w(P) = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$



Alongamento em uma dada direção

- Então:

$$d\vec{r}' = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(Q) - u(P) \\ v(Q) - v(P) \\ w(Q) - w(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

- Definindo-se o alongamento ε com o aumento de um comprimento dividido pelo comprimento inicial, então na direção de $(Q - P)$, ou seja, na direção $\vec{n}$:

$$\varepsilon = \frac{dr' - dr}{dr}$$

$$dr' = (1 + \varepsilon)dr$$

$$dr'^2 = (1 + \varepsilon)^2 dr^2$$

$$dr^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{r}'^2 = d\vec{r}' \cdot d\vec{r}'$$



Alongamento em uma dada direção

- Assim:

$$\begin{aligned} dr'^2 &= \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right)^2 \\ &+ \left(dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right)^2 \\ &+ \left(dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right)^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} (1 + \varepsilon)^2 &= \left[n_x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + n_y \frac{\partial u}{\partial y} + n_z \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 \\ &+ \left[n_x \frac{\partial v}{\partial x} + n_y \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n_z \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 \\ &+ \left[n_x \frac{\partial w}{\partial x} + n_y \frac{\partial w}{\partial y} + n_z \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

$$dr'^2 = (1 + \varepsilon)^2 dr^2 \Rightarrow (1 + \varepsilon)^2 = \frac{dr'^2}{dr^2}$$



Alongamento em uma dada direção

- Para pequenas deformações:

$$(1 + \varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$(1 + \varepsilon)^2 \cong 1 + 2\varepsilon$$

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^2 &= \left[n_x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + n_y \frac{\partial u}{\partial y} + n_z \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 \\ &+ \left[n_x \frac{\partial v}{\partial x} + n_y \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n_z \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 \\ &+ \left[n_x \frac{\partial w}{\partial x} + n_y \frac{\partial w}{\partial y} + n_z \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2\varepsilon &= n_x^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2n_x n_y \frac{\partial u}{\partial y} + 2n_x n_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ &+ 2n_x n_y \frac{\partial v}{\partial x} + n_y^2 \left(1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2n_y n_z \frac{\partial v}{\partial z} \\ &+ 2n_x n_z \frac{\partial w}{\partial x} + 2n_y n_z \frac{\partial w}{\partial y} + n_z^2 \left(1 + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned}$$



Alongamento em uma dada direção

- Como:

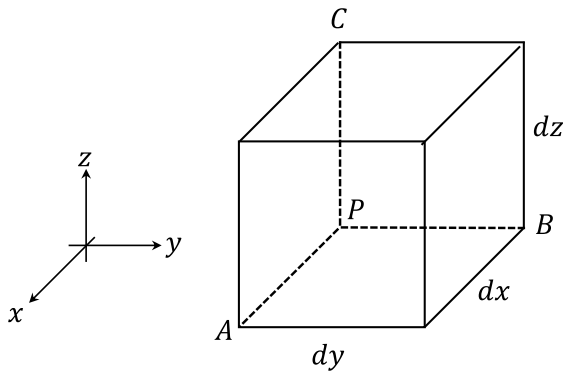
$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

- Então:

$$\varepsilon = n_x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + n_y^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n_z^2 \frac{\partial w}{\partial z} + n_x n_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + n_x n_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + n_y n_z \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$



Componentes da deformação - alongamentos



- Suponhamos que o corpo sofreu um deslocamento na direção de x
- Se o deslocamento de P for u , o deslocamento de A foi:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

- E a variação de comprimento do segmento PA foi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx$$

- Definindo o alongamento como a relação entre a variação do comprimento e o comprimento inicial, temos:

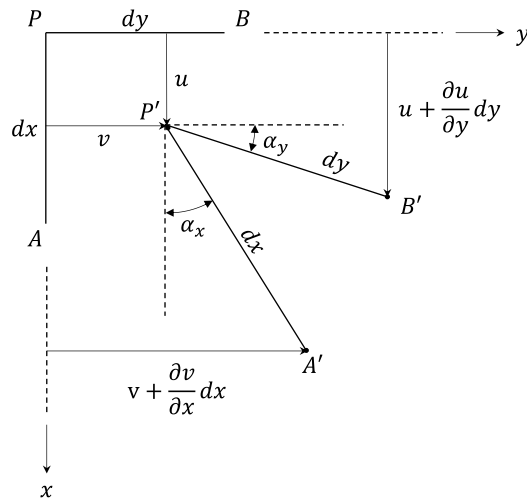
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

- Analogamente:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$



Componentes da deformação - distorções



- Distorção é uma diminuição que sofreu um ângulo inicialmente reto
- Distorção entre as direções x e y :

$$\gamma_{xy} = \alpha_x + \alpha_y$$

- Da figura:

$$\tan \alpha_x = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

- Para pequenos ângulos:

$$\alpha_x = \frac{\partial v}{\partial x}$$

- Analogamente:

$$\alpha_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

- Portanto:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

- De maneira semelhante:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{e} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$



Alongamento em uma dada direção

$$\varepsilon = n_x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + n_y^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n_z^2 \frac{\partial w}{\partial z} + n_x n_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + n_x n_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + n_y n_z \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 + \varepsilon_z n_z^2 + \gamma_{xy} n_x n_y + \gamma_{xz} n_x n_z + \gamma_{yz} n_y n_z$$

$$\varepsilon(\vec{n}) = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon(\vec{n}) = E[\vec{n}] \cdot \vec{n}$$

- $[E] \rightarrow$ *Tensor das Pequenas Deformações*



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício:

Dado o tensor das pequenas deformações, em relação a um sistema xyz :

$$[E] = \frac{\sigma_o}{E} \begin{bmatrix} 1 & 1 + \nu & 0 \\ 1 + \nu & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_o}{E} [\cos^2 \theta - \nu \cdot \sin^2 \theta + (1 + \nu) \sin(2\theta)]$$

calcular o alongamento na direção:

$$\vec{n} = \{\cos \theta, \sin \theta, 0\}^t$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Deformações*. Disponível no Moodle