



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #02

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

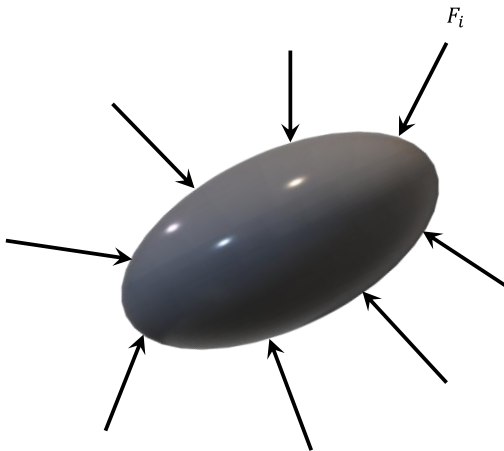
06/08/2025



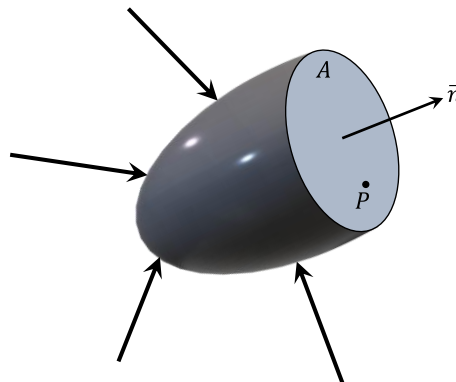
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Esforços internos

Sólido genérico submetido a um conjunto de forças F_i equilibrado



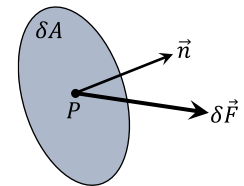
Sólido genérico cortado por um plano α que passa por um ponto P e é normal a $\vec{n}$



Devem aparecer forças na superfície A para equilibrar os esforços externos

Estas forças são chamadas de *forças internas*

Um elemento da superfície A com área infinitesimal δA , que contém P estará sujeito à força interna $\delta \vec{F}$



$$\delta \vec{F} = \delta \vec{F}(P, \vec{n})$$

O vetor $\delta \vec{F}$ pode ser decomposto em duas componentes:

$$\delta \vec{F} = \delta F_n \vec{n} + \delta F_t \vec{t}$$

onde $\vec{t}$ é um vetor paralelo a α



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tensão

Definição: o vetor tensão que atua em P no plano perpendicular a $\vec{n}$ é o vetor:

$$\vec{\rho}(P, \vec{n}) = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}(P, \vec{n})}{\delta A}$$

A tensão $\vec{\rho}$ é uma propriedade do ponto P e da direção $\vec{n}$

A tensão $\vec{\rho}$ tem dimensão de força por unidade de área (MPa)

Para conhecer o **estado de tensões** em um ponto P é necessário conhecer as tensões $\vec{\rho}$ em todas as direções $\vec{n}$

Como a força interna, a tensão $\vec{\rho}$ pode ser decomposta em duas componentes:

$$\vec{\rho} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$

onde

$$\sigma = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_n}{\delta A}$$

é a **tensão normal**

e

$$\tau = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_t}{\delta A}$$

é a **tensão de cisalhamento**

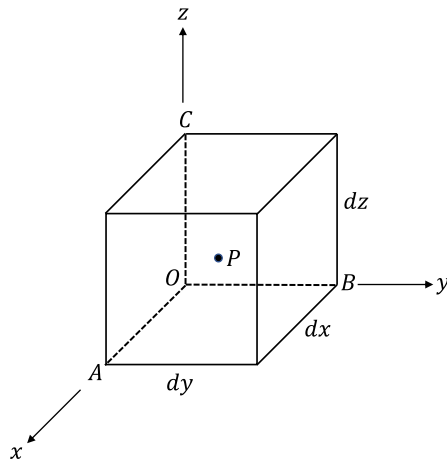


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Estado de tensões

O estado de tensões em um ponto P é o conjunto dos infinitos vetores $\vec{\rho}(P, \vec{n})$

O estado de tensões em um ponto P é representado por um cubo infinitesimal



As faces desse cubo estarão sujeitas a tensões normais e tensões de cisalhamento

Vamos mostrar, mais tarde, que se conhecermos as tensões nessas faces do cubo, conheceremos todo o estado de tensões no ponto P

Para representar a tensão em uma face do cubo precisamos de uma tensão normal e duas componentes de tensão de cisalhamento

Precisaremos, então, de 18 números para representar as tensões nas faces do cubo

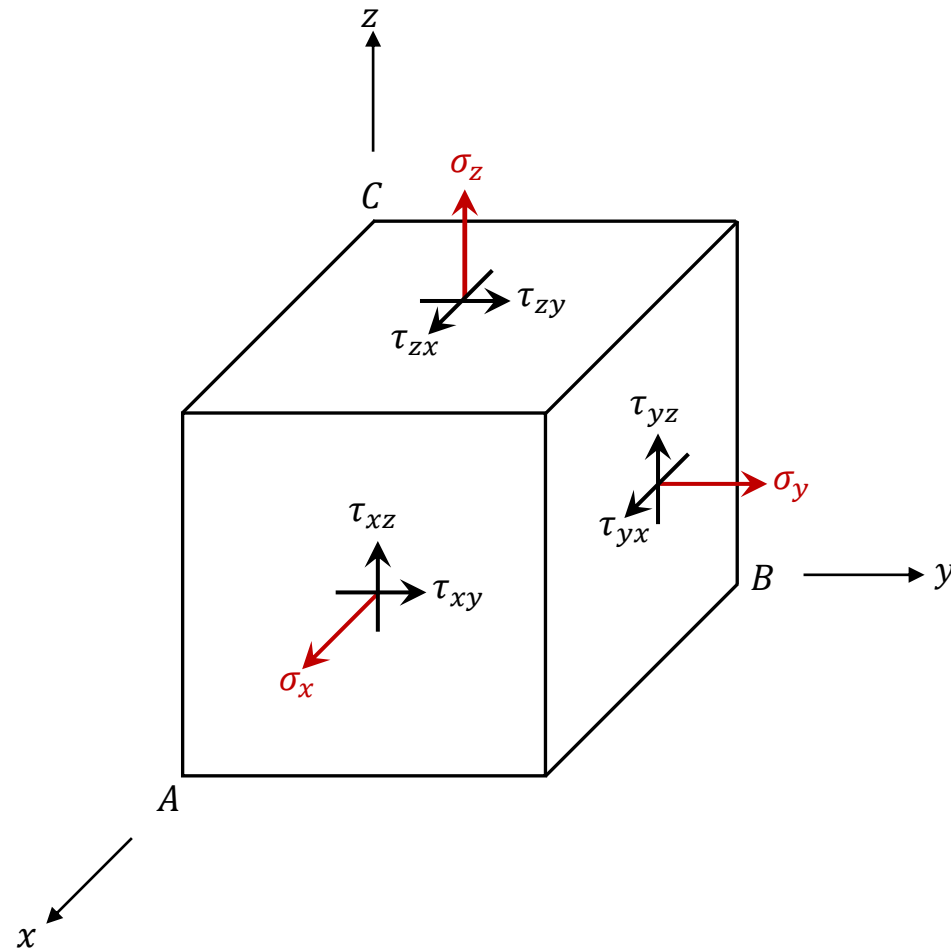
É necessário estabelecer, então, uma notação para representar as tensões que atuam em cada face do cubo



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Notação de Timoshenko

- Faces positivas
- Sentidos positivos

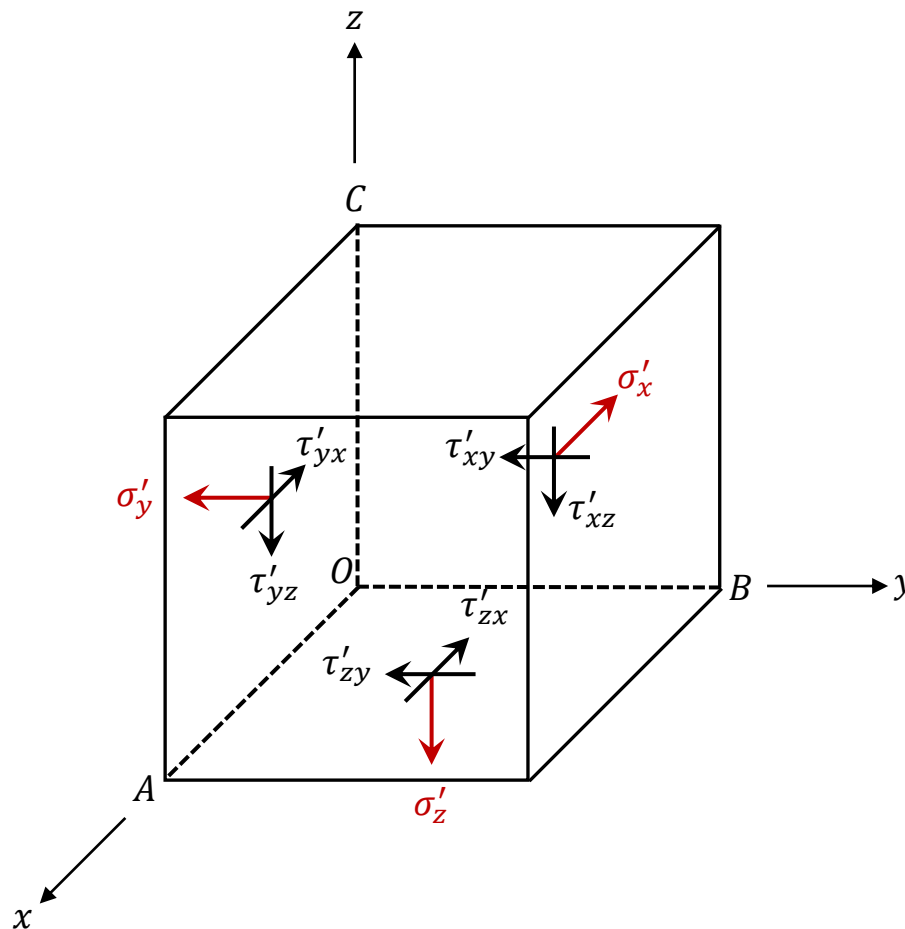




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Notação de Timoshenko

- Faces negativas
- Sentidos positivos

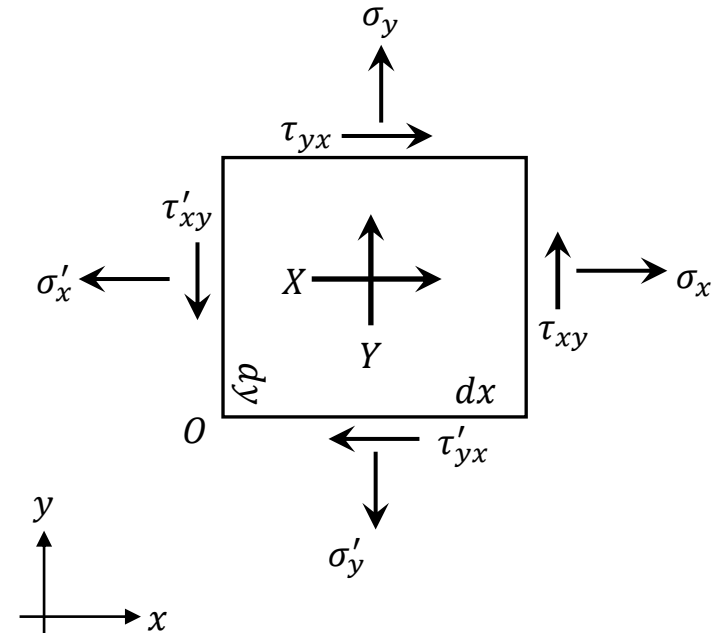
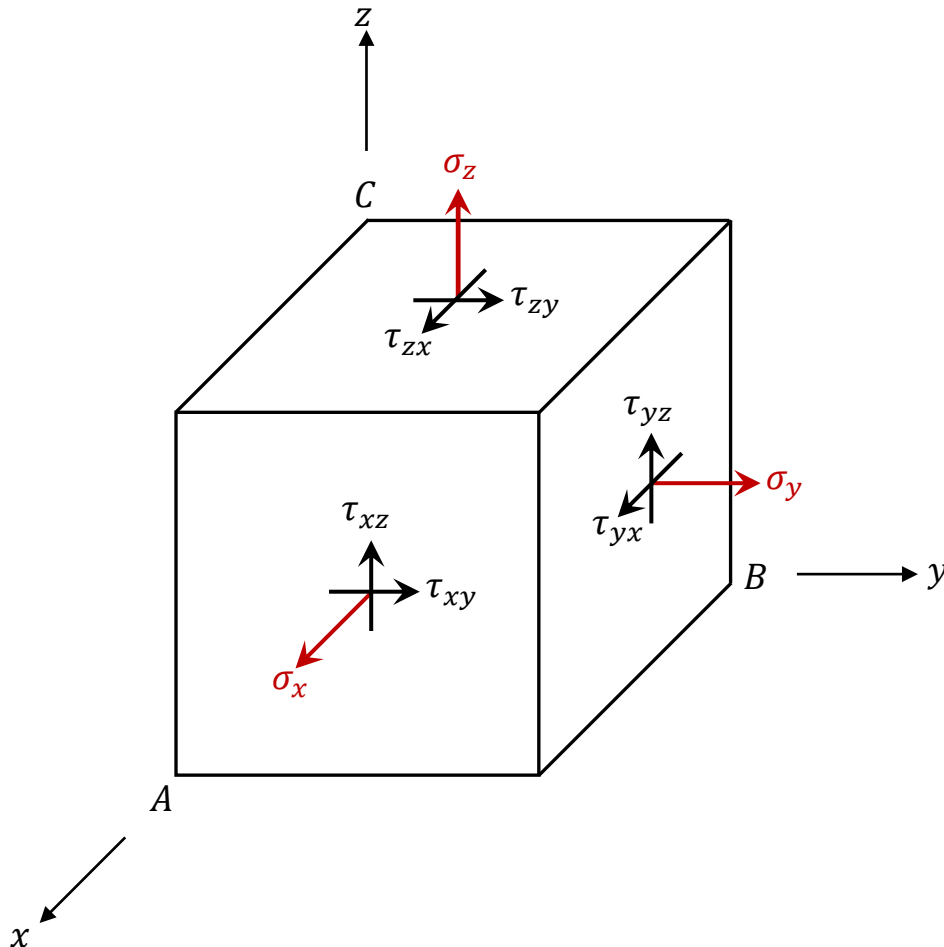




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Estado plano de tensão

Vamos supor que não haja esforços na direção z

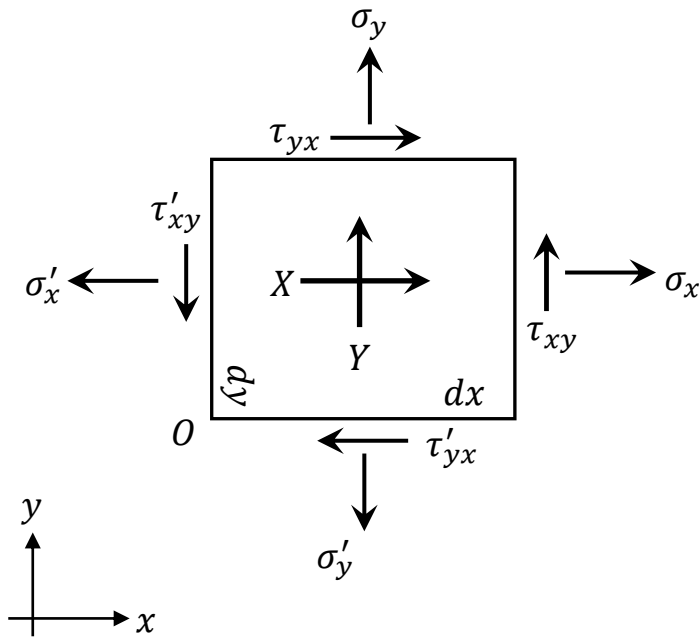


- 8 componentes de tensão

- X e $Y \rightarrow$ forças de campo



Equilíbrio



Equilíbrio de forças na direção x :

$$-\sigma'_x dydz + \sigma_x dydz + \tau_{yx} dx dz - \tau'_{yx} dx dz + X dx dy dz = 0$$

Dividindo-se por dz :

$$-\sigma'_x dy + \sigma_x dy + \tau_{yx} dx - \tau'_{yx} dx + X dx dy = 0$$

Fazendo-se $dy \rightarrow 0$:

$$\tau'_{yx} = \tau_{yx}$$

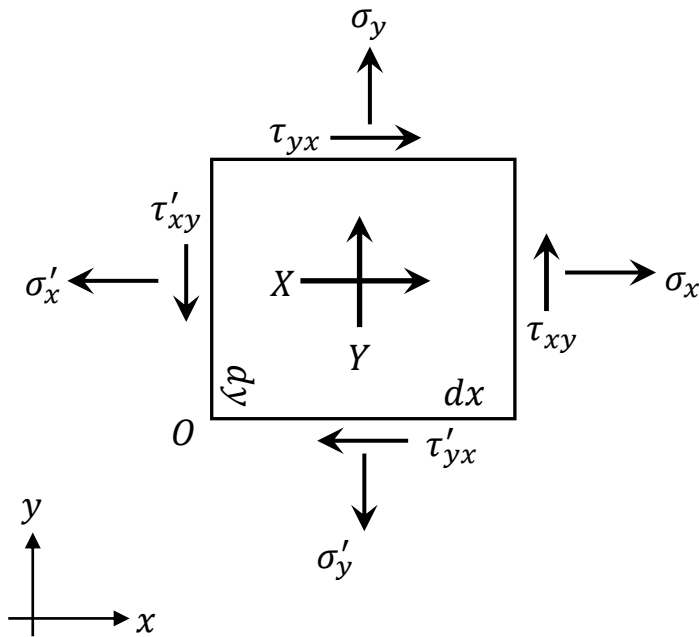
Fazendo-se $dx \rightarrow 0$:

$$\sigma'_x = \sigma_x$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Equilíbrio



Equilíbrio de forças na direção y:

$$-\tau'_{xy}dydz + \tau_{xy}dydz + \sigma_y dxdz - \sigma'_y dxdz + Ydxdydz = 0$$

Dividindo-se por dz :

$$-\tau'_{xy}dy + \tau_{xy}dy + \sigma_y dx - \sigma'_y dx + Ydxdy = 0$$

Fazendo-se $dy \rightarrow 0$:

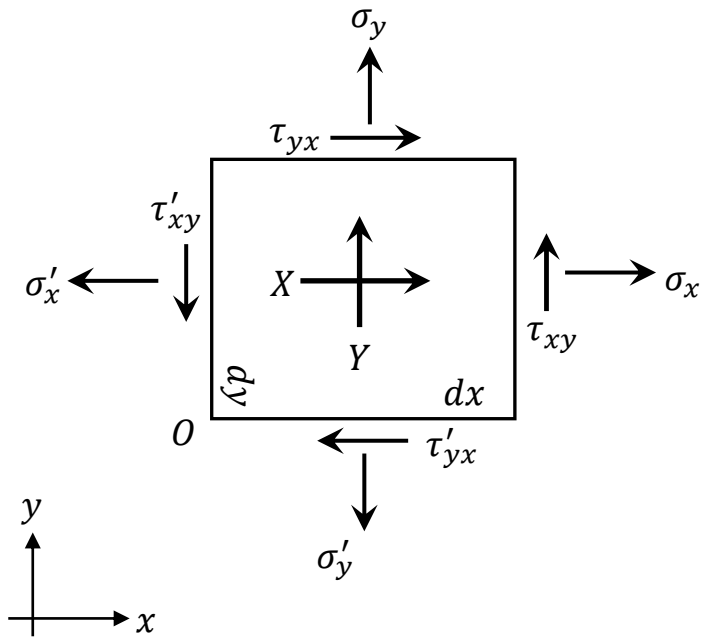
$$\sigma'_y = \sigma_y$$

Fazendo-se $dx \rightarrow 0$:

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy}$$



Equilíbrio



Equilíbrio de momentos em relação a O:

$$\cancel{\sigma_y dx dz \frac{dx}{2}} - \cancel{\tau_{yx} dx dz dy} + \cancel{\tau_{xy} dy dz dx} - \cancel{\sigma_x dy dz \frac{dy}{2}} - \cancel{\sigma'_y dx dz \frac{dx}{2}} + \cancel{\sigma'_x dy dz \frac{dy}{2}} + Y dx dy dz \frac{dx}{2} - X dx dy dz \frac{dy}{2} = 0$$

Dividindo-se por $dx dy dz$:

$$-\tau_{yx} + \tau_{xy} + Y \frac{dx}{2} - X \frac{dy}{2} = 0$$

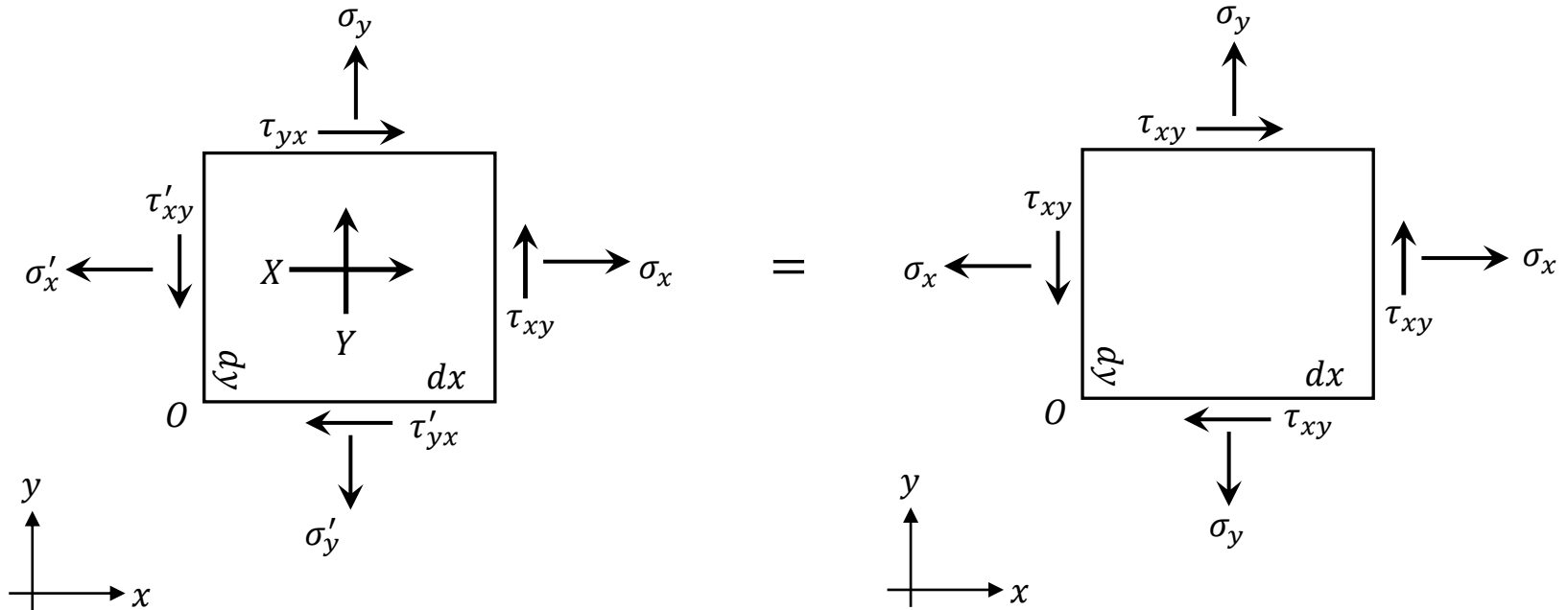
Fazendo-se $dx \rightarrow 0$ e $dy \rightarrow 0$:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Conclusão



8 componentes de tensão

$\Rightarrow$

Apenas 3 componentes independentes



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Tensões*. Disponível no Moodle