

Capítulo 1

Elo Flexível

1.1 Objetivos

O objetivo desta prática é projetar um controlador ótimo por realimentação de estado para o módulo Elo Flexível. O controlador final deve permitir ao usuário controlar a posição angular do elo, eliminando as vibrações presentes neste tipo de sistema.

Ao final desta prática, você deverá saber:

- Como modelar matematicamente o sistema Elo Flexível.
- Projetar um controlador LQR ótimo para o sistema.
- Atenuar as vibrações ajustando o controlador.

1.2 Requisitos do sistema

Na realização da prática o seguinte conjunto de equipamentos será utilizado:

[1] Módulo de potência *Quanser UPM 2405/1503* ou equivalente.

[1] *Quanser MultiQ/MQ3* ou equivalente.

[1] Planta servo *Quanser SRV02-E(T)*

[1] Módulo Elo Flexível - *Quanser FLEXGAGE*

[1] PC equipado com o requerido programa como declarado no manual do usuário.

1.3 Modelo Matemático

A Fig. 1.1 mostra o módulo de elo flexível junto com a planta SRV02 na configuração correta e o sensor *strain gage* montado na base do elo. Este sensor é calibrado para 1V por polegada de deformação da extremidade do elo.

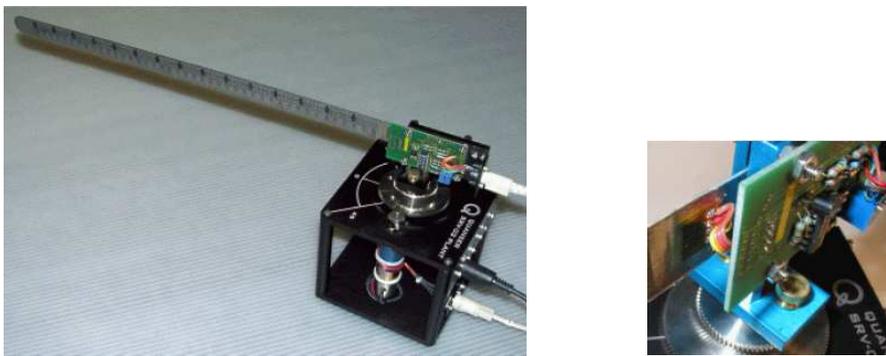


Figura 1.1: Módulo Elo Flexível e montagem do sensor *strain gage*.

A tabela abaixo é uma lista de nomenclaturas usadas nas ilustrações e deduções.

Símbolo	Descrição
L	Comprimento do elo flexível
m	Massa do elo flexível
K_{Gage}	Fator de calibração do <i>strain gage</i> , (1V/polegada)
θ	Ângulo da caixa de engrenagem (radianos)
α	Inclinação do elo (radianos)
D	Ponto final da deformação do elo (comprimento do arco)
ω_c	Frequência natural de amortecimento do elo (experimentalmente calculada)
J_{elo}	Momento de inércia do elo

A Fig. 1.2 mostra o elo flexível sujeito a uma dada deformação, resultando em um deslocamento final D . De acordo com a calibração feita para o *strain gage* temos:

$$\alpha = \frac{D}{L}. \quad (1.1)$$

Obter um modelo completo de um elo flexível está além do escopo deste laboratório. No controle do ângulo do elo é suficiente usar um modelo simplificado que descreva

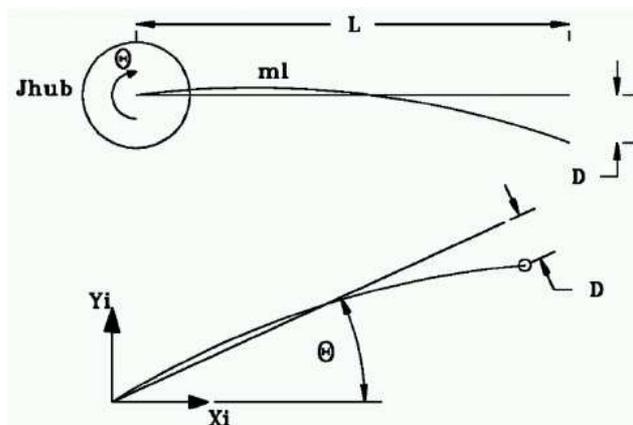


Figura 1.2: Deformação do elo flexível.

adequadamente o movimento do ponto final do elo. A Fig. 1.3 abaixo mostra o modelo simplificado:

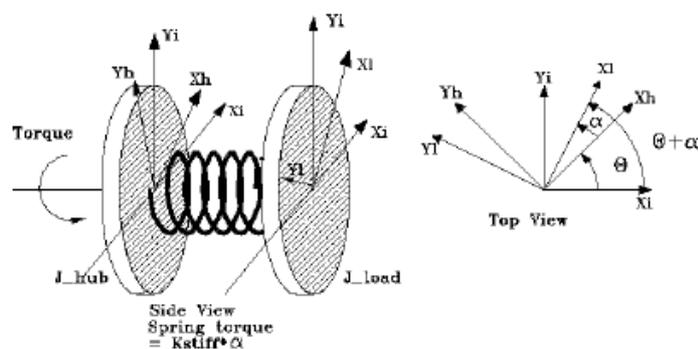


Figura 1.3: Modelo simplificado do elo flexível.

Da Fig. 1.3, a equação da mola rotativa é:

$$J_{elo}\ddot{\alpha} = -K_S\alpha \quad (1.2)$$

Para obter um estimativa da rigidez (K_S), fixa-se o eixo do módulo SRV02 e configura-se uma condição inicial para α . Com a oscilação do sistema a partir

desta posição inicial, tem-se a seguinte relação:

$$\ddot{\alpha} = -\omega_c^2 \alpha. \quad (1.3)$$

Combinando as equações (1.2) e (1.3), chega-se a seguinte expressão:

$$K_S = \omega_c^2 J_{elo}, \quad (1.4)$$

sendo o elo modelado como uma haste de rotação sobre seu ponto final com momento de inércia

$$J_{elo} = \frac{ML^2}{3}. \quad (1.5)$$

As equações dinâmicas do sistema podem ser obtidas usando a formulação Euler-Lagrange. Obtém-se as energias potencial e cinética do sistema como:

Energia Potencial:

$$V = \frac{1}{2} K_S \alpha^2. \quad (1.6)$$

Energia Cinética:

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{elo} (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2. \quad (1.7)$$

Formando o Lagrangiano:

$$L = T - V = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{elo} (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 - \frac{1}{2} K_S \alpha^2 \quad (1.8)$$

sendo J_{eq} o momento de inércia equivalente do módulo SRV02.

As duas coordenadas generalizadas são θ e α . Por essa razão, tem-se 2 equações:

$$\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \theta} = T_{output} - B_{eq} \dot{\theta} \quad (1.9)$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\alpha}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \alpha} = 0 \quad (1.10)$$

Resolvendo as equações (1.9) e (1.10), tem-se:

$$J_{eq}\ddot{\theta} + J_{elo}(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) = T_{output} - B_{eq}\dot{\theta} \quad (1.11)$$

$$J_{elo}(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) + K_S\alpha = 0 \quad (1.12)$$

Voltando ao experimento de controle de posição, sabe-se que o torque de saída sobre a carga do motor é:

$$T_{output} = \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m}. \quad (1.13)$$

Finalmente, combinando as equações (1.11), (1.12) e (1.13), tem-se a representação do sistema em espaço de estados completa:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_S}{J_{eq}} & \frac{-\eta_m \eta_g K_t K_m K_g^2 + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} & 0 \\ 0 & \frac{-K_S(J_{eq} + J_{elo})}{J_{eq} J_{elo}} & \frac{\eta_m \eta_g K_t K_m K_g^2 + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{n_m n_g K_t K_g}{J_{eq} R_m} \\ \frac{-n_m n_g K_t K_g}{J_{eq} R_m} \end{bmatrix} V_m \quad (1.14)$$

1.4 Procedimento de Laboratório

O propósito deste laboratório é projetar um controlador por realimentação de estado visando atenuar as altas vibrações do elo flexível, mantendo uma resposta aceitável para a posição do mesmo. A lei de controle de realimentação de estado $u = -kx$ é implementada neste laboratório, sendo

$$u = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}.$$

A primeira tarefa ao iniciar a prática é se familiarizar com o sistema. O sinal de inclinação (α) deve ser conectado ao encoder canal #1 e o sinal de posição dos servos

motores θ deve ser conectado ao encoder canal #0. A saída analógica canal #0 deve ser conectada ao UPM (Amplificador) e da saída do amplificador para a entrada do servo motor. Este sistema tem um entrada (V_m) e duas saídas (θ e α).

1.4.1 Análise da Influência dos Ganhos

O controlador é inicializado com 4 ganhos (k_1, k_2, k_3, k_4) e o estudante deve variar cada parâmetro para 2 condições: ($0.5 \times k_i$ e $2 \times k_i$), $i = 1, \dots, 4$. Preencha a Tabela 1.3, dada na Seção 1.5, conforme a tabela que se segue:

Tabela 1.1: Tabela de análise dos ganho

$\times k_1$	$\times k_2$	$\times k_3$	$\times k_4$	Tempo de Subida	Vibração α	% Overshoot γ	Faixa de α
0.5	1	1	1	Baixo	Maior	0	$-3.5^\circ < \alpha < 3.5^\circ$
2	1	1	1	Rápido	Menor	35.00%	$-12^\circ < \alpha < 12^\circ$

A Tabela 1.3 mostra as 2 condições para cada ganho. Para cada iteração, tenha certeza de configurar os outros ganhos para o valor padrão 1. Para as colunas *Tempo de Subida* e *Vibração α* somente uma observação qualitativa é suficiente. O objetivo deste exercício é notar os efeitos de cada ganho sobre os parâmetros individuais do sistema.

1.4.2 Especificações de Desempenho

Os ganhos finais devem satisfazer as seguintes especificações:

- Tempo de subida similar ao padrão.
- Sem vibração em α (mínimo).
- 0 % de sobressinal em $\gamma = \theta + \alpha$.
- α não deve exceder $\pm 10^\circ$.

***Dica:** Use a tabela obtida anteriormente como um guia para selecionar o melhor conjunto de ganhos que alcancem os requisitos.

1.4.3 Controle Ótimo

Dado o sistema no espaço de estados abaixo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

sendo x o estado, u a ação de controle e A e B as matrizes do sistema, o Controle Ótimo (Regulador Linear Quadrático (LQR)) busca encontrar uma lei de controle da forma $u = -kx$ tal que o seguinte funcional é minimizado:

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u$$

sendo Q e R matrizes de ponderação (simétricas e definidas positivas).

Para o propósito deste laboratório, fixamos a matriz Q diagonal. Isto permite variar 4 parâmetros de Q , (q_1, q_2, q_3, q_4) , e um parâmetro para R , (r) (R neste caso é escalar, pois temos apenas uma entrada):

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix}, \quad R = r \quad (1.15)$$

Os valores padrões de Q e R são $Q = \text{diag}([10 \ 100 \ 1 \ 1])$ e $R = 1$. Deve-se observar que o maior valor em Q é q_2 , para manter α tão perto quanto possível de 0. Portanto, o maior elemento de Q deve ser o que está associado com α .

No total deverão ser preenchidas **10** entradas na tabela (variando cada parâmetro em 2 passos enquanto mantém-se os outros parâmetros com os valores iniciais). Para uma idéia de quais valores testar, use como referência a faixa sugerida na Tabela 1.2.

Tabela 1.2: Faixa de parâmetros sugerida

Parâmetro	q_1	q_2	q_3	q_4	r
Faixa	$0 < q_1 < 500$	$0 < q_2 < 2000$	$0 < q_3 < 10$	$0 < q_4 < 20$	$0.1 < r < 10$

Página em branco

3. Analise a influência dos ganhos no desempenho do sistema

R. _____

4. Controle Ótimo LQR

Tabela 1.4: Tabela de análise das matrizes de ponderação

q_1	q_2	q_3	q_4	r	Tempo de Sub.	Vibração α	% Overshoot γ	Faixa de α

5. Analise a influência das matrizes de ponderação no desempenho do sistema

R. _____

