***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***
***Departamento de Engenharia Mecânica***

# *PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II*

*Aula #05*

*Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins*

*19/08/2025*

## *Círculos de Mohr*

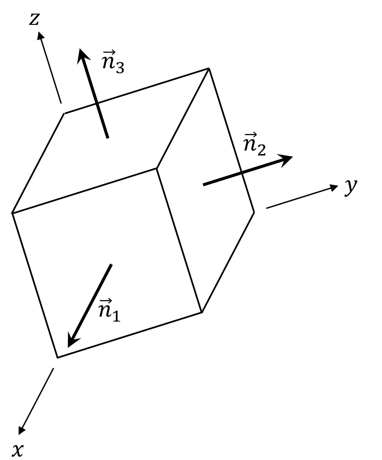
- Sabemos calcular a tensão $\vec{\rho}$ em um ponto $P$ associada a uma direção $\vec{n}$:

$$\vec{\rho} = T[\vec{n}] \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

- Perguntas da Mecânica dos Sólidos:
  - Qual é a tensão normal máxima?
  - Qual é a tensão normal mínima?
  - Qual é a tensão de cisalhamento máxima?

- Para responder a estas perguntas, vamos determinar qual é o lugar geométrico que representa o campo de tensões em um ponto $P$

- Sistema de eixos coincidindo com as direções principais:




$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\rho} = \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_x \\ \sigma_2 n_y \\ \sigma_3 n_z \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2 \quad (1)$$

$$\rho^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

$$\sigma_1^2 n_x^2 + \sigma_2^2 n_y^2 + \sigma_3^2 n_z^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2)$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (3)$$

- (1), (2) e (3) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma^2 + \tau^2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- É um sistema de três equações algébricas a três incógnitas $n_x^2$, $n_y^2$ e $n_z^2$

- Obviamente essas incógnitas têm que ter valores positivos ou nulos!

- Solução do sistema

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma^2 + \tau^2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- Vamos supor que as três tensões principais sejam distintas, ou seja,

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$n_x^2 = \frac{(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \geq 0 \quad \Rightarrow (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \geq 0 \quad (1)$$

$$n_y^2 = \frac{(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \geq 0 \quad \Rightarrow (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2 \leq 0 \quad (2)$$

$$n_z^2 = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \geq 0 \quad \Rightarrow (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 \geq 0 \quad (3)$$

- O lugar geométrico dos pares $(\sigma, \tau)$ possíveis tem que satisfazer, simultaneamente, as inequações (1), (2) e (3)

- Inequação (1)

$$(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \geq 0 \Rightarrow \left[\sigma - \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)\right]^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

é a região externa ao círculo de centro

$$C_1 = \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)$$

e raio

$$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

incluindo a sua borda

- Inequação (2)

$$(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2 \leq 0 \Rightarrow \left[\sigma - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)\right]^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

é o círculo de centro

$$C_2 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right)$$

e raio

$$R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

- Inequação (3)

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 \geq 0 \Rightarrow \left[\sigma - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)\right]^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

é a região externa ao círculo de centro

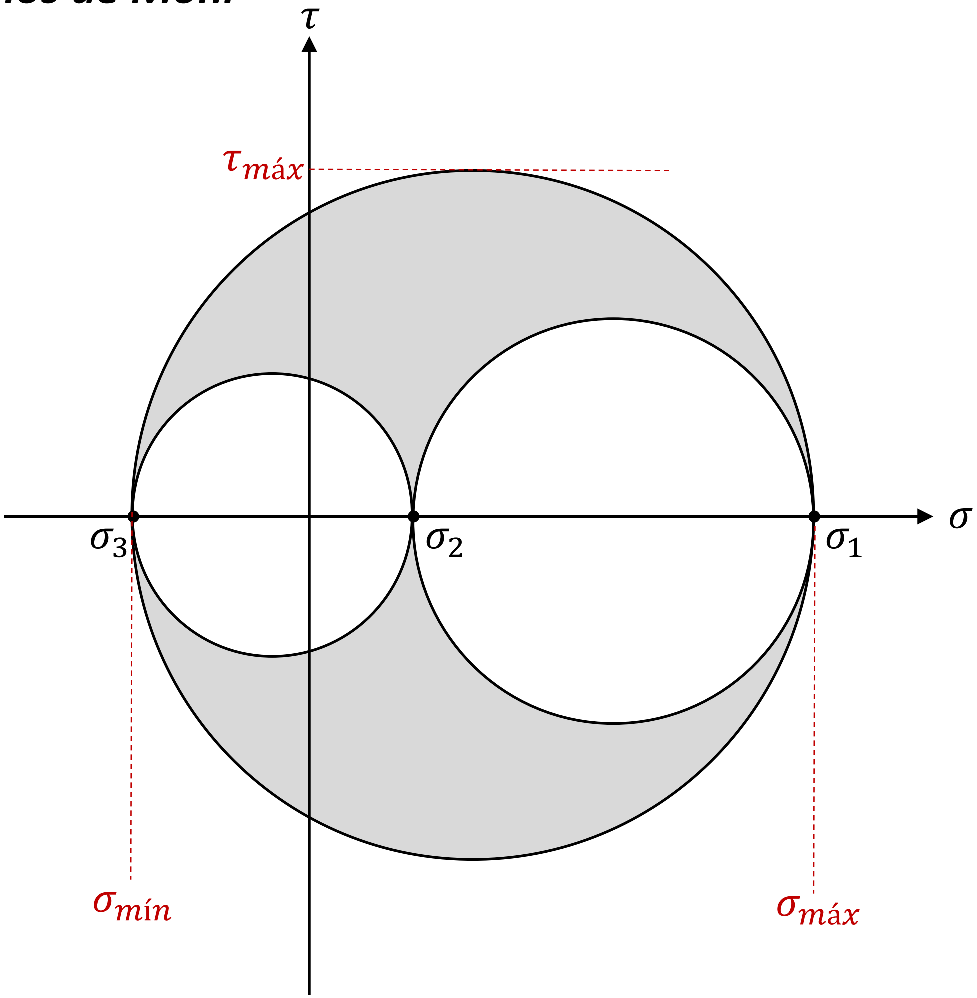
$$C_3 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$$

e raio

$$R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

incluindo a sua borda

## *Círculos de Mohr*




$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

ocorre para

$$\vec{n} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{n}_1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{n}_3$$

Para mostrar em que direções ocorrem as tensões de cisalhamento máximas, posso resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma^2 + \tau^2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{com} \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\sigma_1\, n_x^2 + \sigma_2\, n_y^2 + \sigma_3\, n_z^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

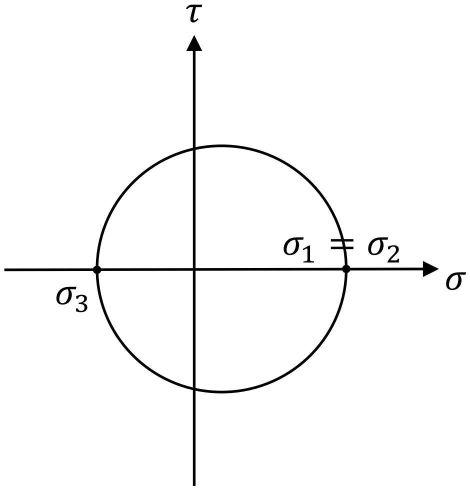
$$\sigma_1^2\, n_x^2 + \sigma_2^2\, n_y^2 + \sigma_3^2\, n_z^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}{2}$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

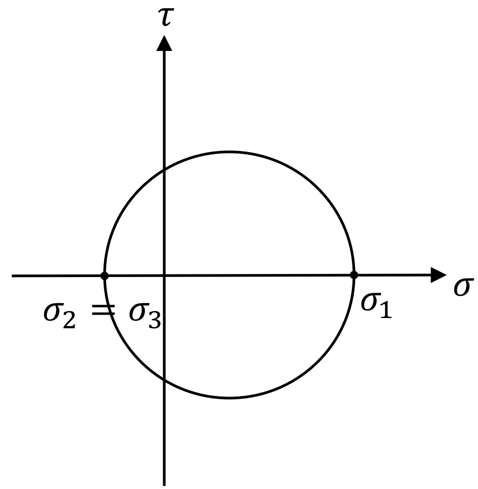
Substituindo: $n_x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad n_y = 0 \quad n_z = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

verificamos que essa é a solução do sistema

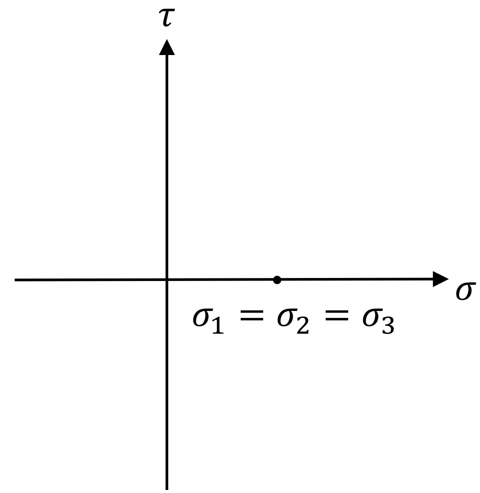
## *Casos especiais*




$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$



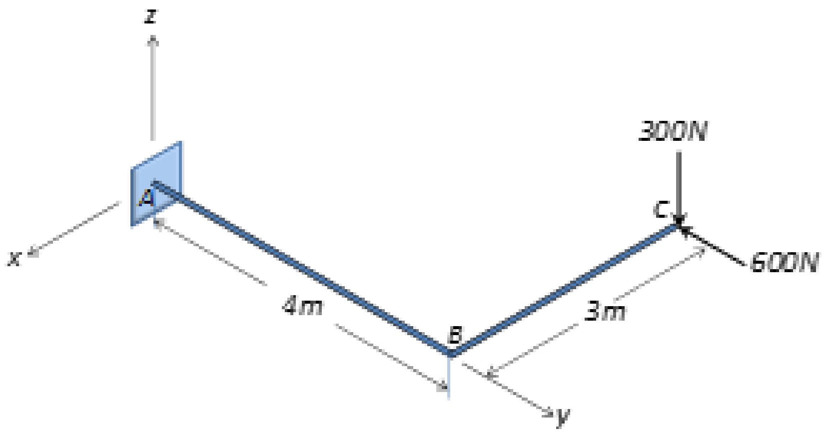

$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$

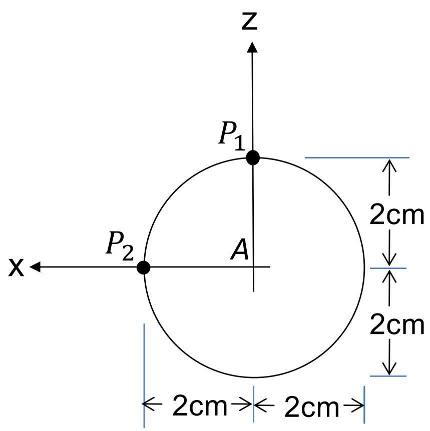


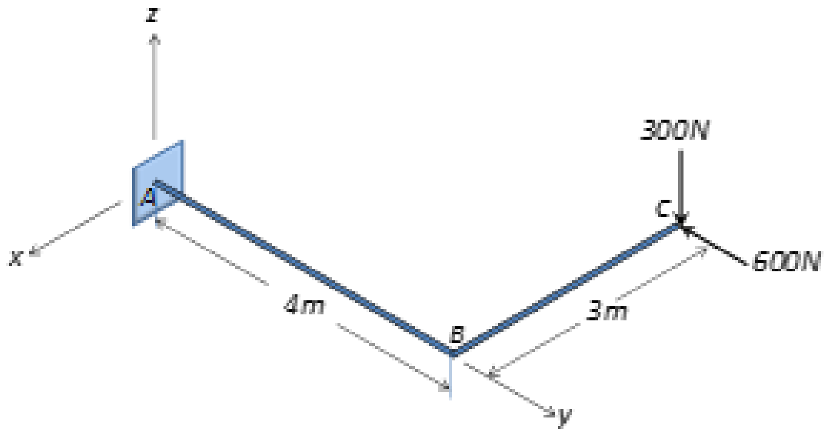

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

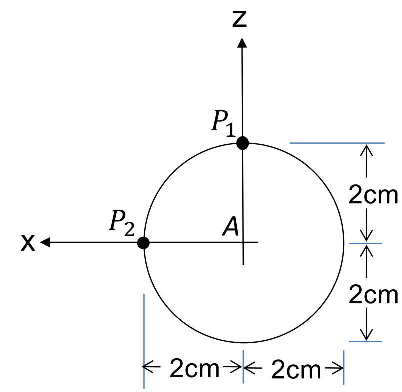
Estado Hidrostático

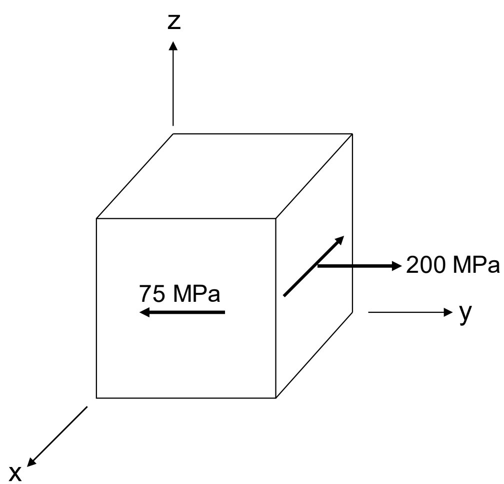
**Exercício** *A viga ABC da figura é horizontal. O trecho BC forma um ângulo de 90° com o trecho AB. A viga é prismática, tem seção circular com 2cm de raio e tem as dimensões indicadas na figura. Na sua extremidade C estão aplicadas duas forças com os sentidos indicados: uma força vertical de magnitude 300N e outra, horizontal, paralela ao trecho AB e de magnitude 600N. Pede-se determinar o estado de tensão nos pontos* $P_1$ *e* $P_2$ *da seção A cujas posições estão indicadas na figura. As tensões devidas à força normal e à força cortante podem ser desprezadas, por serem pequenas. Adotar a aproximação* $\pi = 3$.

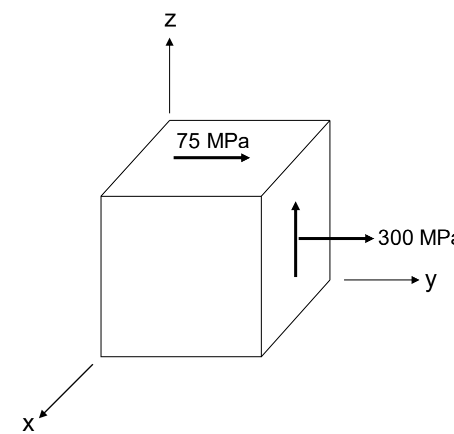


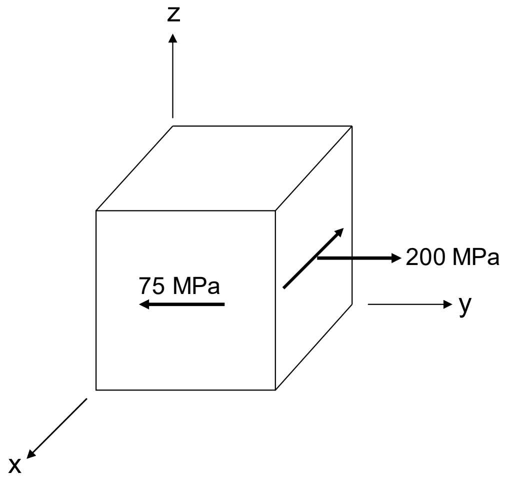

z
300N
A
C
x
600N
4m
3m
B
y


z
$P_1$
$P_2$
A
x
2cm
2cm
2cm
2cm


z
200 MPa
75 MPa
y
x


z
75 MPa
300 MPa
y
x

*Calcular, para os dois pontos as tensões máximas de compressão, tração e cisalhamento*




$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -75 & 0 \\ -75 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 225\, MPa$$

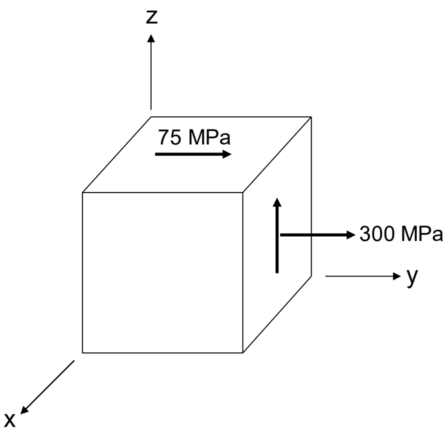
$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -25\, MPa$$

Tensão de tração máxima: 225 MPa

Tensão de compressão máxima: 25 MPa

Tensão de cisalhamento máxima: 125 MPa




$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 75 \\ 0 & 75 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 317{,}7\ MPa$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -17{,}7\ MPa$$

Tensão de tração máxima: 317,7 MPa

Tensão de compressão máxima: 17,7 MPa

Tensão de cisalhamento máxima: 167,7 MPa

## Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Tensões.* Disponível no Moodle