



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

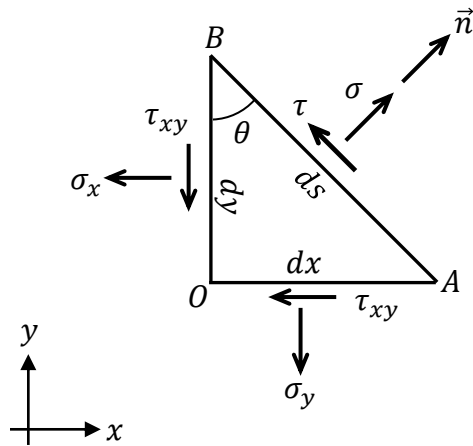
Aula #06

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

20/08/2025



Estado plano de tensões



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\rho} = T[\vec{n}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

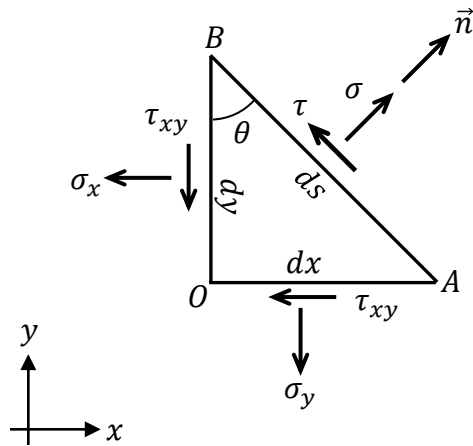
$$\tau \vec{t} = \vec{\rho} - \sigma \vec{n}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tau = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$



Estado plano de tensões



$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

- Vamos supor que x e y sejam direções principais

$$\sigma'_1 = \sigma_x \quad \sigma'_2 = \sigma_y \quad \tau_{xy} = 0 \quad (\sigma'_1 > \sigma'_2)$$

(agora θ é o ângulo que $\vec{n}$ forma com $\vec{n}'_1$)

então:

$$\sigma = \sigma'_1 \cos^2 \theta + \sigma'_2 \sin^2 \theta$$

e:

$$\tau(\theta) = -(\sigma'_1 - \sigma'_2) \sin \theta \cos \theta$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Usando as relações trigonométricas:

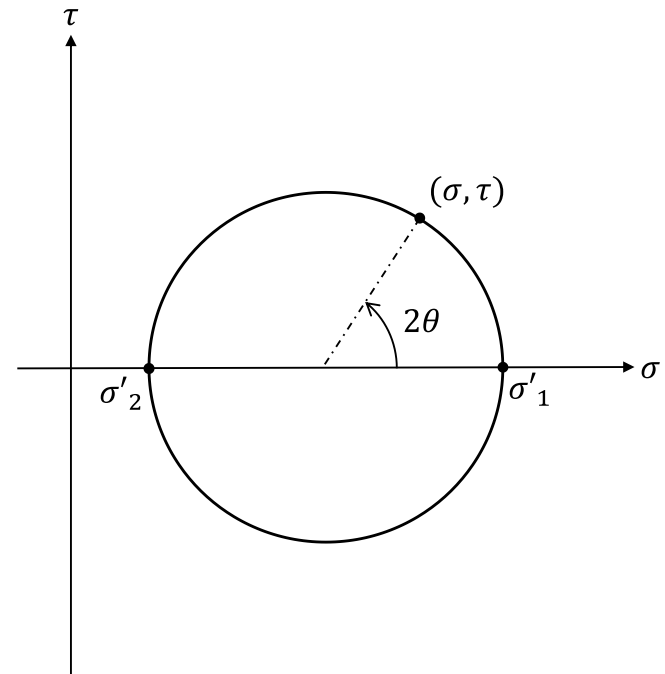
$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\sigma = \sigma'_1 \cos^2 \theta + \sigma'_2 \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow \sigma(\theta) = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2}{2} + \frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{2} \cos 2\theta$$

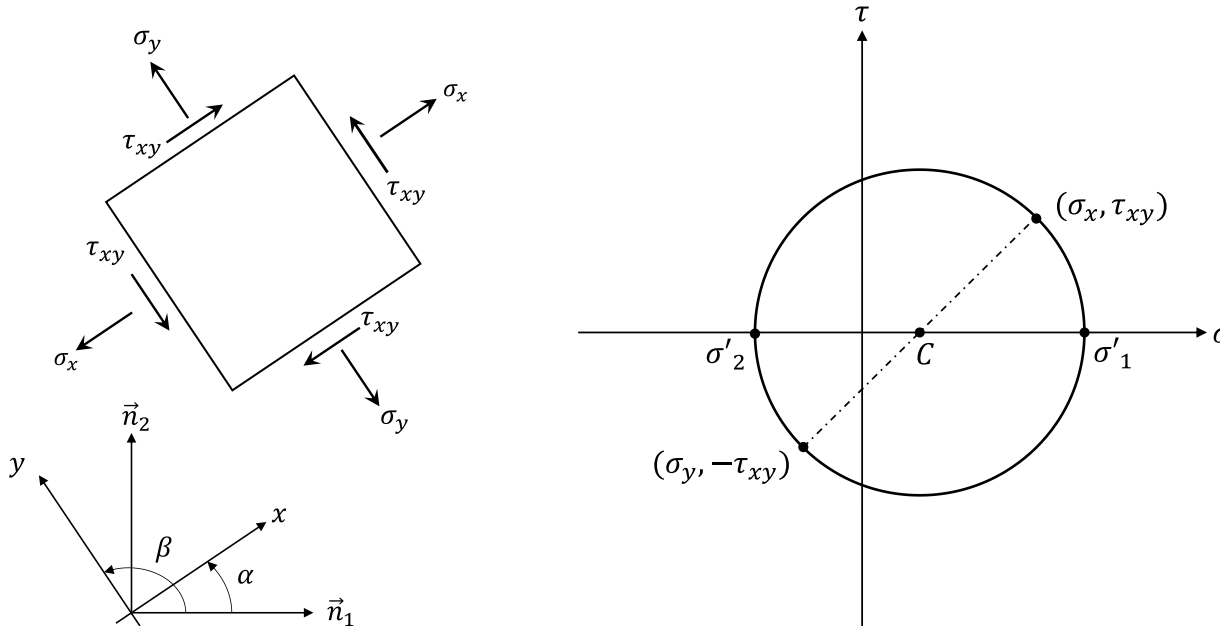
$$\tau = -(\sigma'_1 - \sigma'_2) \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \tau(\theta) = \frac{(\sigma'_1 - \sigma'_2)}{2} \sin 2\theta$$





Círculo de Mohr – método gráfico



$$C = \left(\frac{\sigma'_1 + \sigma'_2}{2}, 0 \right) \\ = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

$$\beta = \alpha + 90^\circ$$

- Note que o sinal da tensão de cisalhamento no círculo de Mohr é diferente do sinal do Timoshenko!
- Sentido anti-horário $\Rightarrow \tau > 0$

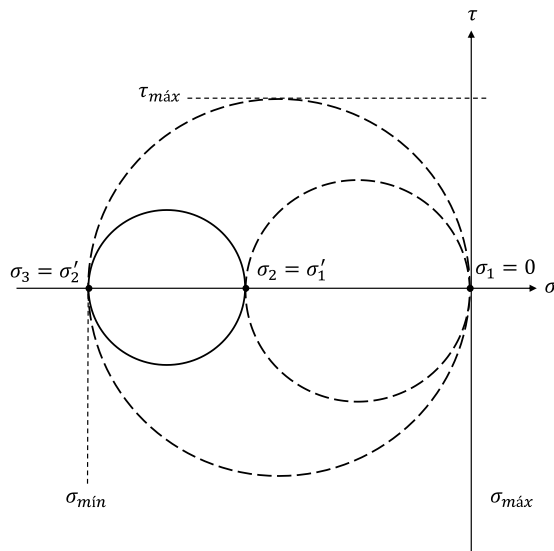


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

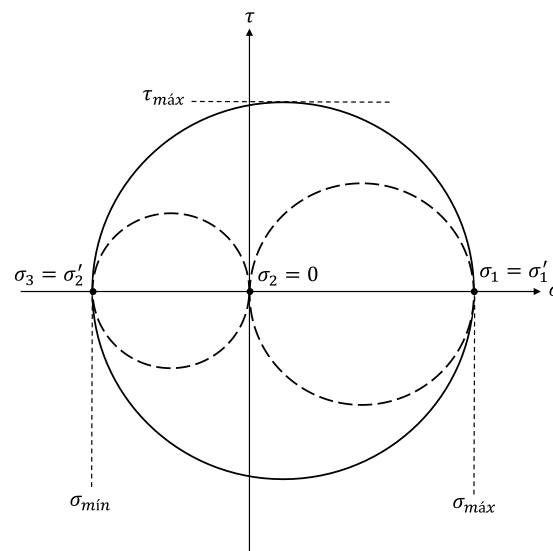
Nota: Os círculos de Mohr completos são facilmente construídos lembrando que a outra tensão principal é nula.

Vai depender dos sinais das tensões principais no plano

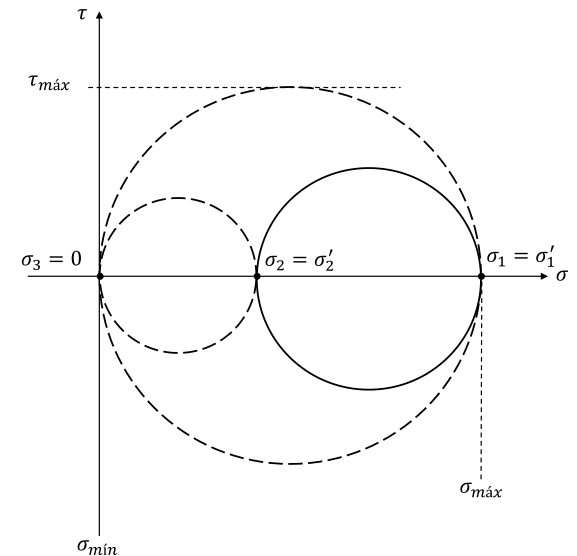
$$\sigma'_2 < \sigma'_1 < 0$$



$$\sigma'_2 < 0 < \sigma'_1$$



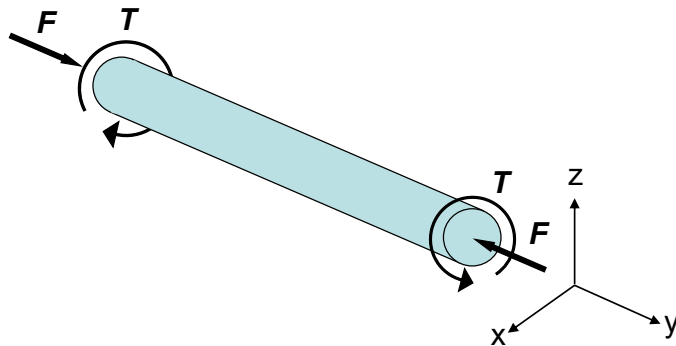
$$0 < \sigma'_2 < \sigma'_1$$





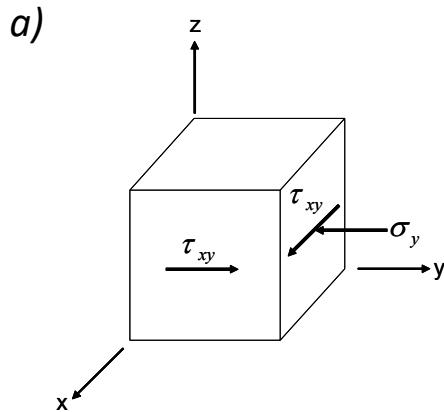
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício 7



O eixo homogêneo da figura tem diâmetro d e está submetido a uma força axial F e a um momento de torção T . Pedem-se:

- as tensões em um ponto da superfície do eixo representadas em um elemento orientado segundo os eixos indicados;
- o tensor das tensões no mesmo ponto;
- as tensões principais;
- a máxima tensão normal de tração;
- a máxima tensão normal de compressão;
- a máxima tensão de cisalhamento.



$$\sigma_y = -\frac{F}{A} \Rightarrow \sigma_y = -\frac{4F}{\pi d^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T d}{I_P 2}$$

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

b)

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{16T}{\pi d^3} & 0 \\ \frac{16T}{\pi d^3} & -\frac{4F}{\pi d^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

c)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{16T}{\pi d^3} & 0 \\ \frac{16T}{\pi d^3} & -\frac{4F}{\pi d^2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda \left(\lambda^2 + \frac{4F}{\pi d^2} \lambda - \frac{256T^2}{\pi^2 d^6} \right) = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{2}{\pi d^2} \left(-F + \sqrt{F^2 + 64 \frac{T^2}{d^2}} \right) \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\frac{2}{\pi d^2} \left(F + \sqrt{F^2 + 64 \frac{T^2}{d^2}} \right)$$

d)

$$\sigma_{\text{máx, tração}} = \sigma_1 = \frac{2}{\pi d^2} \left(-F + \sqrt{F^2 + 64 \frac{T^2}{d^2}} \right)$$

e)

$$\sigma_{\text{máx, compressão}} = |\sigma_3| = \frac{2}{\pi d^2} \left(F + \sqrt{F^2 + 64 \frac{T^2}{d^2}} \right)$$

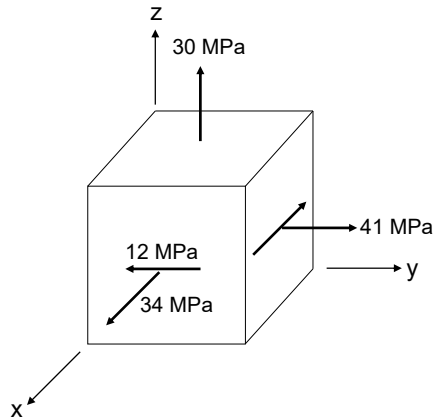
f)

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{2}{\pi d^2} \sqrt{F^2 + 64 \frac{T^2}{d^2}}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício 5



O cubo elementar da figura representa o estado de tensões em um ponto P de uma estrutura. A tensão de escoamento do material dessa estrutura é de 150MPa em tração e de 50MPa em cisalhamento. Seu limite de resistência à compressão é de 100MPa. Pede-se:

- determinar qual é o fator de segurança nesse ponto;
- calcular as direções normais aos planos em que ocorre o valor máximo da tensão de cisalhamento.

$$a) \quad [T] = \begin{bmatrix} 34 & -12 & 0 \\ -12 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 50 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 30 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 25 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$FS_t = \frac{150}{\sigma_1} = \frac{150}{50} = 3 \quad FS_\tau = \frac{50}{\tau_{max}} = \frac{50}{12,5} = 4$$

$$FS = \min\{FS_t, FS_\tau\} = \min\{3, 4\} = 3$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

b) Os planos em que ocorrem as tensões de cisalhamento máximas são ortogonais a $\vec{n}_2$ e suas normais formam ângulo de 45° com as direções $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_3$:

$$\vec{n} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{n}_1 \pm \vec{n}_3)$$

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0 \right) \quad \vec{n}_2 = (0, 0, 1) \quad \vec{n}_3 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right)$$

$$\vec{n} = \pm \frac{\sqrt{2}}{10} (7, -1, 0)$$

$$\vec{n} = \pm \frac{\sqrt{2}}{10} (1, 7, 0)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Tensões*. Disponível no Moodle