



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

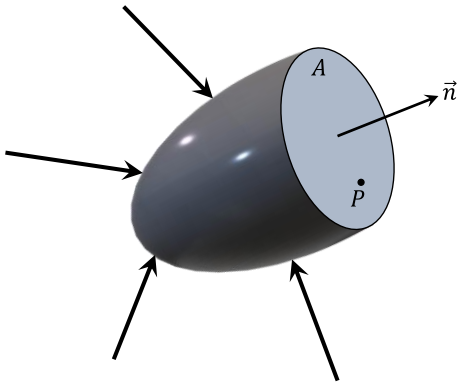
Aula #04

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

13/08/2025



Tensões e direções principais



Definições:

- Se a tensão de cisalhamento em um plano que passa por P é nula, este plano é chamado de ***plano principal de tensão***
- A normal a um plano principal é chamada de ***direção principal***
- A tensão normal que atua em um plano principal é chamada de ***tensão principal***

Perguntas:

- Para que servem as direções e as tensões principais?
- Como se calculam as direções e as tensões principais?



Tensões e direções principais

$$\vec{\rho} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} \quad \tau = 0 \Rightarrow \vec{\rho} = \sigma \vec{n} \Rightarrow \vec{\rho} - \sigma \vec{n} = \vec{0}$$

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} - \sigma \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} - \sigma \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- É um sistema com três equações algébricas lineares e três incógnitas n_x , n_y e n_z
- Este sistema tem uma *solução trivial*:

$$n_x = n_y = n_z = 0$$

- Essa solução não tem significado geométrico pois $\vec{n}$ é um *versor*, ou seja:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Para que o sistema de equações algébricas lineares admita mais de uma solução é necessário que:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

- Este determinante pode ser expandido algebricamente, resultando na equação polinomial de terceiro grau, conhecida como *equação característica*,

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

onde:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$I_3 = |T|$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Como $[T]$ é uma matriz simétrica, a *Álgebra Linear* mostra que a equação característica tem sempre três raízes *reais* σ_1 , σ_2 e σ_3 que podem, ou não, ser distintas
- Essas raízes são as *tensões principais* que correspondem aos *autovalores* de $[T]$

- Convenciona-se, universalmente:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

- Os *autovetores* $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$ correspondentes são as *direções principais*
- Lembre-se, da Álgebra Linear, que

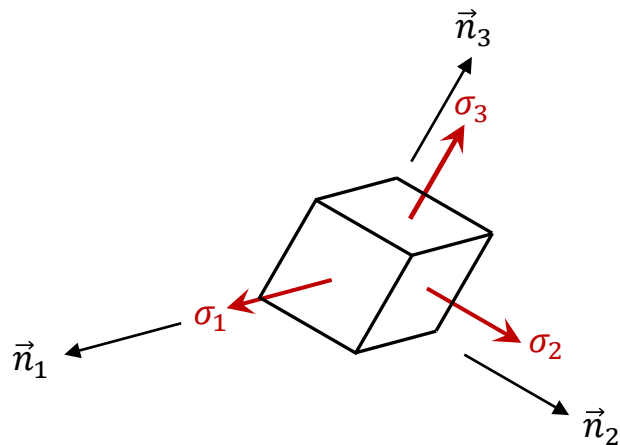
$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \perp \vec{n}_3$$

- Mostra-se, com um certo trabalho algébrico, que os coeficientes I_1 , I_2 e I_3 da equação da equação característica são *invariantes*, ou seja, independem da orientação que foi dada ao sistema de eixos



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Se o sistema de eixos coincidir com as direções principais:



- Nesse caso $[T]$ ficará diagonal:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

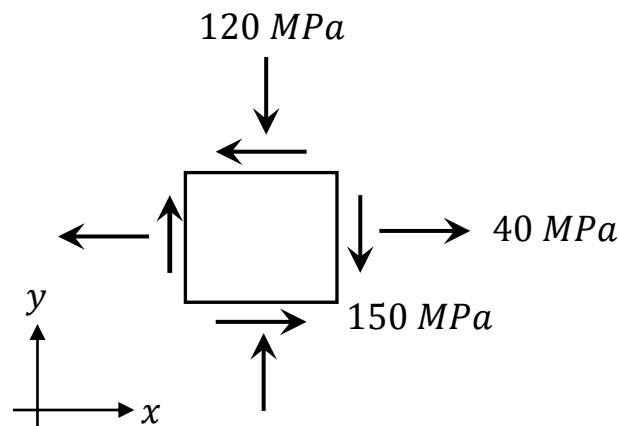
- Como I_1 é invariante teremos:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício: *Dado o estado de tensão indicado, determinar as tensões e as direções principais*



- Tensor das tensões:

$$[T] = \begin{bmatrix} 40 & -150 & 0 \\ -150 & -120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Equação característica:

$$\sigma(\sigma^2 + 80\sigma - 27300) = 0$$

- Tensões principais:

$$\sigma_1 = 130 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -210 \text{ MPa}$$

- Direções principais

$$\vec{n}_1 = (0,86, -0,51, 0)$$

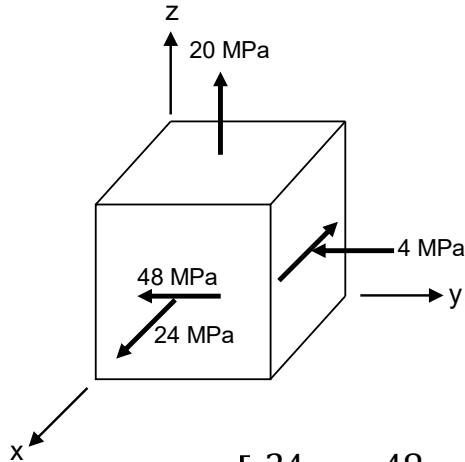
$$\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$$

$$\vec{n}_3 = (-0,51, -0,86, 0)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício



O cubo elementar da figura representa o estado de tensões em um ponto P de um corpo. Pede-se, para esse ponto:

a) montar a matriz T que representa o tensor das tensões;

b) calcular as tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 ;

c) calcular as direções principais $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$.

a)
$$[T] = \begin{bmatrix} 24 & -48 & 0 \\ -48 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} MPa$$

b) $\sigma_1 = 60 MPa; \quad \sigma_2 = 20 MPa; \quad \sigma_3 = -40 MPa$

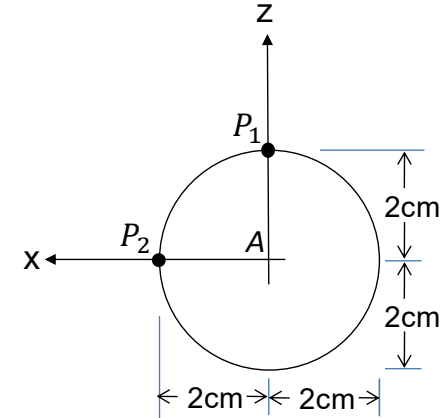
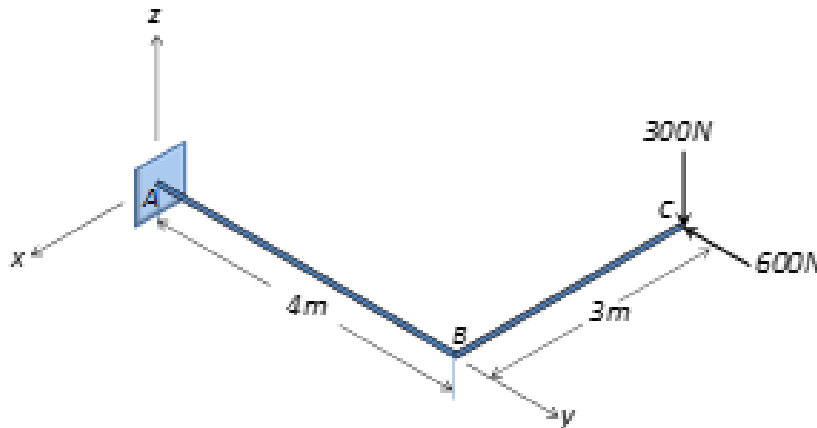
c) $\vec{n}_1 = (-0,8; 0,6; 0); \quad \vec{n}_2 = (0; 0; 1); \quad \vec{n}_3 = (0,6; 0,8; 0)$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

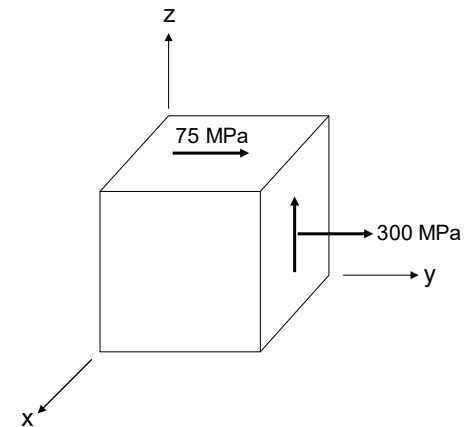
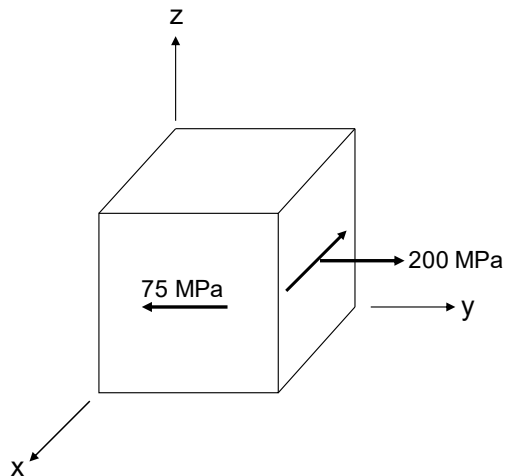
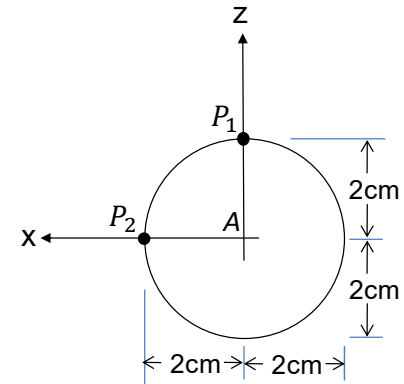
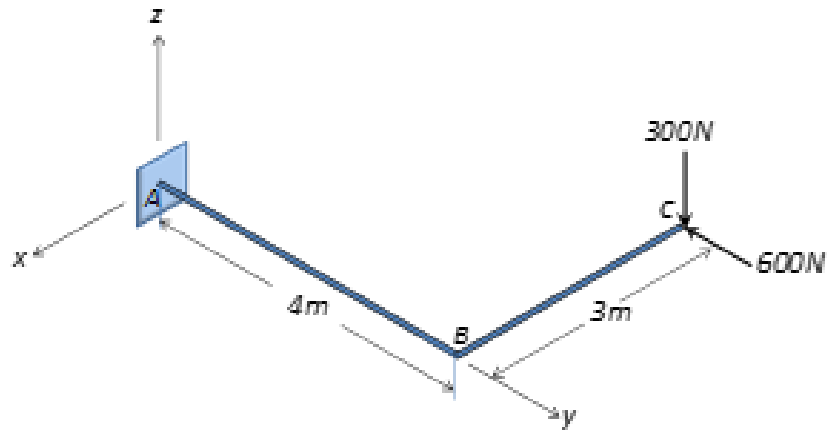
Exercício

A viga ABC da figura é horizontal. O trecho BC forma um ângulo de 90° com o trecho AB. A viga é prismática, tem seção circular com 2cm de raio e tem as dimensões indicadas na figura. Na sua extremidade C estão aplicadas duas forças com os sentidos indicados: uma força vertical de magnitude 300N e outra, horizontal, paralela ao trecho AB e de magnitude 600N. Pede-se determinar o estado de tensão nos pontos P_1 e P_2 da seção A cujas posições estão indicadas na figura. As tensões devidas à força normal e à força cortante podem ser desprezadas, por serem pequenas. Adotar a aproximação $\pi = 3$.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Tensões*. Disponível no Moodle