

INTRODUÇÃO ÀS MEDIDAS EM FÍSICA

2º. Semestre de 2013

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Professores e monitores:

Edi Carlos P. Sousa

Lilian Afonso Cândido

Sérgio Luiz Morelhão

Wayne Seale

Prefácio 2013

A apostila de 2013 é muito semelhante ao conteúdo de apostila anteriores , principalmente no conteúdo da apostila de 2010 (M. Munhoz e A. Suaide). Na atual versão foram mantidas as modificações implementadas no ano passado em relação ao número e conteúdo básico dos experimentos. A única modificação relevante relaciona-se ao procedimento de medida do tempo de reação realizado na segunda aula da primeira experiência, que foi retirada devido a problemas relacionados a mudança no arranjo experimental.

Também foi mantido todo o texto relacionado ao ensino de conceitos básicos usados em atividades experimentais, tais como definições de incertezas ou métodos de análise para obter informações relevantes a partir da representação gráfica das medidas experimentais.

Mudamos a filosofia sobre a descrição escrita do trabalho experimental. Nos trabalhos iniciais o aluno preencherá guias de estudos relacionados com cada experimento, que exemplificarão como preparar e articular as etapas importantes do trabalho. A cada experimento o aluno irá trabalhar um novo tópico do relatório de maneira que esse acréscimo permita a escrita de um relatório completo e independente nos últimos experimentos. A proposta para os tópicos que devem se apresentados em cada experimento estão descritos abaixo:

- Experiência I - Resultados de medições, cálculos e análise de dados
- Experiência II - Resultados de medições, cálculos e análise de dados + Discussões e conclusões;
- Experiência III - Descrição experimental + Resultados de medições, cálculos e análise de dados + Discussão final e conclusões;
- Experiência IV - Introdução ao assunto + Descrição experimental + Resultados de medições, cálculos e análise de dados + Discussão final e conclusões;
- Experiência V - Resumo do trabalho + Introdução ao assunto + Descrição experimental + Resultados de medições, cálculos e análise de dados + Discussão final e conclusões;
- Experiência VI - Resumo do trabalho + Introdução ao assunto + Descrição experimental + Resultados de medições, cálculos e análise de dados + Discussão final e conclusões + Referências bibliográficas; (completo)
- Experiência VII - Resumo do trabalho + Introdução ao assunto + Descrição experimental + Resultados de medições, cálculos e análise de dados + Discussão final e conclusões + Referências bibliográficas; (completo)

Nemitala Added

Índice

<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO À DISCIPLINA 4300152</u>	<u>4</u>
<u>CAPÍTULO II - MEDIDAS FÍSICAS</u>	<u>15</u>
<u>CAPÍTULO III - INSTRUMENTOS DE MEDIDA</u>	<u>24</u>
<u>CAPÍTULO IV - INTERPRETAÇÃO GRÁFICA DE DADOS</u>	<u>42</u>
<u>CAPÍTULO V - RELATÓRIO CIENTÍFICO</u>	<u>73</u>
<u>EXPERIÊNCIA I (AULAS 01 E 02) - PÊNDULO SIMPLES</u>	<u>79</u>
<u>EXPERIÊNCIA II (AULAS 03 E 04) - DENSIDADE DE SÓLIDOS</u>	<u>89</u>
<u>EXPERIÊNCIA III (AULA 05) - DISTÂNCIA FOCAL DE UMALENTE</u>	<u>94</u>
<u>EXPERIÊNCIA IV (AULAS 06 E 07) - QUEDA LIVRE</u>	<u>101</u>
<u>EXPERIÊNCIA V (AULAS 08 E 09) - CURVAS CARACTERÍSTICAS</u>	<u>107</u>
<u>EXPERIÊNCIA VI (AULA 10) - RESFRIAMENTO DE UM LÍQUIDO</u>	<u>112</u>
<u>EXPERIÊNCIA VII (AULAS 11 E 12) - CORDAS VIBRANTES</u>	<u>117</u>

Capítulo I

Introdução à Disciplina 4300152

Os objetivos gerais da disciplina, sua estrutura e algumas observações pertinentes serão apresentados a seguir. Leia com atenção e procure esclarecer as dúvidas com o professor.

1. Objetivos da disciplina

A disciplina tem como objetivo principal dar ao aluno uma iniciação nas atividades experimentais. Esse objetivo não se resume apenas a aprender a medir grandezas, mas também em compreender o contexto e o significado das medidas. Para tanto é necessário:

- Compreender a necessidade de se efetuar medidas na área de conhecimento chamada Física;
- Compreender os cuidados necessários para uma tomada de dados;
- Ser capaz de escolher e utilizar os equipamentos e procedimentos adequados;
- Ser capaz de elaborar e testar modelos teóricos;
- Estimar incertezas de medidas e avaliar a propagação das mesmas;
- Sistematizar o armazenamento de dados através de tabelas;
- Analisar dados experimentais através da utilização de gráficos;
- Discutir criticamente os resultados obtidos

2. O programa da disciplina

1. O papel da experimentação no método científico.
2. Introdução aos conceitos da física experimental.
 - a. Noção de medida e incerteza.
 - b. Incerteza instrumental. Medidas diretas.
 - c. Incerteza estatística. Introdução à Teoria dos Erros.
 - i. Aplicação: o Pêndulo simples
 - d. Propagação de incertezas e média ponderada
 - i. Aplicação: densidade de sólidos.

- ii. Aplicação: medida da distância focal de uma lente.
- 3. Análise e interpretação de dados experimentais. Adequação de modelos.
 - a. Gravitação Universal e o Movimento de Queda
 - b. Lei de Ohm
- 4. Avançando a teoria a partir da experimentação: leis empíricas. Escalas Logarítmicas
 - a. Lei de resfriamento de Newton.
 - b. O monocórdio e as cordas vibrantes.

3. Atividades

São apresentadas várias atividades que no conjunto direcionam para os objetivos da disciplina. A apostila da disciplina (roteiros de aula) que você recebeu reúne a maioria das propostas. A cada aula é definido um conjunto de atividades a serem realizadas. Sempre utilize a apostila como guia e fonte de referências. Além das atividades em sala de aula, procure realizar as leituras e exercícios propostos para casa.

As atividades em sala de aula normalmente são montagens de experimentos, tomada de dados, análises e discussão dos resultados. Para melhor eficiência do trabalho em sala há a necessidade da leitura prévia dos trechos da apostila correspondentes àquela aula.

As atividades de leitura da apostila e de outros textos (atividades extra-classe) têm dois objetivos principais: obter informações que possibilitam a execução das atividades em aula de modo mais eficiente e que permitam a contextualização das atividades experimentais que já foram realizadas.

Os exercícios (teóricos e experimentais) propostos para casa têm dois objetivos principais: sedimentar o aprendizado em sala de aula através da aplicação direta dos conceitos em situações diversas e tornar as questões abordadas mais abrangentes, reconhecendo os elos estabelecidos entre as várias aulas.

4. Avaliação e critério de aprovação

O acompanhamento dos alunos pelo professor (e posterior avaliação) será feito por meio de:

- Freqüência em aula.
- Relatórios científicos/atividades realizadas em classe.
- Provas.

4.1. Critério de aprovação

Para aprovação na disciplina o aluno deve ter:

1. Freqüência e mínima maior ou igual a 70%. Caso isso não aconteça, o aluno será reprovado por freqüência. Não serão aceitos relatórios caso o aluno não tenha comparecido à aula correspondente.
2. Média das notas de atividades (MR) maior ou igual a 5,0. Caso isso não aconteça, o aluno será reprovado com média final igual à média das notas de atividades.
3. Média das provas (MP) maior que 3,0. Caso isso não aconteça, o aluno será reprovado com média final igual à média das provas. Se o aluno for reprovado tanto nos relatórios (critério 2 acima) como nas provas, prevalecerá a nota das provas.
4. Média final maior ou igual a 5,0.

Observados os itens 1 a 3 descritos acima, a média final (MF) será calculada da seguinte forma:

$$MF = 0.6 * MR + 0.4 * MP$$

onde:

MR é a média das notas de atividades (Seção 4.4); e

MP é a média ponderada das provas (Seção 4.5).

AVISOS

Não existe prova de recuperação para disciplinas de laboratório. Os alunos reprovados devem cursar novamente a disciplina para obter aprovação.

Cada um dos itens necessários para aprovação é discutido a seguir em detalhes.

4.2. Freqüência e participação em aula

Todo o desenvolvimento dos experimentos em sala de aula é realizado por equipes de 2 ou 3 alunos com revezamento nas equipes para melhorar a dinâmica do trabalho. Espera-se que as atividades em grupo sejam úteis nas discussões e tomadas de decisões necessárias em cada atividade e também possibilitem a todos os membros da equipe uma participação em todas as fases do trabalho. Dessa forma evita-se a formação de “especialistas” em tomada de dados, ou em cálculos, ou em análises gráficas ou até mesmo, “especialistas” em conclusões.

Cada aluno deverá assistir a todas as aulas na turma para a qual foi designado. Trocas de turma ou de horário dependem da disponibilidade de vagas e da concordância do coordenador da disciplina.

Essa disciplina foi elaborada para o aluno desenvolver as atividades em sala de aula, com poucas atividades extra-classe. Tendo isso em vista, duas regras foram estabelecidas e deverão ser seguidas à risca pelos alunos:

1. ***Não há reposição de aulas.*** A conseqüência imediata de uma falta é receber nota zero nas atividades correspondentes àquela aula. O aluno que faltar a uma aula deve procurar os colegas e procurar minimizar a perda de conteúdo ocorrida. Somente em casos excepcionais o professor poderá permitir a reposição de aula em outra turma desde que o professor da turma de reposição seja avisado.
2. Será tolerado um ***atraso máximo de 15 minutos.*** O aluno que chegar após o tempo de tolerância só poderá participar das atividades com a aprovação do professor, que considerará caso a caso. Situações excepcionais são: greve em transporte público, enchentes, etc. Portanto, o aluno deve se programar adequadamente. ***Conflitos de horários de trabalho/outras atividades não serão considerados.***

4.3. Folha de Dados

Ao final de cada aula, em que foram realizadas medições, o aluno deve ***entregar ao professor uma folha (ou arquivo) com os dados experimentais obtidos*** (pode ser uma cópia de carbono ou Xerox). Além dos dados medidos o aluno deve anotar todos os dados relevantes ao experimento como, por exemplo, o número do equipamento utilizado, as incertezas instrumentais, alturas, comprimentos, etc.. Se possível o professor deve verificar imediatamente se os dados são satisfatórios, apontando eventuais falhas graves nas medições.

As anotações organizadas da tomada de dados do experimento realizado ajuda a reduzir o tempo a ser usado na preparação do relatório. A folha de dados entregue ao professor registra as medidas das equipes e permite o professor acompanhar os dados dos experimentos realizados pelos alunos. Não há necessidade de passar a limpo ou melhorar a estética das anotações que devem ser feitas preferencialmente em um CADERNO DE LABORATÓRIO (vide seção 5.3)

4.4. Relatórios científicos de atividades

Os relatórios científicos de atividades consistem em sínteses das atividades realizadas em aula e devem ser entregues ao professor no máximo em uma semana após o término da experiência correspondente. O objetivo desses relatórios é fazer com que o aluno reflita e sintetize os objetivos, métodos e conclusões de um experimento.

Há um total de 7 relatórios ou guias distribuídos da seguinte forma:

- Atividade 1 – Pêndulo simples, aulas 1 e 2.
- Atividade 2 – Densidade de sólidos, aulas 3 e 4.
- Atividade 3 – Distância focal de uma lente, aula 5.
- Atividade 4 – Queda livre, aulas 6 e 7.
- Atividade 5 – Curvas características, aulas 8 e 9.
- Atividade 6 – Resfriamento de um líquido, aula 10.
- Atividade 7 – Cordas vibrantes, aulas 11 e 12.

Os guias ou relatórios são feitos em grupo (no máximo 3 pessoas por grupo). Cada relatório científico deve ser feito no **máximo em 5 páginas** (excluindo os gráficos em papel específico), e deve conter, na forma completa, os seguintes itens, lembrando que o grau de completeza é o estabelecido no **prefácio**:

- Breve resumo dos objetivos.
- Introdução ao assunto.
- Descrição do aparato experimental e método de medidas (colocar figuras, se necessário).
- Medidas efetuadas (em tabelas ou gráficos, se for o caso).
- Resultados obtidos (em tabelas ou gráficos, se for o caso) com descrição do procedimento utilizado para análise dos dados.
- Principais conclusões.

A nota de cada relatório (grupo) será usada para compor a nota individual de cada atividade (R_i), que dependerá de exercícios realizados tanto durante as aulas como fora dela. Definindo-se R_{\min} como sendo a menor nota, calcula-se a média final de atividades como sendo:

$$M R = \frac{\sum_{i=1}^7 R_i - R_{\min}}{6}$$

4.5. Provas

Os alunos também serão avaliados através de provas, que farão individualmente. As questões das provas serão baseadas nas atividades experimentais efetuadas em sala de aula e nos exercícios propostos para casa.

Serão realizadas duas provas, contendo os seguintes tópicos:

- P_1 – aulas 1 a 7 (até o experimento 4)
- P_2 – aulas 1 a 12 (experimentos de 1 a 7).

Não há prova substitutiva. Com as notas das provas, calcula-se a média de provas como sendo:

$$M P = \frac{P_1 + 2 P_2}{3}$$

ATENÇÃO

Não será permitido que você faça provas fora de sua turma. Os casos excepcionais devem ser bem justificados perante o coordenador da disciplina.

5. Outras observações

5.1. Cuidados com os equipamentos – segurança pessoal

Experiências num laboratório de física sempre envolvem riscos a danos pessoais e também a danos aos equipamentos utilizados.

O aluno deve seguir as normas de segurança para evitar danos a si próprio, aos colegas e aos equipamentos do laboratório. Sempre siga as orientações dos professores da disciplina, bem como do corpo técnico do laboratório.

O aluno é responsável pelo equipamento colocado à sua disposição durante a aula e deverá reparar o dano que tenha provocado devido à negligência.

5.2. Apostila

Cada aluno receberá uma apostila contendo o roteiro de todas as experiências da disciplina e textos complementares nos quais há a possibilidade de se aprofundar o que foi discutido em aula. É obrigatório que o aluno a leve em todas as aulas. Em caso de perda da apostila, o aluno deverá providenciar uma cópia com um colega. Não será fornecida uma segunda cópia.

5.3. Caderno de Laboratório

Cada aluno deverá ter um Caderno de Laboratório, no qual serão anotados todos os resultados de medições e cálculos, gráficos preliminares e outras observações pertinentes como: data, referências, equações, endereços web, etc.. *Não se justifica o aluno alegar que os dados ficaram com o colega e por este motivo ele não fez o relatório. Cada aluno deve ter o seu próprio caderno.*

5.4. Obtenção de material para experiência em sala

Caso o material e instrumentos mais simples (micrômetro, cronômetro, papel encerado, etc.), necessários para o desenvolvimento da experiência, não estejam na bancada do laboratório, estes deverão ser retirados pelo próprio aluno no balcão da sala 123, através da identificação e depósito de um documento. Ao final da aula, o aluno deverá devolver o material no mesmo local, retirando então o documento após a conferência do material devolvido.

Os papéis para gráfico que são utilizados durante a disciplina *deverão ser adquiridos pelo aluno*. Em geral, 10 folhas de papel milimetrado e 5 folhas de papel mono-log e 5 folhas de papel di-log são suficientes para todo o semestre.

5.5. Atendimento extra-classe

A disciplina contará com 1 monitor que auxiliará, fora dos horários de aula, os alunos em suas dúvidas. O horário e local dos plantões dos monitores será fornecido aos alunos no início do semestre letivo. Os professores também poderão atender aos alunos dentro de suas possibilidades.

5.6. Local e horário das aulas

As aulas desta disciplina são semanais e sempre realizadas no andar térreo do Edifício Principal (Ala Central).

A sala de aula pode mudar a cada semana, dependendo da experiência a ser realizada, havendo um quadro no balcão da sala 123 com a informação necessária para cada dia de aula. Veja também o calendário da disciplina (Seção 6) para saber a programação de cada aula e sobre feriados, recessos e provas.

As provas serão realizadas no horário da aula, nos locais indicados na Seção 6, e no calendário na capa traseira.

6. Cronograma da Disciplina

Segue abaixo o conteúdo das aulas:

Aula 01 – E1 – Medidas de tempo e pêndulo simples – parte 1

- Introdução à disciplina.
- Discussão sobre o papel da experimentação no método científico.
- Algarismos significativos. Noção de ordem de grandeza.
- Medidas simples de distância e tempo usando dispositivos sem calibração.
- Calibração dos dispositivos e representação final dos resultados usando unidades do sistema internacional.
- Média e desvio padrão.

Aula 02 – E1 – Medidas de tempo e pêndulo simples – parte 2

- Introdução a histogramas e interpretação gráfica de média e desvio padrão.
- Experiência do pêndulo simples.
- Medida com cronômetro de resolução de 0,01 s e relógio de pulso com resolução de 1 s.

- Discussão sobre desvio padrão e desvio padrão da média.

Aula 03 – E2 – Densidade de sólidos – parte 1

- Medidas Simples e incertezas. Representação numérica e algarismos significativos.
- Uso de instrumentos simples (régua).
- Medidas indiretas. Propagação de incertezas.
- Medida da massa e densidade de um sólido. Determinação do material que o compõe.
- Estudo da influência da precisão do instrumento sobre o resultado da medida.
- Noção de compatibilidade experimental.

Aula 04 – E2 – Densidade de sólidos – parte 2

- Uso de instrumentos simples e incertezas instrumentais (régua, micrômetro e paquímetro).
- Medidas indiretas. Propagação de incertezas.
- Avaliações sobre a densidade de polímeros.
- Grandeza + incerteza diferenciam os polímeros

Aula 05 – E3 – Distância focal de uma lente

- Medida da distância focal de uma lente simples.
- Combinação de várias medidas. Média ponderada.

Aula 06 – E4 – Queda livre – parte 1

- Experiência de queda livre.
- Medida de movimento de um corpo.

Aula 07 – E4 – Queda livre – parte 2

- Continuação da experiência de queda livre.
- Análise gráfica do movimento. Determinação gráfica da aceleração do corpo e sua incerteza.
- Verificação da adequação do modelo (queda livre) aos resultados experimentais.

Aula 08 – E5 – Curvas características – parte 1

- Estudo da curva característica de resistores e lâmpadas.
- Utilização de instrumentos de medidas elétricas (voltímetro e amperímetro).

- Discussão sobre a influência do instrumento no resultado experimental.

Aula 9 – E5 – Curvas características – parte 2

- Levantamento gráfico da curva característica de um resistor e de uma lâmpada.
- Determinação gráfica da resistência elétrica e sua incerteza.
- Verificação da adequação do modelo (lei de Ohm) aos resultados experimentais.

Aula 10 – E6 – Resfriamento de um líquido

- Experiência de resfriamento da glicerina.
- Utilização de um experimento para a determinação da lei empírica de um fenômeno físico.
- Utilização de papel mono-log.

Aula 11 – E7 – Cordas vibrantes – parte 1

- Experiência de cordas vibrantes.
- Utilização de um experimento para a determinação da lei empírica de um fenômeno físico.
- Utilização de papel di-log.

Aula 12 – E7 – Cordas vibrantes – parte 2

- Continuação da Experiência de cordas vibrantes.
- Análise de vários parâmetros como n , L , densidade do fio, tensão

Segue abaixo o cronograma das aulas de todas as turmas:

Segunda-feira

Dia	Atividade
05/8	Aula 01 (pêndulo)
12/8	Aula 02 (pêndulo)
19/8	Aula 03 (densidade de sólidos)
26/8	Aula 04 (densidade de sólidos)
09/9	Aula 05 (distância focal)
16/9	Aula 06 (queda livre)
23/9	Aula 07 (queda livre)
7/10	<i>Primeira Avaliação – P1*</i>
14/10	Aula 08 (curvas características)
21/10	Aula 09 (curvas características)
04/11	Aula 10 (resfriamento de líquido)
11/11	Aula 11 (cordas vibrantes)
18/11	Aula 12 (cordas vibrantes)
25/11	<i>Segunda Avaliação – P2*</i>

Terça-feira

Dia	Atividade
06/8	Aula 01 (pêndulo)
13/8	Aula 02 (pêndulo)
20/8	Aula 03 (densidade de sólidos)
27/8	Aula 04 (densidade de sólidos)
10/9	Aula 05 (distância focal)
17/9	Aula 06 (queda livre)
24/9	Aula 07 (queda livre)
8/10	<i>Primeira Avaliação – P1*</i>
15/10	Aula 08 (curvas características)
22/10	Aula 09 (curvas características)
05/11	Aula 10 (resfriamento de líquido)
12/11	Aula 11 (cordas vibrantes)
19/11	Aula 12 (cordas vibrantes)
26/11	<i>Segunda Avaliação – P2*</i>

* Imprevistos serão avisados no quadro em frente à sala dos técnicos.

Capítulo II

Medidas Físicas

1. Introdução

Quando se afirma que a “Física é o estudo dos fenômenos naturais”, está implícita sua característica fundamental: a natureza como o parâmetro de referência desse conhecimento. É a natureza que nos fornece elementos para a construção de modelos explicativos e é ela mesma que nos serve de referência para a confirmação de hipóteses, previsões e leis.

Estudar a natureza significa observá-la. E para isso, necessitamos de instrumentos apropriados. Para enxergarmos qualquer fato ou fenômeno que está à nossa volta, necessitamos de nossos olhos, enquanto que para ouvirmos uma informação necessitamos de nossos ouvidos, o tato reconhece uma textura fina ou nossas mãos avaliam a temperatura da água de um banho e assim por diante. Nesses casos, nossos órgãos dos sentidos são os instrumentos que nos permitem obter as informações.

As informações que os instrumentos dos sentidos nos fornecem normalmente são satisfatórias para o nosso cotidiano. No exemplo acima, o nosso tato é suficiente para avaliarmos a temperatura da água de um banho ou ainda o relógio biológico é suficiente para nos informar sobre a hora de dormir quando estamos de férias. Todavia, se temos um compromisso marcado, o mesmo relógio biológico não é adequado, pois além da possibilidade de falhar, não informará o horário com a precisão necessária.

Em ciência, a utilização de um instrumento apropriado de medida é tão importante quanto o próprio experimento em si. Dessa forma, para que possamos realizar a medida de uma grandeza física da maneira mais precisa possível, é necessário escolher um instrumento adequado e aprender a utilizá-lo. Para medidas de comprimento, a régua é o instrumento de medida mais conhecido. Todavia, nem sempre a mesma régua é o instrumento mais apropriado. Se estivermos interessados na determinação de grandezas pequenas, por exemplo, na determinação do diâmetro de um fio de cabelo, a régua não é um bom instrumento de medida, visto que o diâmetro de um fio de cabelo é menor que a menor divisão da régua, e portanto a medida não seria nada confiável. Outra situação que ilustra a importância de escolhermos um instrumento de medida apropriado é quando desejamos medir grandezas “grandes”, como o comprimento de um estádio de futebol. Nessa situação, a régua também não é o instrumento mais adequado. Por outro lado, se estivermos interessados em medir o comprimento de uma

folha de caderno, a régua nos fornecerá uma medida com a precisão necessária. Dessa forma, a escolha do instrumento de medida mais apropriado é tão importante quanto à própria medida.

Muitas vezes é possível realizar diretamente uma medida, como é o caso de medirmos o comprimento de uma folha de papel com uma régua, ou ainda o tempo de duração de um evento com o auxílio de um relógio de pulso ou um cronômetro. Nesses dois casos, a medida consiste em comparar o seu valor com um valor padrão. O valor **padrão** representa a medida de grandeza unitária. Quando medimos um comprimento com uma régua ou trena, simplesmente comparamos o nosso objeto com a escala do instrumento de medida utilizado. Podemos definir vários padrões de medida, por exemplo, podemos expressar o comprimento de uma cozinha com azulejos em unidades de azulejos ao invés de medi-la com uma trena. No entanto, para que uma medida possa ter maior utilidade, é conveniente a utilização de padrões bem reconhecidos e estabelecidos.

Entretanto, outras vezes não é possível realizarmos diretamente uma medida. Nesses casos, temos que medir outras grandezas que nos possibilitem determinar a grandeza desejada. Muitas vezes, grandezas muito “grandes” ou muito “pequenas” só podem ser medidas de maneira indireta. Dessa forma, a possibilidade de efetuarmos medidas de forma direta ou indireta vai depender de sua ordem de grandeza.

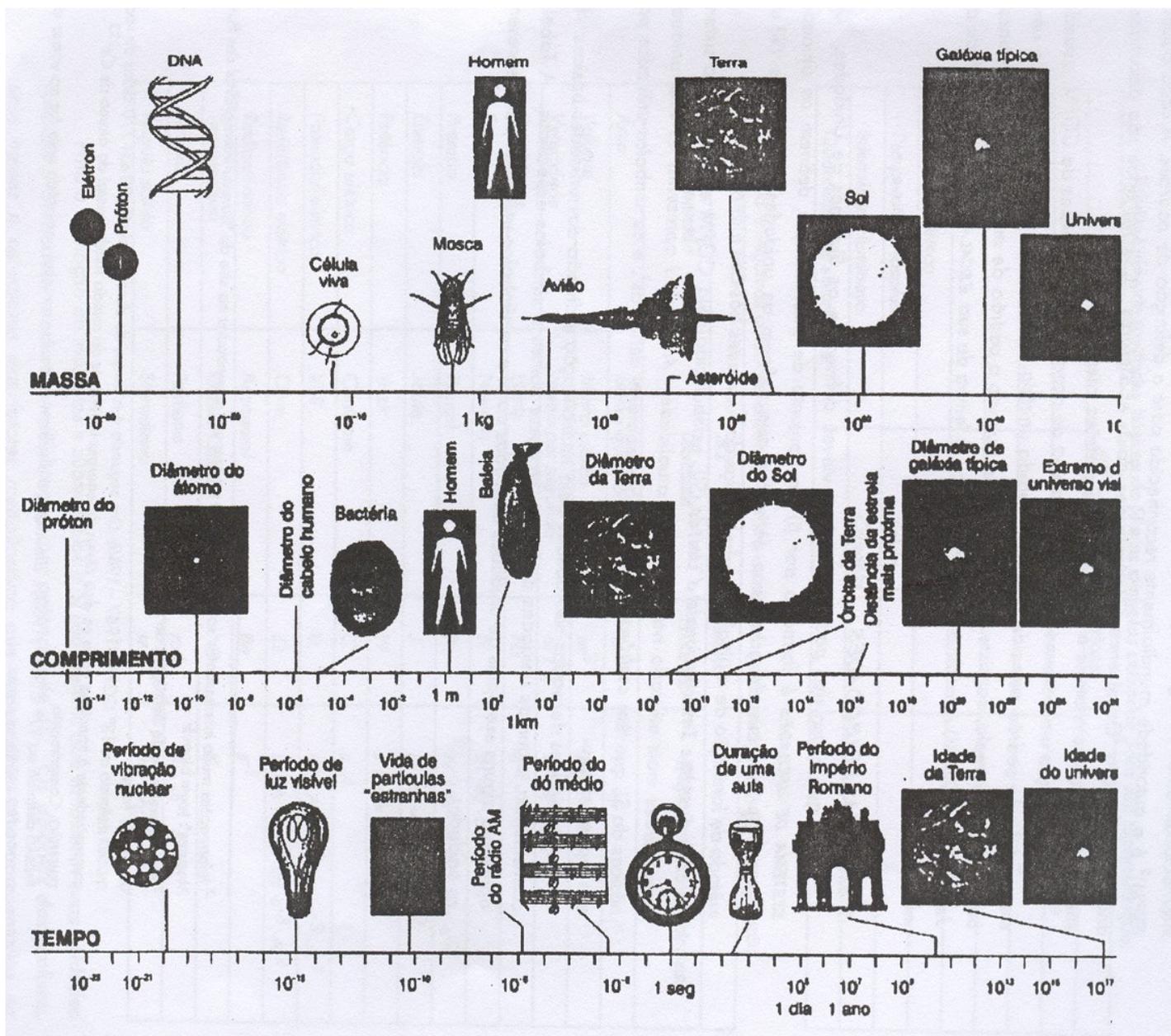


Figura 1.1 - Ordens de grandeza das dimensões massa, comprimento e tempo.

Ordem de grandeza de uma dimensão é a potência de 10 que melhor representa o valor típico da dimensão em questão, acompanhado de sua unidade. Por exemplo, o diâmetro de um fio de cabelo tem ordem de grandeza de 10^{-4} cm, enquanto que a ordem de grandeza do comprimento de uma folha de caderno é de 10^1 cm. O universo de medidas físicas abrange um intervalo de muitas ordens de grandeza. A Fig. 2.1 ilustra esse intervalo para o caso de medidas com dimensões de massa, comprimento e tempo, em unidades de quilograma, quilometro e segundo, respectivamente.

Nas duas primeiras aulas desta disciplina, iremos realizar medidas diretas de espaço utilizando diferentes instrumentos e discutindo diversos conceitos fundamentais envolvidos em uma medida física.

2. Conceitos fundamentais em uma Medida Física

Qualquer que seja o instrumento de medição, sua escala tem um número limitado de pequenas divisões. Logo, sua precisão é limitada na fabricação. Na maioria das vezes, a leitura do valor de uma grandeza é intermediária a dois traços consecutivos da escala. Como fazer a leitura nesse caso? Vamos dar como exemplo a medida ilustrada na figura 2.1.

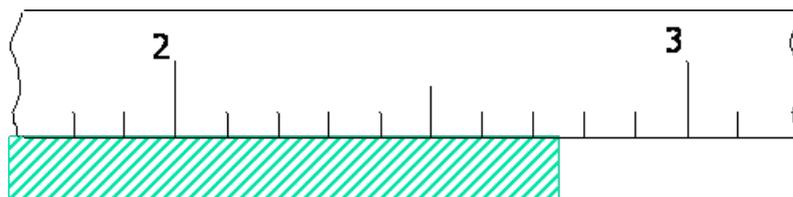


Figura 2.1- Exemplo de leitura de uma régua milimetrada.

A barra que está sendo medida tem uma extremidade ajustada no zero da escala e a régua é milimetrada. A outra extremidade da barra não coincidiu com nenhum traço. Qual o valor da medida? Podemos observar que ele é maior do que 2,7 cm e menor do que 2,8 cm. Portanto, a medida é 2,7 cm e mais alguma coisa, em centímetros. Quanto vale essa “alguma coisa”? Ninguém poderá responder, com certeza, o valor dessa alguma coisa, somente com esse instrumento. Diferentes pessoas poderão arriscar valores tais como 0,03, 0,04 ou 0,05 sem, contudo nenhuma delas estar mais certa do que as outras. É tão certo escrever 2,73 cm como 2,75 cm.

Toda grandeza possui um **valor verdadeiro** que é desconhecido por nós. O **erro** de uma medida é a diferença entre o valor da medida e o valor verdadeiro da grandeza em questão. Como não conhecemos o valor verdadeiro, o erro também é uma quantidade desconhecida. A **incerteza** é uma estimativa para o valor do erro. A melhor estimativa para o valor verdadeiro de uma grandeza, e sua respectiva incerteza, só podem ser obtidos e interpretados em termos de probabilidades. O formalismo utilizado para essa tarefa é chamado de **Teoria de Erros**. Leia o capítulo 2 da apostila “Introdução à Teoria de Erros”, de J. H. Vuolo, para uma explicação mais detalhada sobre os conceitos de valor verdadeiro, erro, incerteza e suas interpretações probabilísticas.

Voltando ao nosso exemplo, os algarismos 2 e 7 são exatos, enquanto 3, 4 ou 5 são duvidosos. Os algarismos certos e o duvidoso, avaliado pelo operador, são denominados **algarismos significativos**. Em 2,73 cm, os três algarismos são significativos sendo 2 e 7 certos ou exatos e 3 incerto ou duvidoso. Não seria correto escrever 2,735 fazendo uso da mesma escala.

Isso porque, se o 3 é duvidoso, o 5 perde totalmente o sentido. Daí surge a regra: nunca escreva a medida com mais de um algarismo duvidoso. Leia o apêndice desta aula e o capítulo 3 da apostila “Introdução à Teoria de Erros”, de J. H. Vuolo, para uma explicação mais detalhada sobre algarismos significativos.

Dissemos que tanto 2,73 cm como 2,74 cm ou 2,75 cm são maneiras igualmente corretas de escrever a medida do comprimento da barra do exemplo. Entretanto, o último algarismo da direita é duvidoso ou incerto. Essa incerteza é gerada pela própria escala do instrumento. Para tornar mais completa nossa informação a respeito da medida e respectiva incerteza, devemos escrevê-la seguida de um número que representa a incerteza devido à escala. De maneira geral, adota-se essa incerteza como sendo igual **ao valor da metade da menor divisão da mesma**. Portanto, nossa informação a respeito da medida do comprimento da barra estará completa quando escrevermos: $L = (2,73 \pm 0,05)$ cm, isto é, $L \pm \Delta L$, onde ΔL é a incerteza na medida.

Isso significa que entre os valores de 2,68 cm a 2,78 cm, todos os valores intermediários são suscetíveis de representar a medida do comprimento da referida barra com certa probabilidade. O valor de ΔL é também referido como sensibilidade ou precisão do instrumento, isto é, o menor valor que o mesmo pode fornecer ao operador.

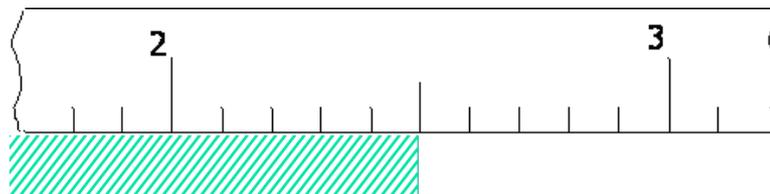


Figura 2.2 - $L = (2,50 \pm 0,05)$ cm.

Note que apesar de termos afirmado que a incerteza na leitura é representada pela metade da menor divisão da escala, essa não é uma regra rígida. Dependendo da familiarização do operador com a escala e do maior ou menor espaçamento entre os traços de divisão da escala, outros valores poderão ser tomados como incerteza na leitura.

Se ao medir uma grandeza, houver coincidência com um dos traços de menor divisão da escala, devemos ainda levar em conta a incerteza na leitura e escrever o zero duvidoso à direita dos demais algarismos significativos e certos da medida, como mostrado na figura 2.2.

3. Algarismos significativos

3.1 Motivação

O número de dígitos ou algarismos que devem ser apresentados num resultado experimental é determinado pela incerteza neste experimento. Apresentamos aqui o conceito de algarismo significativo e as regras práticas para apresentar um resultado experimental com sua respectiva incerteza, os quais devem ser escritos utilizando somente algarismos significativos.

3.2 Conceito de algarismo significativo

O valor de uma grandeza experimental, obtido a partir de cálculos ou medições, pode ser um número na forma decimal, com muitos algarismos significativos. Por exemplo,

$$0,000XY \dots ZW ABCD\dots$$

onde **X, Y, ..., W** são algarismos significativos, enquanto os algarismos **A, B, C, D, ...** não são algarismos significativos.

Algarismo significativo em um número pode ser entendido como cada algarismo que individualmente tem algum significado, quando o número é escrito na forma decimal.

Zeros à esquerda de um número **não são** algarismos significativos, pois os zeros à esquerda podem ser eliminados ao reescrevermos o valor da medida, por exemplo, 81 mm=8,1 cm=0,081 m. Por outro lado, **zeros à direita** de um número **são** algarismos significativos, pois não podem ser eliminados quando reescrevemos a medida.

O dígito estimado no valor de uma medida é chamado de **algarismo significativo duvidoso**. Os demais dígitos que compõem o valor da medida são chamados de **algarismos significativos exatos**. O valor de uma grandeza medida geralmente não possui mais do que um algarismo duvidoso, pois não faz sentido tentarmos avaliar uma fração de um número estimado.

Exemplo: Réguas com precisões diferentes

Na figura abaixo temos a leitura de uma barra utilizando duas régua distintas A e B.

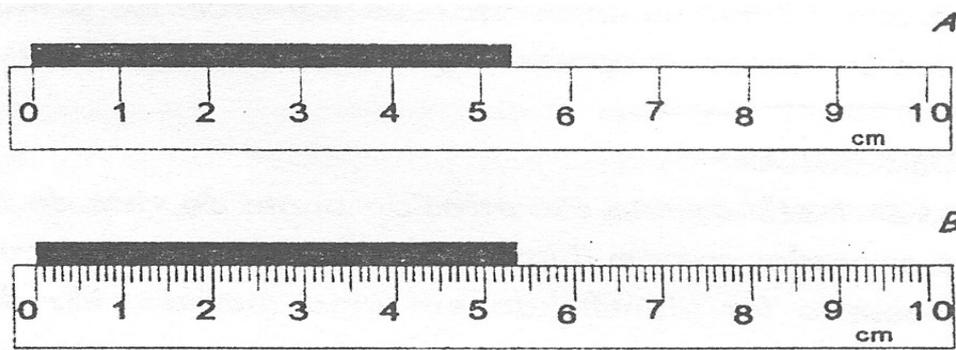


Figura 3.1 - Representação de duas réguas com precisões diferentes.

Na régua A, a menor divisão é 1 cm e na régua B é 1 mm. Realizando a medida com a régua A, concluímos que o comprimento da barra está entre 5 cm e 6 cm. Realizando a medida com a régua B, esse valor está entre 5,3 cm e 5,4 cm. Dessa forma, utilizando a régua A, concluímos que o comprimento da régua é 5,X cm e utilizando a régua B, o valor é 5,3X cm.

Note que não é possível encontrarmos o valor verdadeiro de X.

O que podemos fazer é um “chute” criterioso. Por exemplo, podemos dizer que as leituras de A e B são 5,3 cm e 5,34 cm, respectivamente. Também podemos dizer que a leitura de A e B são 5,4 cm e 5,33 cm, respectivamente. Qual leitura é a mais correta?

A resposta é que ambas as leituras são corretas e uma avaliação não é melhor ou pior que a outra, já que a estimativa de X é subjetiva e varia de pessoa para pessoa.

Por outro lado, não seria razoável supor que A e B fossem 5,7 cm e 5,40 cm, visto que das figuras podemos ver claramente que A é menor que 5,5 cm e B é menor que 5,40 cm. Para a régua A a menor divisão é 1 cm e portanto, sua incerteza instrumental σ_A é $\sigma_A = 0,5$ cm, enquanto que para a régua B sua incerteza instrumental σ_B é $\sigma_B = 0,5$ mm.

Podemos representar as medidas A e B de diversas maneiras, por exemplo,

A: $(5,3 \pm 0,5)$ cm, ou $(0,053 \pm 0,005)$ m ou (53 ± 5) mm.

B: $(5,34 \pm 0,05)$ cm, ou $(0,0534 \pm 0,0005)$ m ou $(53,4 \pm 0,5)$ mm.

Note que no caso da leitura A, o valor da medida apresenta dois algarismos significativos independentemente da unidade utilizada e na leitura B, a medida apresenta três algarismos significativos. Isso nos permite fazer duas conclusões:

- 1) O número de algarismos significativos da medida depende da precisão do instrumento utilizado.
- 2) O número de algarismos significativos não depende do número de casas decimais.

3.3 Critérios de arredondamento

Quando realizamos operações aritméticas, necessitamos freqüentemente arredondar os resultados obtidos, para que eles reflitam adequadamente a confiabilidade do valor. Isto é, arredondamentos são necessários para que os resultados tenham um número apropriado de algarismos significativos.

Quando um dos números tem algarismos significativos excedentes, estes devem ser eliminados com arredondamento do número. Se em um determinado número, tal como:

... W, Y X A B C D ...,

Sendo W Y X algarismos significativos enquanto A B C D... são algarismos que por qualquer motivo devem ser eliminados. Dessa forma, o último algarismo significativo, ou seja, X deve ser arredondado aumentando em uma unidade ou não, conforme as regras a seguir:

- de X000... à X499..., os algarismos excedentes são simplesmente eliminados, ou seja, o arredondamento é para baixo.
- de X500...1 à X999..., os algarismos excedentes são eliminados e o algarismo X aumenta de 1, ou seja, o arredondamento é para cima.
- No caso X50000..., o arredondamento deve ser tal que o algarismo X depois do arredondamento deve ser par. Entretanto, muitas vezes nesse caso, arredondamos tanto para cima ou para baixo.

Exemplos de arredondamento de números. Os números em negrito devem ser eliminados.

2, 4 3 → 2, 4

3, 6 8 8 → 3, 6 9

5, 6 4 9 9 → 5, 6

5, 6 5 0 1 → 5, 7

5, 6 5 0 0 → 5, 6 ou 5, 7

5, 7 5 0 0 → 5, 8

4. Referências:

1. Física Geral e Experimental para Engenharia I - FEP 2195 para Escola Politécnica (2003).
2. J. H. Vuolo, “Fundamentos da Teoria de Erros”, São Paulo, Editora Edgard Blucher, 2ª edição (1996).
3. Introdução às Medidas em Física, “Notas de aula”, Instituto de Física da USP, (2004).

Capítulo III

Instrumentos de medida

Esse texto foi baseado nas apostilas “Laboratório de Mecânica para Geociências”, 2003; “Laboratório de Física para Ciências Farmacêuticas”, 2005 e “Física Geral e Experimental para Engenharia I”, 2003.

1. Introdução

Para que possamos realizar uma medida de uma grandeza física de forma correta precisamos:

1. Escolher o instrumento adequado para a medida
2. Aprender o procedimento de utilização do instrumento escolhido
3. Aprender a ler a escala de medida desse instrumento e avaliar o resultado criticamente.

Por exemplo, se quisermos medir o comprimento de uma sala de aula, a largura de uma folha de caderno e o diâmetro de um fio de cabelo, devemos utilizar instrumentos de medida diferentes. Para a medida do comprimento da sala de aula poderíamos utilizar, por exemplo, uma trena. Uma régua deve ser mais que suficiente para medir a largura da folha de caderno e um micrômetro pode ser utilizado para o diâmetro do fio de cabelo. Note que, nos três casos citados, queremos realizar medidas de comprimento, ou seja, medidas de mesma *dimensão*. Mesmo assim, necessitamos de instrumentos diferentes em cada caso, pois as medidas a serem efetuadas são, quantitativamente, muito diferentes. Em linguagem científica diríamos que as medidas são de ordens de grandeza diferentes.

A *ordem de grandeza* de uma dimensão é um número, representado na forma de potência de 10, que melhor representa o valor típico da dimensão em questão, acompanhado da sua unidade. No exemplo acima, a ordem de grandeza do comprimento da sala é 10^3 cm, da folha de papel, 10^1 cm e do fio de cabelo, 10^{-4} cm. O universo das medidas físicas abrange um intervalo de muitas ordens de grandeza. Por exemplo, um núcleo atômico tem dimensões da ordem de 10^{-15} m, enquanto o Universo tem dimensões estimadas da ordem de 10^{26} m. A diferença entre esses dois extremos deixa claro a necessidade de instrumentos de medida específicos para cada situação.

2. Padrões de medidas e sistemas de unidades

Realizar uma medida qualquer nada mais é do que a comparação da grandeza a ser medida com um padrão pré-estabelecido. Então, para que possamos expressar a grandeza medida, devemos definir um padrão para aquela medida. O padrão representa a medida de grandeza unitária. Se medirmos o comprimento da sala de aula contando o número de azulejos colocados no chão, ao longo do comprimento da sala, o padrão de medida será “um azulejo”. O uso indiscriminado de padrões torna a comparação entre medidas uma tarefa complexa, pois precisamos conhecer em detalhes cada padrão utilizado e como um padrão se compara ao outro. Caso duas salas de aula sejam medidas contando-se o número de azulejos em cada uma, devemos saber se os azulejos de cada sala são iguais e, se não forem, como um se compara ao outro.

Para tornar a comparação entre medidas uma tarefa mais simples, costuma-se definir padrões universais de grandezas, que possam ser reconhecidos, reproduzidos e utilizados em qualquer circunstância experimental. A organização internacional “*Bureau International des Poids et Mesures*” (BIPM)¹ é a autoridade mundialmente reconhecida para a definição de padrões. A cada quatro anos é realizada a “*Conférence Générale des Poids et Mesures*” (CGPM) onde são discutidos, entre outros assuntos relativos à metrologia, os padrões de medidas internacionais.

Dizemos que um instrumento está **calibrado**, de acordo com as normas do CGPM, quando sua medida do padrão coincide com a sua medida unitária. O processo de calibração de um instrumento consiste, então, em certificar se a medida unitária do instrumento coincide com o padrão da medida. Por exemplo, a calibração de uma balança consiste em certificar que a medida do padrão definido pelo CGPM para a massa coincide, quando realizada pela balança, com a leitura, na **escala** da balança, de uma unidade de massa.

2.1. Sistemas de unidades

Para que o uso de padrões se torne viável é preciso definir os Sistemas de Unidades. Um **Sistema de Unidades** é formado por:

1. Um conjunto de padrões que definem as unidades básicas;
2. Definições de grandezas derivadas, que também definem as unidades derivadas;

¹ <http://www.bipm.fr>

3. Um método de formação de múltiplos e submúltiplos das unidades básicas e derivadas.

Tabela 2.1. As sete unidades básicas do SI e os símbolos utilizados para a sua representação.

SI – Unidades básicas		
Dimensão	Unidade	Símbolo
Tempo	Segundo	s
Comprimento	Metro	m
Massa	Quilograma	kg
Corrente elétrica	Ampère	A
Temperatura absoluta	Kelvin	K
Intensidade luminosa	Candela	cd
Quantidade de substância	Mol	mol

Tabela 2.2. Algumas unidades derivadas no SI e os símbolos utilizados para a sua representação.

SI – Unidades derivadas			
Dimensão	Unidade	Símbolo	Expressão em unidades básicas
Área	Metro quadrado	m ²	m·m
Volume	Metro cúbico	m ³	m·m·m
Velocidade	Metro por segundo	m/s	m·s ⁻¹
Frequência	Hertz	Hz	s ⁻¹
Força	Newton	N	m·kg·s ⁻²
Pressão	Pascal	Pa	N/m ² = m ⁻¹ ·kg·s ⁻²
Energia	Joule	J	N·m = m ² ·kg·s ⁻²
Potência	Watt	W	J/s = m ² ·kg·s ⁻³
Carga elétrica	Coulomb	C	s·A
Potencial elétrico	Volt	V	W/A = m ² ·kg·s ⁻³ ·A ⁻¹
Resistência elétrica	Ohm	Ω	V/A = m ² ·kg·s ⁻³ ·A ⁻²
Radioatividade	Becquerel	Bq	s ⁻¹
Temperatura	Graus Celsius	°C	K
Ângulo	Radiano	rad	m·m ⁻¹ = 1 (adimensional)
Ângulo sólido	Steroradiano	sr	m ² ·m ⁻² = 1 (adimensional)

O *Système Internationale d'Unités* (SI), ou Sistema Internacional de Unidades, estabelecido pela CGPM em 1960, é o sistema de unidades mais utilizado no mundo atualmente. A tabela 2.1 apresenta as 7 unidades básicas definidas no SI. A definição dessas unidades segue padrões científicos rigorosos e bem definidos. As unidades derivadas são obtidas pela multiplicação e divisão de unidades básicas. Por conveniência, algumas unidades derivadas recebem nomes e símbolos específicos. A

tabela 2.2 mostra **algumas** unidades derivadas, bem como os símbolos utilizados para representá-las.

Para a formação de múltiplos e submúltiplos o SI usa prefixos que modificam suas unidades (básicas e derivadas) mediante multiplicações por potências de 10. Os símbolos dos prefixos, seus nomes e valores dos fatores multiplicativos que representam são apresentados na tabela 2.3. Por exemplo, 1000 metros (1000 m) pode ser escrita utilizando o múltiplo quilo (símbolo k, minúsculo) resultando 1 quilo-metro (ou 1 km).

Tabela 2.3. Múltiplos e submúltiplos do SI com seus respectivos símbolos.

Nome	Símbolo	Valor	Nome	Símbolo	Valor
Exa	E	10^{18}	Deci	d	10^{-1}
Peta	P	10^{15}	Centi	c	10^{-2}
Tera	T	10^{12}	Mili	m	10^{-3}
Giga	G	10^9	Micro	μ	10^{-6}
Mega	M	10^6	Nano	n	10^{-9}
Quilo	k	10^3	Pico	p	10^{-12}
Hecto	h	10^2	Femto	f	10^{-15}
Deca	da	10	Atto	a	10^{-18}

Outro sistema de unidades, ainda utilizado em alguns países, é o sistema de *Unidades Inglesas* ou USCS (*United States Customary System*, como denominado nos Estados Unidos). São unidades inglesas, dentre outras, a libra, a milha e o galão. Ao contrário do SI, as unidades inglesas não possuem nenhum padrão científico. Fatores de conversão entre o SI e unidades inglesas podem ser encontrados na maior parte dos livros textos de Física e nas calculadoras científicas modernas.

3. Instrumentos de medidas

A atividade experimental requer a realização de medidas de grandezas de naturezas diversas: comprimento, massa, tempo, corrente elétrica, radiação e assim por diante. Por conta disso, o número de instrumentos de medida disponíveis ao experimentador é muito variado, tornando a descrição de cada um deles impossível. Assim, discutiremos apenas aqueles instrumentos mais relevantes para as atividades que serão realizadas nesta disciplina.

3.1. Medidas de comprimento

Quando se realiza uma medida de comprimento utilizando uma régua comum, a menor divisão disponível é, em geral, 1 milímetro (1 mm). Para se medir décimos ou centésimos de mm não bastaria acrescentar traços intermediários à régua, uma vez que os mesmos seriam de difícil (até mesmo impossível) leitura. Além disso, dadas as pequenas dimensões envolvidas, seria muito difícil posicionar corretamente o instrumento. Nesse caso, apesar do instrumento ser preciso, o método de medida limita a precisão de medida possível de ser alcançada pelo experimentador. Quando se quer efetuar medidas com precisão de décimos ou centésimos de milímetro utilizam-se instrumentos especiais, tais como o micrômetro e paquímetro.

O micrômetro

O micrômetro é um instrumento de alta precisão que permite medidas de até 0,001 mm. A figura 3.1 mostra a foto de um micrômetro padrão e seus principais componentes.

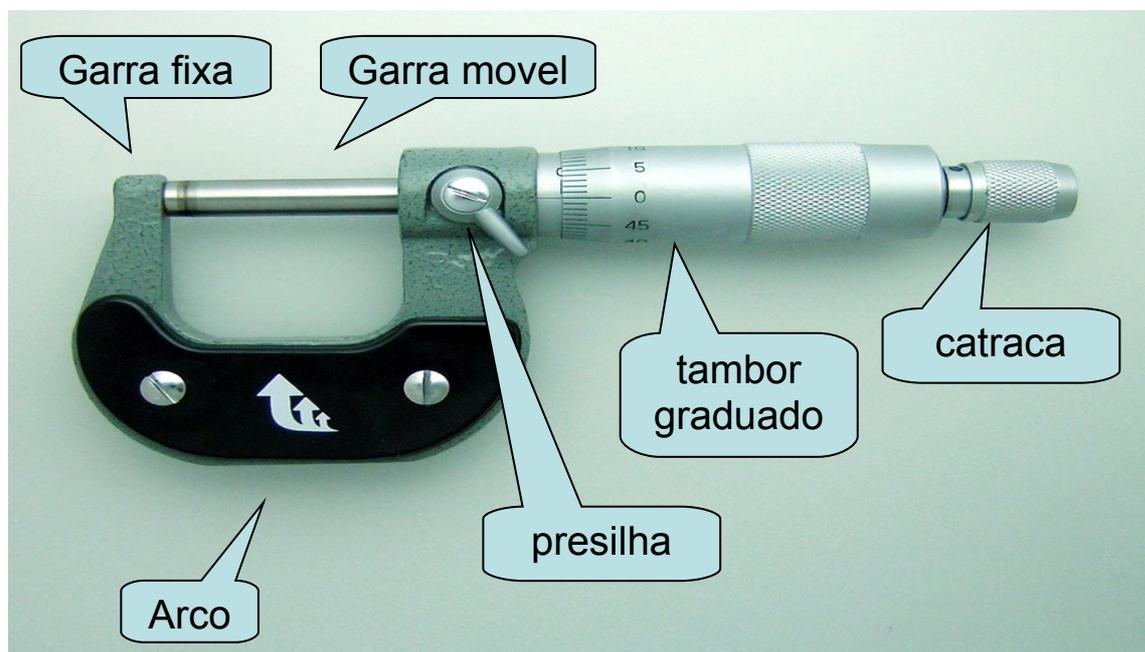


Figura 3.1. Micrômetro padrão similar aos utilizados no laboratório didático.

Micrômetros podem ser construídos com finalidades diversas, como aqueles para medidas de profundidade, grandes dimensões com elevada precisão, etc. A figura 3.2 mostra alguns tipos de micrômetro para fins específicos.

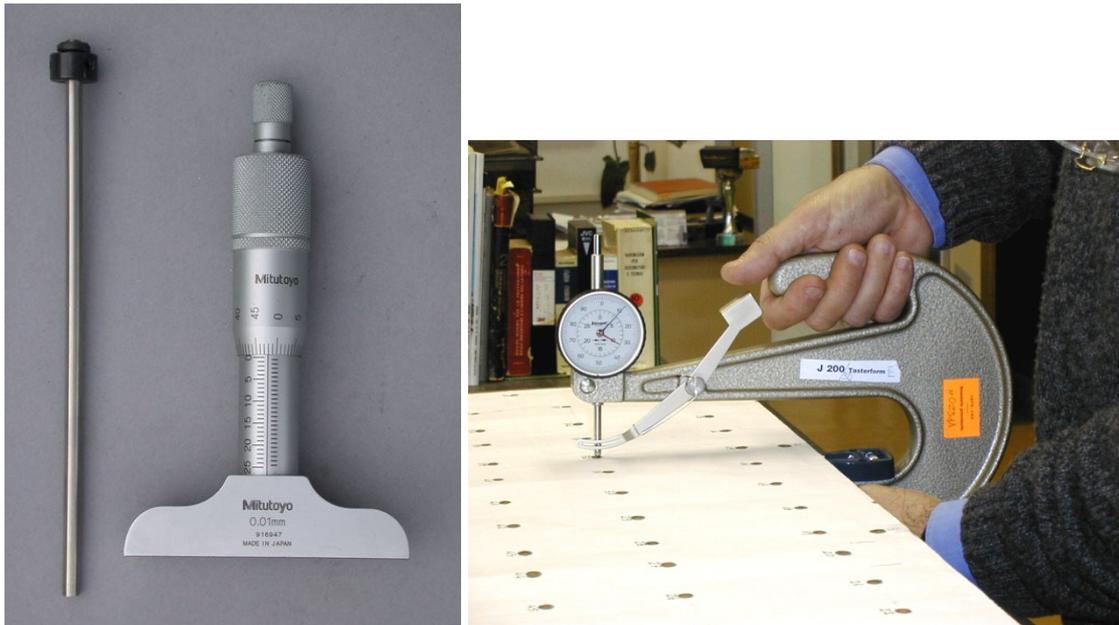


Figura 3.2 – Micrômetro de profundidade (esquerda) e para medidas de espessura de chapas (direita).

O componente básico de um micrômetro é o parafuso micrométrico. O parafuso micrométrico consiste de uma rosca de alta precisão na qual uma volta completa (ou passo) equivale ao avanço ou recuo de 0,5 mm (outros modelos de parafuso micrométrico, com passos maiores ou menores também estão disponíveis). Esse parafuso é graduado, permitindo a leitura de medidas intermediárias ao passo do parafuso, possibilitando uma elevada precisão de medida. A figura 3.3 mostra um detalhe do parafuso micrométrico de um micrômetro.



Figura 3.3 – Parafuso micrométrico graduado de um micrômetro simples.

O arco, o parafuso micrométrico e os pontos de medição (garras fixa e móvel) são construídos de um material especialmente tratado de maneira a evitar tensões, dilatação devido ao calor e fornecer a dureza necessária para evitar o desgaste por atrito.

O procedimento para a realização de uma medida com micrômetro deve seguir os seguintes passos:

1. Colocar o objeto a ser medido entre as faces das garras (figura 3.4)
2. Girar o tambor até que as faces estejam próximas de encostar o objeto a ser medido.
3. Utilizando a catraca do micrômetro, girar a mesma até que as garras encostem suavemente no objeto. Você perceberá uns cliques da catraca, indicando que as garras estão devidamente encostadas no objeto.
4. Fazer a leitura da medida, identificando o traço na escala visível bem como a fração do passo no tambor do micrômetro.

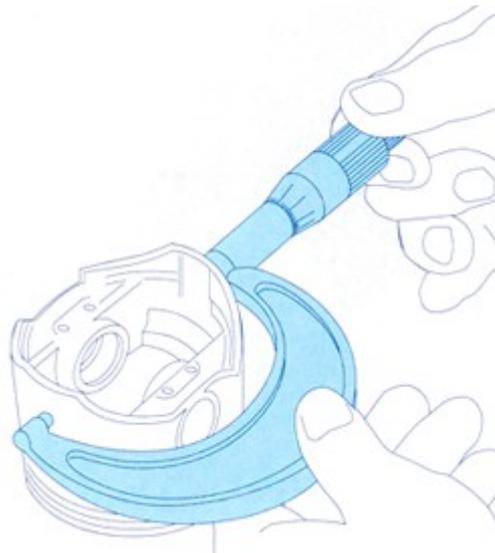


Figura 3.4 – Realizando uma medida com um micrômetro simples.

Por exemplo, vamos seguir os exemplos da figura 3.5. No primeiro caso, à esquerda, o traço visível corresponde a uma leitura de 24,0 mm enquanto o tambor fornece uma leitura entre os traços 14 e 15 do tambor. Como o tambor possui 50 traços equivalentes a um passo de 0,5 mm, a leitura efetuada no tambor está entre 0,14 e 0,15 mm. Por último, estima-se esse valor intermediário como sendo 0,001 mm. Assim, a leitura efetuada vale:

$$L = 24,0 \text{ (principal)} + 0,14 \text{ (tambor)} + 0,001 \text{ (estimativa)}$$

$$L = 24,141 \text{ mm}$$

Como a incerteza do micrômetro é metade da sua menor divisão (0,01 mm) temos que:

$$L = 24,141 \pm 0,005 \text{ mm}$$

No caso à direita, temos que a leitura na escala principal vale 16,5 mm (**note o traço na parte inferior da escala principal**). A leitura no tambor está entre 0,01 e 0,02 mm enquanto a nossa estimativa da leitura intermediária é 0,000. Assim, o valor correspondente a essa medida no micrômetro é:

$$L = 16,5 \text{ (principal)} + 0,01 \text{ (tambor)} + 0,000 \text{ (estimativa)}$$

$$L = 16,510 \pm 0,005 \text{ mm}$$

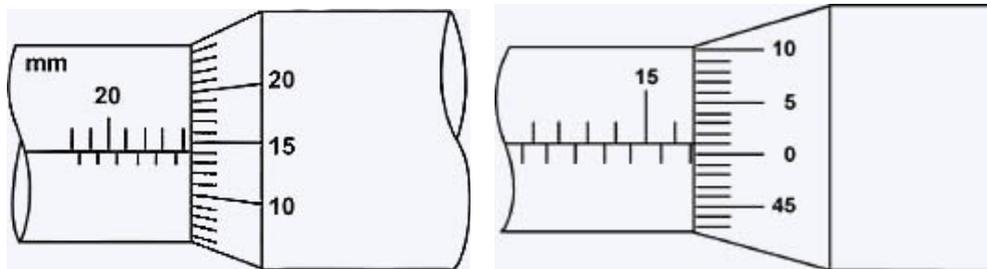


Figura 3.5 – Exemplos de leitura de um micrômetro.

O paquímetro

Apesar de o micrômetro obter medidas de comprimento bastante precisas a sua versatilidade é bastante limitada. A maioria dos micrômetros não permite realizar medidas muito grandes, de profundidade, diâmetros externos, etc.

Em laboratórios e oficinas mecânicas, freqüentemente, há necessidade de se medir dimensões nas quais o micrômetro não é adequado. Nesse caso, utiliza-se, em geral, um paquímetro.

A figura 3.6 mostra um paquímetro e seus principais componentes. Todo paquímetro tem um cursor móvel (que desliza sobre a haste), no qual se encontra uma das orelhas; o encosto móvel e as escalas principais e vernier (também denominada de nônio). Essa última permite efetuar medidas com precisão superior àquela da escala principal.

A figura 3.7 mostra alguns modos de utilização de um paquímetro. Como se pode notar, o mesmo permite vários tipos de medidas, dependendo de como é utilizado.

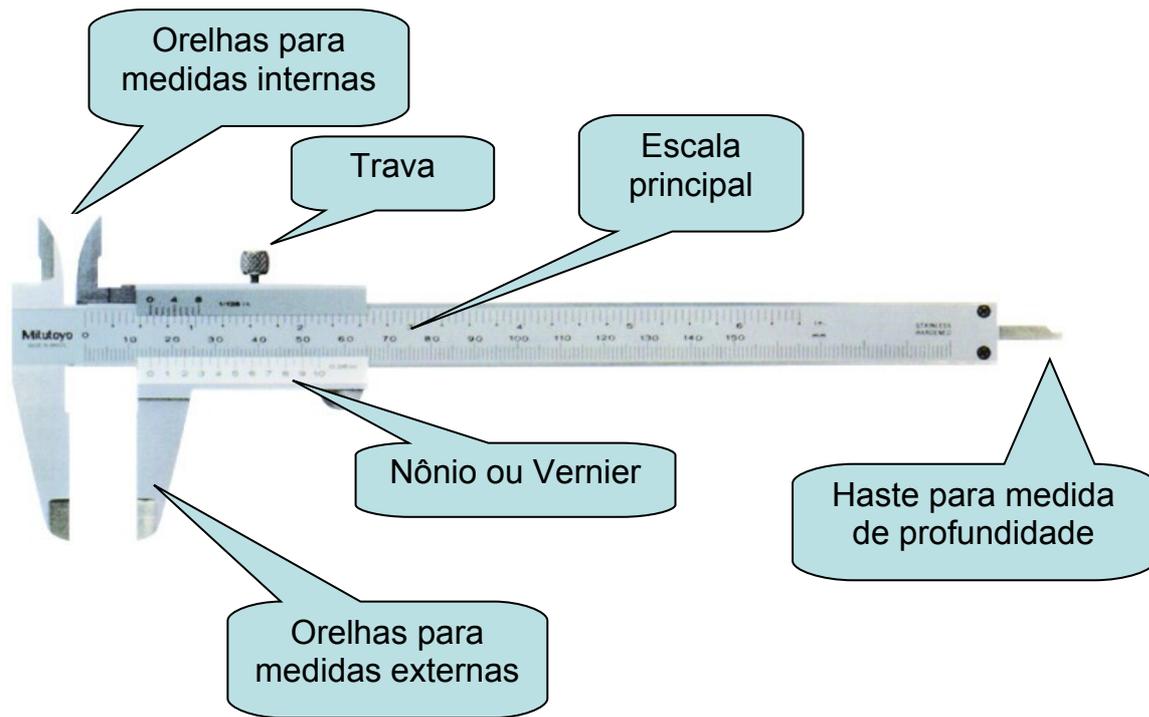


Figura 3.6 – Paquímetro típico e seus principais componentes

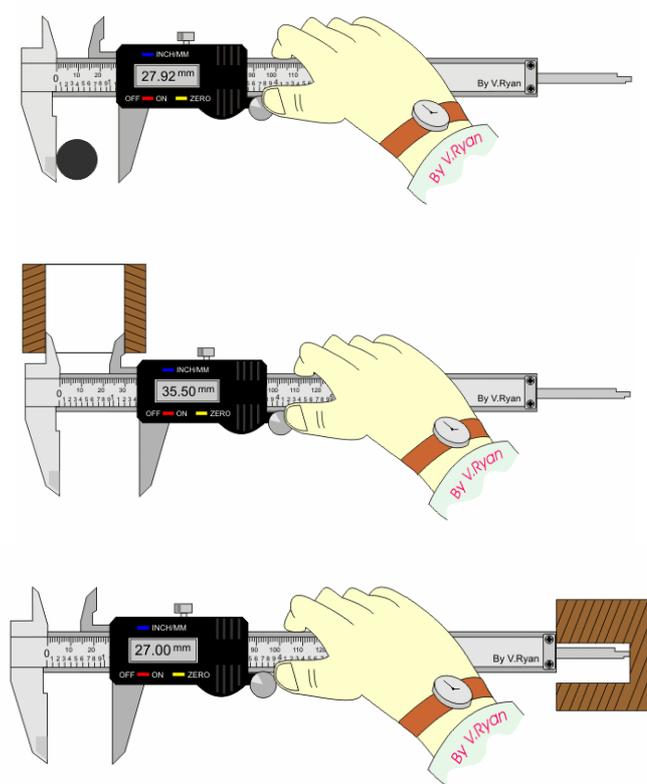


Figura 3.7 – Alguns métodos de utilização de um paquímetro para realização de medidas externas (acima), internas (meio) e de profundidade (abaixo).

O que caracteriza o paquímetro é o nônio acoplado à escala principal. O nônio permite obter medidas menores que a menor divisão da escala principal por ser construído de tal forma que a sua menor divisão é menor que a menor divisão na escala principal, conforme mostra a figura 3.8.

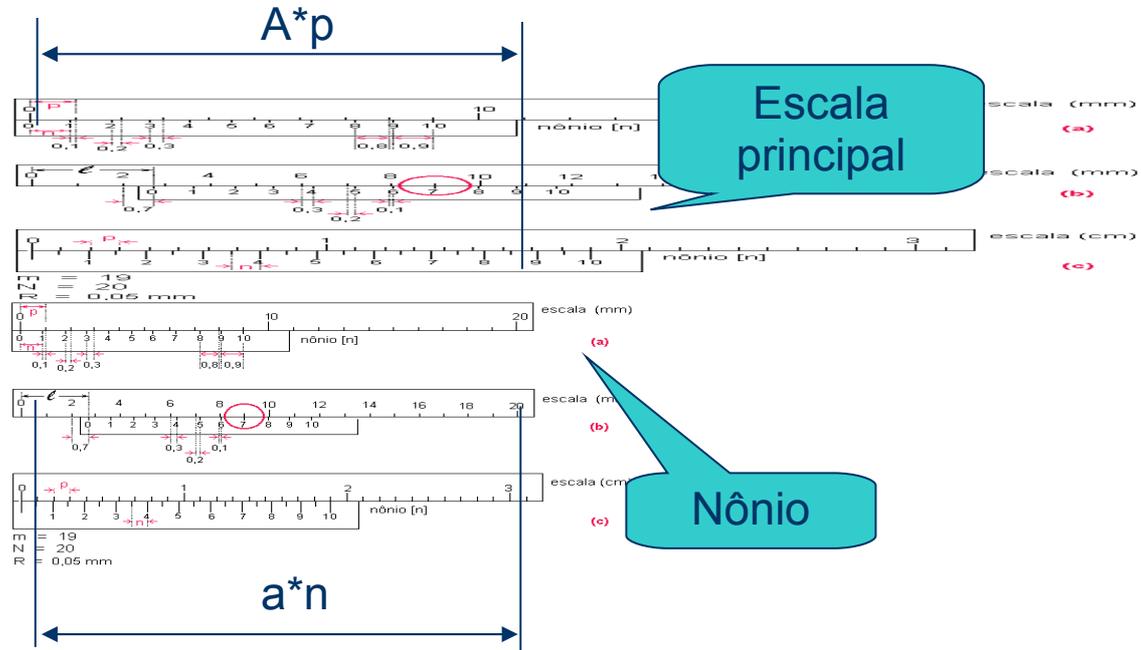


Figura 3.8 – Esquema de um nônio ou escala Vernier.

Na figura 3.8, o tamanho da unidade nas escalas principais e nônio são respectivamente denominadas p e n . A escala é construída de tal forma que o comprimento para um certo número de divisões (A) na escala principal é igual ao comprimento de um determinado número de divisões (a) na escala do nônio, ou seja:

$$\text{comprimento} = A \times p = a \times n$$

Desse modo, podemos escrever que:

$$n = \frac{A \times p}{a}$$

Podemos calcular a diferença entre os tamanhos da escala principal e do nônio (d) como sendo a diferença entre p e n , ou seja:

$$d = p - n = \left(1 - \frac{A}{a}\right) p$$

No caso da figura 3.8, temos que $A = 9$ e $a = 10$, ou seja:

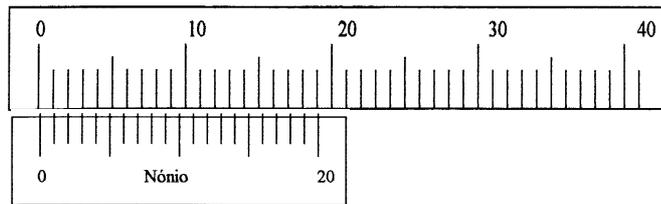
$$d = 0,1 \times p$$

d é também denominado a precisão do paquímetro e indica qual é a menor variação de comprimento possível de ser medida por ele. No nosso caso, se o tamanho da escala for $p = 1 \text{ mm}$, a precisão do paquímetro mostrado na figura 3.8 é $d = 0,1 \text{ mm}$. O paquímetro mostrado na figura 3.8 é denominado de paquímetro de décimos, pois o nônio possui dez divisões. Nônios com mais divisões (20 e 50) são comumente encontrados e permitem leituras de maior precisão, conforme mostra a figura 3.9. Nônios com número de divisões maiores são de difícil leitura e são raros de se encontrar.

Nônio de vigésimos

$$A = 19 \text{ e } a = 20$$

$$d = 0,05 \text{ mm}$$



Nônio de quinquagésimos

$$A = 49 \text{ e } a = 50$$

$$d = 0,02 \text{ mm}$$

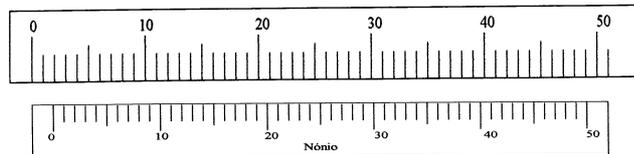


Figura 3.9 – Nônios de vigésimos e quinquagésimos.

Para efetuarmos uma medida utilizando um paquímetro precisamos avaliar duas quantidades:

- A leitura da escala principal onde está localizado o traço 0 do nônio e
- Adicionar a distância entre o traço 0 do nônio e o traço imediatamente inferior na escala principal. Essa distância é obtida pela verificação de qual traço no nônio coincide melhor com um traço qualquer na escala principal.

Vamos utilizar como exemplo a figura 3.10. No exemplo da figura, o 0 do nônio está logo após a marca de 5,0 mm da escala principal. Além disso, a 4ª marca do nônio coincide com uma marca qualquer da escala principal (não importa qual). Como esse é um nônio de precisão $d = 0,1 \text{ mm}$, temos que a 4ª marca do nônio equivale a 0,4 mm. Assim, a leitura efetuada é

$$L = 5,0 \text{ (principal)} + 0,4 \text{ (nônio)}$$

$$L = 5,4 \text{ mm}$$

Um aspecto importante do nônio é o fato de não ser possível estimar um valor intermediário entre a 3ª e 4ª marcas ou entre a 4ª e 5ª marcas do nônio. Neste caso, a incerteza do paquímetro não é metade da sua menor divisão e sim o valor da sua menor divisão. Nesse caso, podemos escrever a medida como sendo:

$$L = 5,4 \pm 0,1 \text{ mm}$$

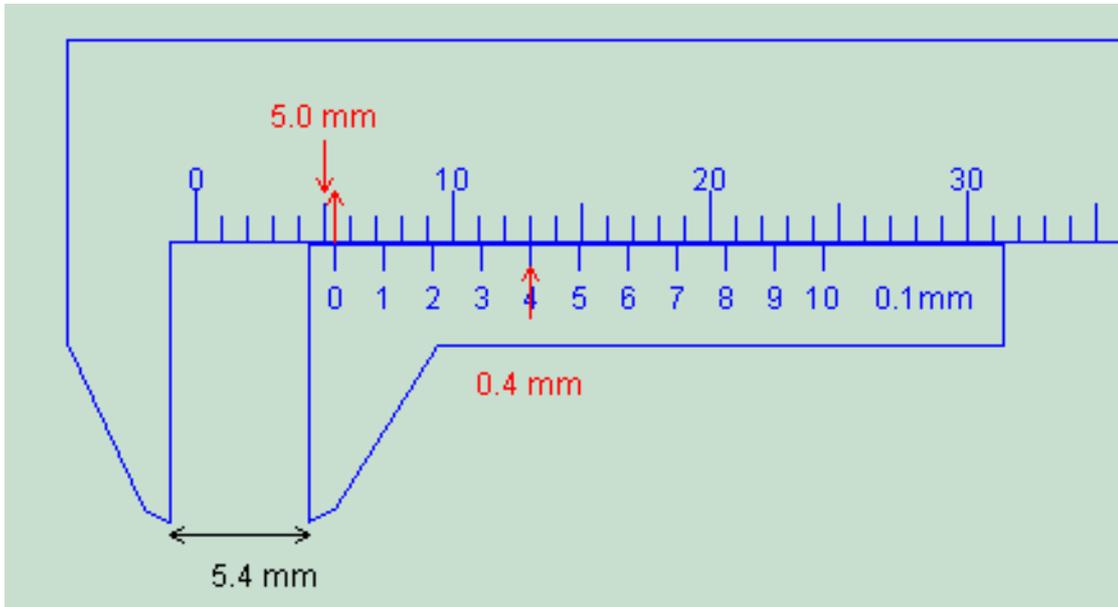


Figura 3.10 – Realização de uma leitura no paquímetro.

Para obter resultados satisfatórios com o paquímetro (bem como outros instrumentos de medida de comprimento) devemos estar atentos aos seguintes cuidados:

1. O contato entre os encostos das orelhas do paquímetro com as superfícies da peça a ser medida deve ser suave para não danificar a peça e resultar em medidas falsas.
2. Manter a posição correta do paquímetro em relação à peça. Inclinações do instrumento alteram as leituras.
3. Manter as superfícies limpas
4. Medir a peça em temperatura ambiente, procurando evitar possíveis dilatações.
5. Ao observar o valor da medida, manter a visão na direção perpendicular à escala do instrumento, evitando erros de paralaxe.

3.2. Instrumentos digitais

Instrumentos digitais são cada vez mais comuns no nosso dia a dia, devido à facilidade de uso e aos custos de fabricação cada vez menores. Instrumentos digitais fornecem a leitura direta dos algarismos correspondentes à medida efetuada, tornando a leitura muito mais fácil. Exemplos comuns de instrumentos de medida digitais incluem paquímetros e micrômetros digitais, cronômetros, balanças, multímetros, etc.

Quando se efetua a leitura de uma medida em um instrumento digital, pode ocorrer a flutuação no último algarismo (ou nos últimos) da leitura. Nesses casos, o experimentador deve estar atento à medida efetuada e tomar como valor de medida aquele correspondente à média visual realizada durante a medida efetuada. Nesses casos, deve-se estimar uma incerteza estatística da leitura a partir da variação observada durante a medida.

Outro aspecto importante na utilização de instrumentos digitais é a determinação da incerteza instrumental envolvida. Ao contrário de instrumentos analógicos, nos quais, em geral, a incerteza instrumental vale metade da menor divisão, é muito difícil estabelecer uma regra para incertezas de instrumentos digitais. Isso vem do fato que cada instrumento digital é composto por muitos elementos que apresentam variações durante o processo de construção e calibração do instrumento. Nesse caso, deve-se sempre consultar o manual do fabricante que especifica as incertezas instrumentais para cada modo de leitura do aparelho.

Vamos supor, por exemplo, que estamos realizando a medida de uma tensão elétrica nos terminais de uma pilha. A leitura obtida do voltímetro digital é:

$$V = 1,58X \text{ Volts}$$

Onde X representa o último algarismo de leitura que estava flutuando entre 1 e 7. Nesse caso, podemos dizer que o valor médio é, aproximadamente, 1,584 Volts com uma incerteza estatística de 0,003 Volts.

Além disso, consultando o manual do fabricante, fica especificado que a incerteza instrumental vale 0,8% da leitura mais 1 unidade no último dígito. Nesse caso, a incerteza instrumental é:

$$\sigma_V = \frac{0,8}{100} \times 1,584 + 0,001 = 0,014 \text{ Volts}$$

Como a incerteza instrumental nesse caso é muito maior que a flutuação observada, pode-se escrever que:

$$V = (1,584 \pm 0,014) \text{ Volts}$$

O multímetro

A peça central do multímetro, assim como a maioria dos indicadores elétricos, é um detector sensível à intensidade de corrente. Nos instrumentos analógicos antigos esse detector central é o chamado galvanômetro d'Arsonnal, baseado na interação entre a corrente elétrica e um campo magnético gerado por um ímã comum. Nesse caso, essa interação provoca um torque entre a bobina na qual passa a corrente elétrica e o ímã, provocando a rotação da mesma. Essa bobina está acoplada a uma agulha cuja deflexão é proporcional à corrente que passa pela bobina.

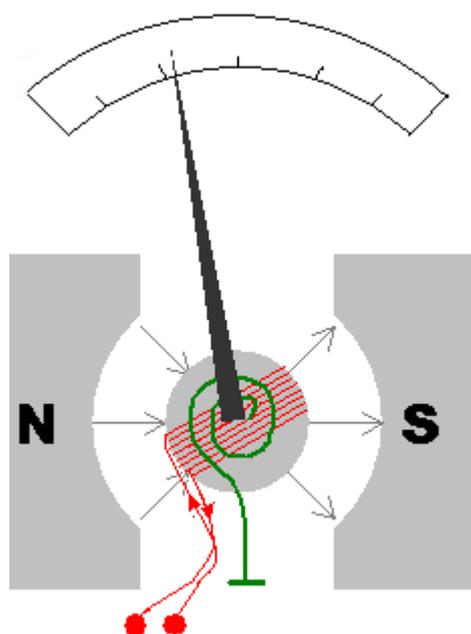


Figura 3.11 – Galvanômetro normalmente utilizado em multímetros analógicos.

Nos instrumentos digitais faz-se passar a corrente por resistores de alta precisão e o sinal de tensão elétrica nesses resistores é digitalizado por um chip conversor analógico-digital e apresentado numericamente no mostrador do aparelho. Nos mostradores mais antigos os segmentos que formavam os dígitos são LEDs, que acarretam grande consumo de bateria. Nos multímetros modernos, as telas de LEDs são substituídas por monitores de cristal líquido, cujo consumo de energia é muito menor. Uma consequência inevitável é a necessidade constante do uso de uma fonte de energia elétrica (em geral bateria) para o funcionamento do multímetro digital, o que não é necessário no caso de multímetros analógicos (somente se o multímetro estiver sendo utilizado como ohmímetro).

Os multímetros possuem diversas funções de uso e diferentes escalas de leitura, normalmente selecionadas através de botões ou chaves seletoras, ou por diferentes conectores de cabos de sinais. Dependendo da seleção

feita no multímetro, o mesmo pode funcionar como amperímetro (medidor de corrente elétrica), voltímetro (medidor de tensão elétrica) e ohmímetro (medidor de resistência elétrica) em diversos fundos de escala e precisão. Essa mudança é realizada intercalando-se resistores apropriados em série ou em paralelo no circuito do medidor. No caso do ohmímetro, além de resistores, inclui-se uma bateria ao circuito. Quando se seleciona medidas de tensão ou corrente alternadas são também intercalados diodos retificadores permitindo a leitura de valores eficazes de tensão e/ou corrente.

A forma mais simples de descrever um multímetro, quando utilizado como amperímetro ou voltímetro, se dá através do modelo simples de um medidor (tensão ou corrente) acoplado em série com uma resistência elétrica, conforme mostra a figura 3.12. Essa resistência em série representa a resistência interna do medidor e depende da função escolhida bem como do fundo de escala selecionado.

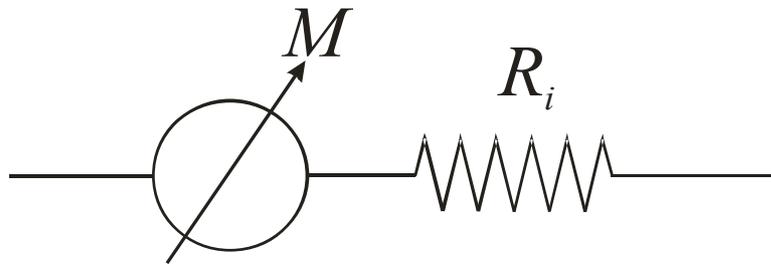


Figura 3.12 – Modelo simples para voltímetro e amperímetro. O medidor M indica um voltímetro ou amperímetro ideal enquanto R_i indica a sua resistência interna.

O ohmímetro

Quando o multímetro está configurado para funcionar como ohmímetro o objetivo do experimentador é medir, diretamente, valores de resistência elétrica de um determinado elemento como, por exemplo, um resistor comercial comum.

Um ohmímetro corresponde a um circuito no qual um galvanômetro está acoplado, em série, a uma bateria e a um resistor variável, conforme mostra a Figure 3.13. Para fazer a medição liga-se o elemento X diretamente nos terminais do ohmímetro, conforme é mostrado na figura. Como o ohmímetro possui uma bateria interna haverá uma corrente passando pelo elemento X. Esta corrente depende da tensão da bateria e das resistências envolvidas. Deste modo, podemos escrever que a corrente que passa pelo circuito é:

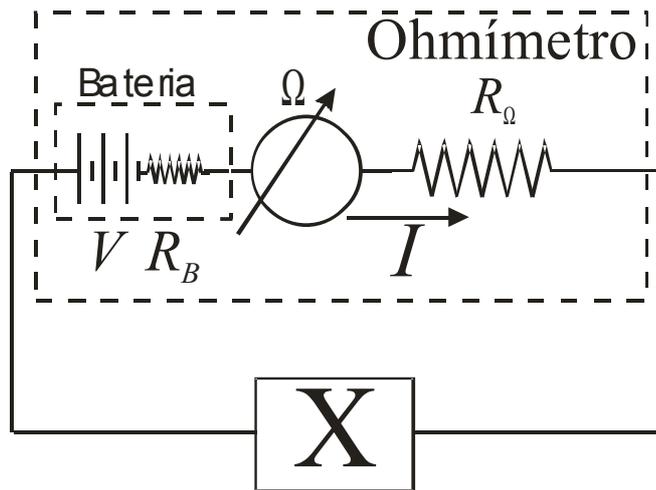


Figura 3.13 – Esquema de um ohmímetro e sua utilização.

$$i = \frac{V}{R_{total}} = \frac{V}{R_X + R_B + R_\Omega}$$

De tal modo que a resistência do elemento X pode ser dada por:

$$R_X = \frac{V}{i} - R_B - R_\Omega$$

Em geral, multímetros modernos utilizam uma bateria padrão de tal forma que a tensão é constante, tipicamente $V=9V$. Como o galvanômetro possui um fundo de escala fixo, a escala do ohmímetro é selecionada através da alteração do resistor R_Ω . O resistor R_B corresponde à resistência interna da bateria. Baterias novas possuem R_B pequeno. Contudo, com o uso da bateria, o valor de R_B aumenta. Como o valor de R_B depende das características da bateria, em geral, os ohmímetros não consideram este valor no cálculo de R_X . Deste modo, o ohmímetro não é um instrumento adequado para medir resistências muito baixas pois qualquer alteração em R_B provoca uma alteração significativa de R_X .

O voltímetro

Quando o multímetro está operando como voltímetro o objetivo do experimentador é realizar uma medida de tensão elétrica (V_X) em um determinado componente de um circuito elétrico. Nesse caso, o voltímetro é montado em paralelo ao elemento X no qual se quer medir a tensão elétrica, conforme mostrado na figura 3.14.

Deve-se tomar cuidado, contudo, quando se utiliza o voltímetro para medida de tensão elétrica. Como ele também é um componente elétrico ele altera o circuito no qual o elemento X está montado, alterando a corrente

elétrica que passa pelo elemento. Como o voltímetro é montado em paralelo, parte da corrente elétrica total (i), que inicialmente passa pelo elemento X, é desviada para o voltímetro, de tal forma que a corrente que passa pelo elemento X, após o voltímetro ser ligado, é:

$$i_X = i - i_V$$

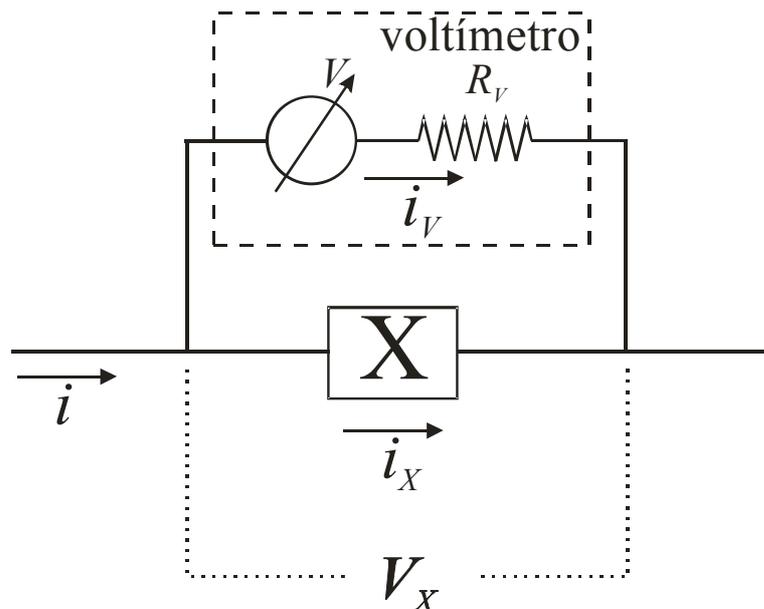


Figura 3.14 – Montagem de um voltímetro para efetuar a medida de tensão de um elemento X.

Supondo que o elemento X possui uma resistência R_X e, sabendo que a tensão sobre o voltímetro é a mesma que sobre o elemento X, de tal modo que $R_X i_X = R_V i_V$, a corrente no elemento X é alterada para:

$$i_X = \frac{i}{1 + \frac{R_X}{R_V}}$$

Para minimizar o efeito do voltímetro na corrente sobre o elemento X, o voltímetro deve ser construído de tal modo que $R_V \gg R_X$. Assim, a corrente elétrica sobre o elemento X praticamente não se altera. Contudo, antes de utilizar um voltímetro deve-se sempre avaliar o impacto do mesmo sobre o circuito.

O amperímetro

Quando o multímetro está operando como amperímetro o objetivo do experimentador é realizar uma medida de corrente elétrica (i_X) em um

determinado componente de um circuito elétrico. Nesse caso, o voltímetro é montado em série ao elemento X no qual se quer medir a corrente elétrica, conforme mostrado na figura 3.15.

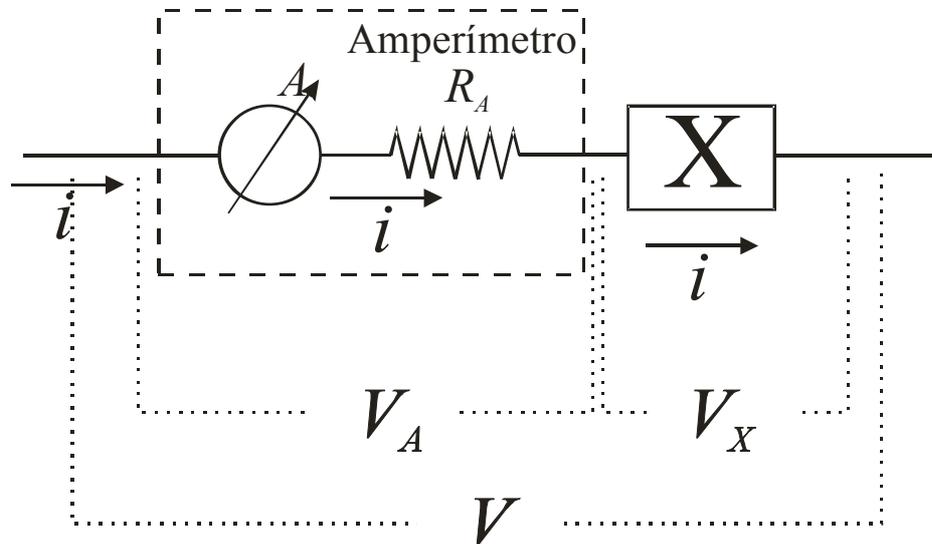


Figura 3.15 – Montagem de um amperímetro para efetuar a medida de corrente de um elemento X .

Deve-se tomar cuidado, contudo, quando se utiliza o amperímetro para medida de corrente elétrica. Como ele também é um componente elétrico ele altera o circuito no qual o elemento X está montado, alterando a tensão elétrica no elemento X . Como o amperímetro é montado em série, parte da tensão elétrica total (V), que inicialmente atua sobre elemento X , é consumida pelo amperímetro, de tal forma que a tensão elétrica sobre o elemento X , após o amperímetro ser ligado é:

$$V_X = V - V_A$$

Supondo que o elemento X possua uma resistência R_X e, sabendo que a corrente sobre o amperímetro é a mesma que sobre o elemento X , de tal modo que $V_X/R_X = V_A/R_A$, a tensão no elemento X é alterada para:

$$V_X = \frac{V}{1 + \frac{R_A}{R_X}}$$

Para minimizar o efeito do amperímetro na tensão sobre o elemento X , o amperímetro deve ser construído de tal modo que $R_A \ll R_X$. Assim, a tensão elétrica sobre o elemento X praticamente não se altera. Contudo, antes de utilizar um amperímetro deve-se sempre avaliar o impacto do mesmo sobre o circuito.

Capítulo IV

Interpretação gráfica de dados

Este texto foi baseado nas apostilas “Introdução à interpretação gráfica de dados, gráficos e equações”, 1990, dos Profs. Fuad Saad, Paulo Yamamura e Kazuo Watanabe; “Física Geral e Experimental para Engenharia I”, 2003, dos Profs. Ewout ter Haar e Valdir Bindilati.

1. Introdução

Nas atividades experimentais, muitas vezes, objetiva-se estudar a maneira como uma propriedade, ou quantidade, varia com relação a uma outra quantidade, por exemplo:

“De que modo o comprimento de um pêndulo afeta o seu período?”

ou ainda:

“Como se comporta a força de atrito entre duas superfícies relativamente à força normal exercida por uma superfície sobre a outra?”

Tais questões podem ser estudadas e mais bem respondidas, muitas vezes, através de métodos gráficos evidenciando, dessa forma, a dependência de uma grandeza em relação à outra. Neste capítulo apresentaremos os principais tipos de gráficos disponíveis bem como técnicas para a sua confecção. Apresentaremos também alguns métodos de análise gráfica de dados de forma a poder extrair informações e interpretar resultados experimentais.

2. Tipos de gráficos

Os gráficos, de modo geral, podem ser classificados em cinco tipos básicos, conforme o esquema apresentado na figura 2.1. Dependendo do tipo de análise a ser realizada um tipo de gráfico torna-se mais adequado que outro. Nos trabalhos experimentais em Ciências são frequentemente utilizados gráficos do tipo diagrama, ou linha, conforme o apresentado na figura 2.2. Nesse gráfico é mostrado o comportamento de uma grandeza física, nesse caso a velocidade de um corpo, em função do tempo. Pode-se perceber facilmente que a velocidade aumenta com o passar do tempo. A

grande vantagem de análises gráficas é a interpretação direta e fácil de dados experimentais. A linha tracejada, nesse caso, representa o comportamento médio dos dados obtidos e representa a tendência dos dados.

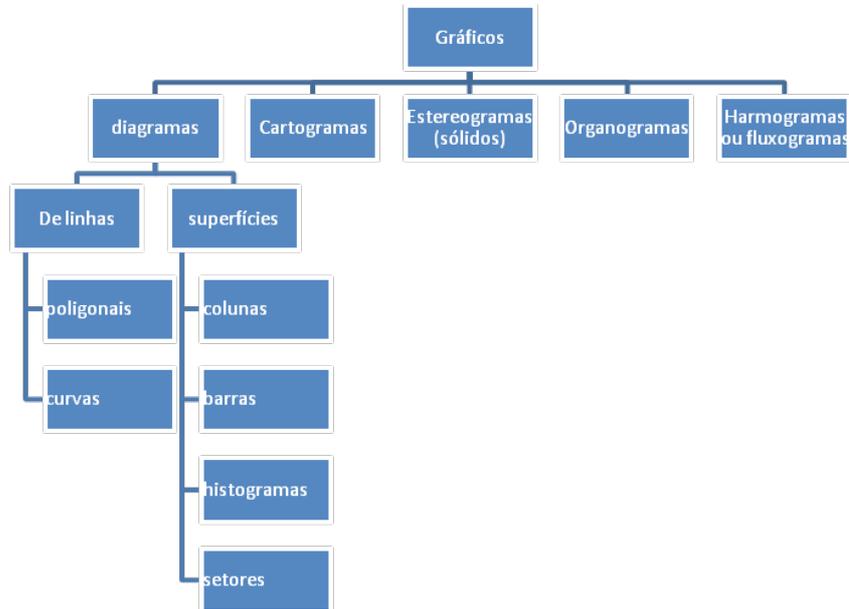


Figura 2.1: Principais tipos de gráficos

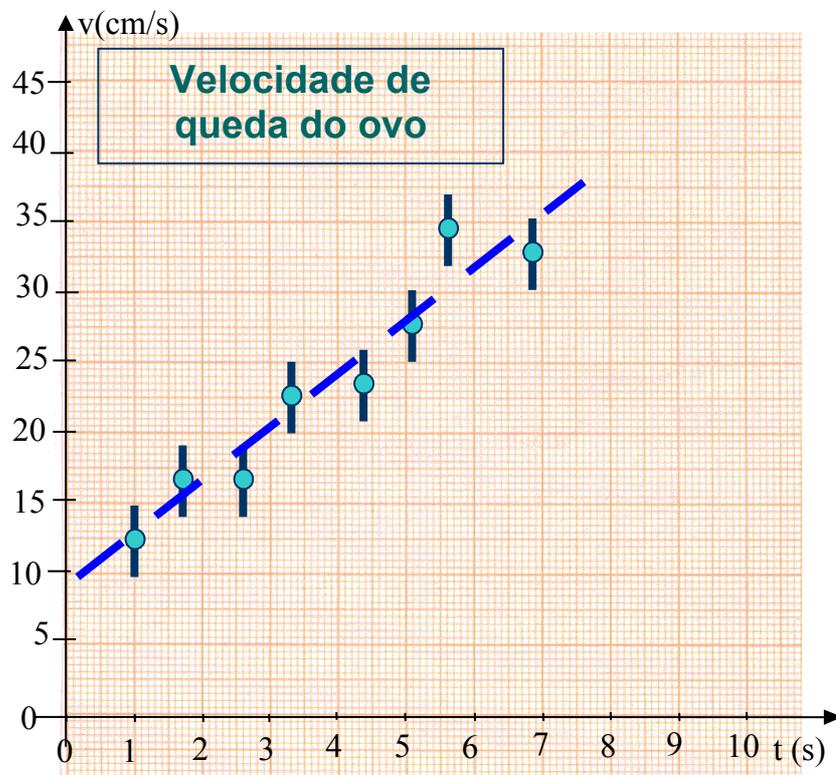


Figura 2.2: Exemplo de gráfico linear. Nesse gráfico, os pontos correspondem às medidas experimentais e a linha representa o comportamento médio.

3. Confeção de gráficos

Quando são realizados experimentos, os dados são adquiridos, geralmente, de dois modos:

No primeiro modo, quer-se examinar a dependência de uma grandeza em relação à outra, como, por exemplo, os dados apresentados na figura 2.2. Nesse caso, mede-se a velocidade do corpo em instantes consecutivos de tempo e analisa-se como a velocidade depende do tempo. Em medidas desse tipo, costuma-se denominar de variável independente aquela que se varia, nesse caso, o tempo. A grandeza na qual se quer estudar a dependência, nesse caso a velocidade, é denominada de variável dependente.

No segundo caso, o mesmo experimento é repetido muitas vezes nas mesmas condições e, em cada um desses experimentos, repete-se a medida de uma determinada grandeza. Nesse caso, querem-se estudar as variações de medidas devido às incertezas experimentais. Um caso típico é a medida do período de oscilação de um pêndulo simples. Dependendo dos instrumentos utilizados, a medida simples de um único período resulta, geralmente, em incertezas experimentais elevadas que podem ser minimizadas através da repetição do experimento muitas vezes. Assim, a medida final seria a média aritmética de todas as medidas efetuadas.

Em ambas as situações costuma-se organizar os dados em tabelas. Essas tabelas podem-se tornar demasiadamente longas e de difícil leitura. A representação desses dados em forma gráfica mostra, de forma mais clara, as propriedades das grandezas medidas. O gráfico mostra, igualmente, prováveis erros experimentais e permite realizar interpolações e extrapolações de modo visível e fácil.

No primeiro exemplo pode-se visualizar graficamente o comportamento da velocidade em função do tempo através de um gráfico de linhas. No segundo caso, contudo, a melhor visualização gráfica é feita através de um histograma. Nesse tipo de gráfico é muito simples obter grandezas como média e desvio padrão das medidas.

Antes de abordar os tipos de gráfico acima, devemos estabelecer algumas regras gerais de confeção de gráficos. Essas regras se aplicam a quase todos os tipos disponíveis.

3.1. Regras gerais para confecção de gráficos

A construção de gráficos, quando feita sob regras universais, facilita significativamente a sua interpretação. Nesse sentido, regras rígidas (como regras de sintaxe de uma linguagem qualquer) são adotadas no mundo científico e tecnológico².

Todo gráfico é composto dos seguintes itens:

1. Título e legenda do gráfico;
2. Eixos das variáveis com os nomes das variáveis, escalas e unidades;
3. Dados experimentais e incertezas;
4. Funções teóricas ou curvas médias (esse último item é opcional e, dependendo das circunstâncias, pode ser omitido);

A figura 3.1 mostra os principais componentes de um gráfico.

Título e legenda do gráfico

Todo gráfico deve ter um título. Geralmente, o título do gráfico é colocado na parte superior do gráfico, em destaque. Títulos do tipo “gráfico de velocidade vs. tempo” são redundantes e não fornecem informação necessária para o entendimento do mesmo.

Caso o gráfico seja inserido dentro de um texto, o mesmo deve ser acompanhado de uma legenda, logo abaixo do gráfico, numerada, que explique de forma sucinta o seu conteúdo. No caso da presença de uma legenda, o título do gráfico torna-se opcional, já que a legenda acaba suprindo o leitor de informação suficiente para o entendimento do gráfico.

Eixos, escalas e unidades

Os eixos de um gráfico devem ser explicitamente desenhados. Cada um dos eixos deve conter o nome (ou símbolo) da variável representada, a escala de leitura e a unidade correspondente.

A escolha da escala utilizada deve ser tal que represente bem o intervalo medido para a variável correspondente. A regra prática para

² Programas computacionais de geração de gráficos não destinados à área científica, como o Excel, são muito limitados e possuem várias falhas no que diz respeito à confecção correta de gráficos e o seu uso é fortemente desaconselhado no mundo científico e tecnológico.

definir a escala a ser utilizada consiste em dividir a faixa de variação da variável a ser graficada pelo número de divisões principais disponíveis. Toma-se, então, um arredondamento para um valor superior e de fácil leitura. Esses valores são, em geral, 1, 2, 5 ou múltiplos/sub-múltiplos de 10 desses valores (10; 20; 500; 0,5; etc.). A figura 3.2 mostra alguns exemplos de escalas do eixo de um gráfico. Múltiplos de 3 são de difícil leitura e devem ser evitados.

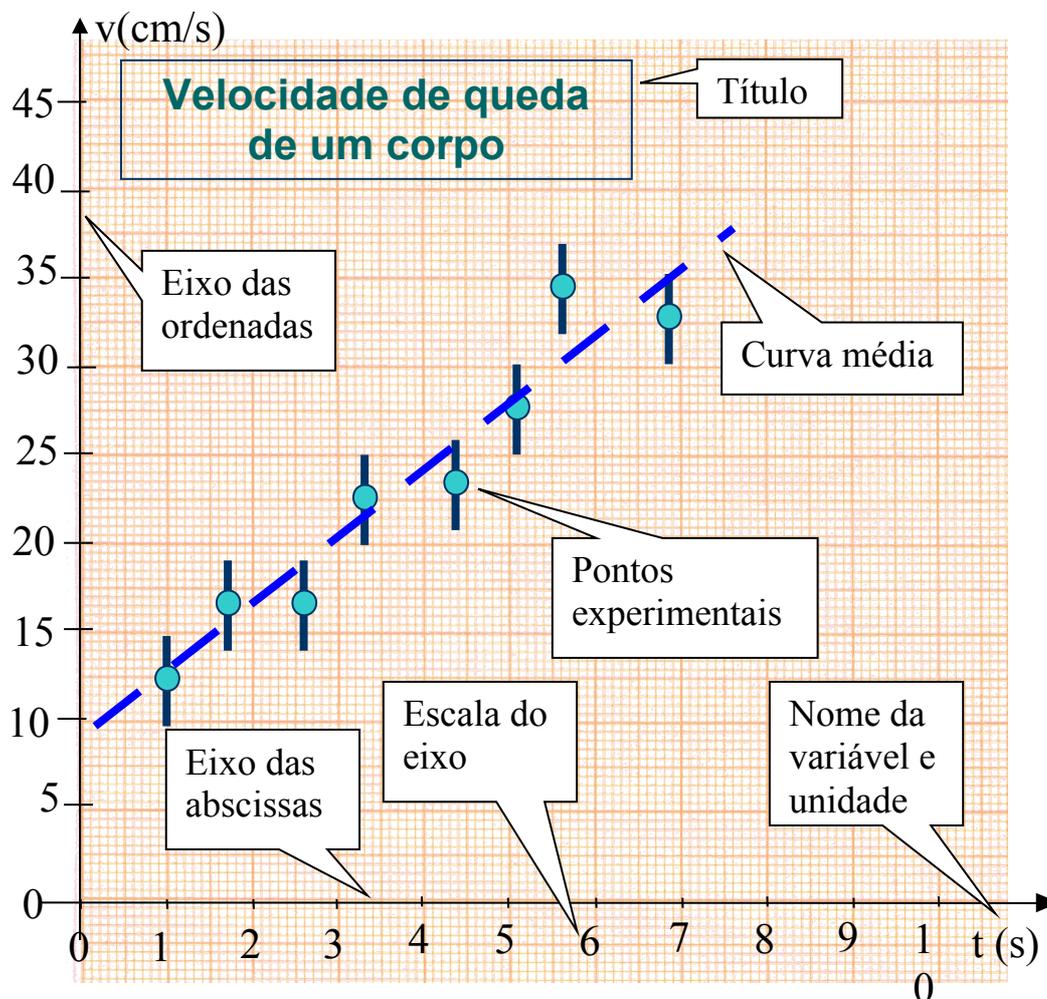


Figura 3.1. Componentes típicos de um gráfico científico padrão.

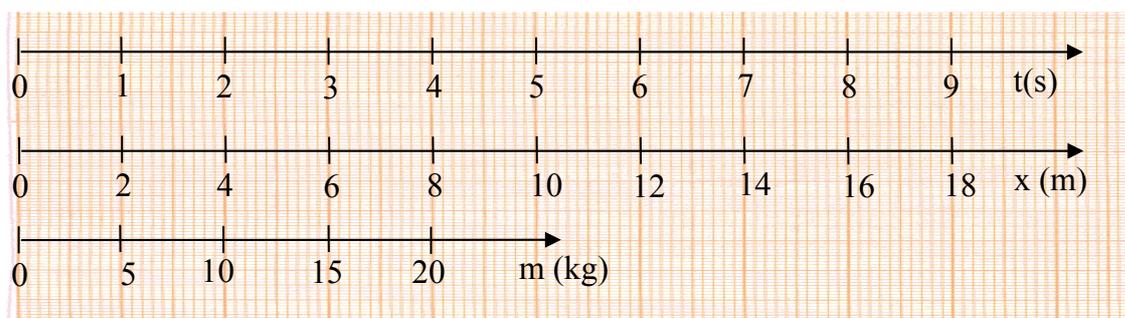


Figura 3.2. Alguns exemplos de formas CORRETAS de desenhar eixos em um gráfico.

As escalas de um gráfico não precisam começar na origem (0, 0). Elas devem abranger a faixa de variação que você quer representar. É conveniente que os limites da escala correspondam a um número inteiro de divisões principais. Indique os valores correspondentes às divisões principais abaixo (eixo-x) ou ao lado (eixo-y) da escala utilizando números legíveis. As unidades devem ser escolhidas de maneira a minimizar o número de dígitos utilizados na divisão principal (ver a terceira escala, de cima para baixo, na figura 3.2. Nesse caso, utilizou-se a escala de quilograma). Uma regra prática é utilizar no máximo 3 dígitos para representar esses valores. Pode-se também fazer o uso de potências de 10 na expressão das unidades para simplificar a escala.

Ao traçar os eixos em papel gráfico comum, não use a escala marcada no papel pelo fabricante. Você é quem define a escala. Também evite usar os eixos nas margens do papel. Desenhe os seus próprios eixos. Na figura 3.3 são mostradas algumas formas INCORRETAS de desenhar eixos de gráfico. Um erro muito comum é colocar nos eixos os valores medidos para cada variável. Esse é um erro MUITO grosseiro que torna o gráfico ilegível.

Por fim, escreva o nome (ou símbolo) da variável correspondente ao eixo e a unidade para leitura dos valores entre parêntesis (s, kg, 10^5 N/m², etc.). No final das contas, o melhor critério para desenhar um eixo de um gráfico é o bom-senso. O teste final para saber se o eixo utilizado é adequado é a escolha aleatória de um ponto qualquer. O leitor deve ser capaz de identificar rapidamente o valor correspondente desse ponto através da leitura do eixo no gráfico.

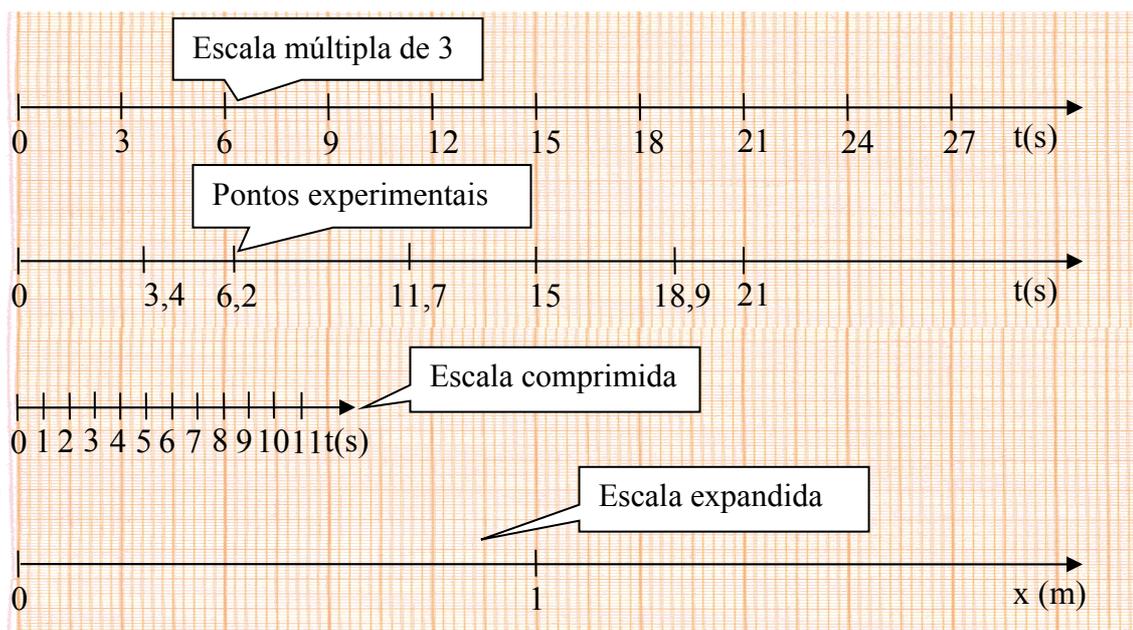


Figura 3.3. Algumas formas INCORRETAS de desenhar eixo em um gráfico.

Dados, funções teóricas e curvas médias

Assinale no gráfico a posição dos pontos experimentais: use marcas bem visíveis (em geral círculos cheios). NUNCA indique as coordenadas dos pontos graficados no eixo. Coloque as barras de incerteza nos pontos, se for o caso. Se as incertezas são menores que o tamanho dos pontos, indique isso na legenda.

NUNCA LIGUE OS PONTOS. Esse é um erro grosseiro de confecção de gráficos, muito utilizado em programas de computadores. A figura 3.4 mostra como desenhar os pontos experimentais em um gráfico.

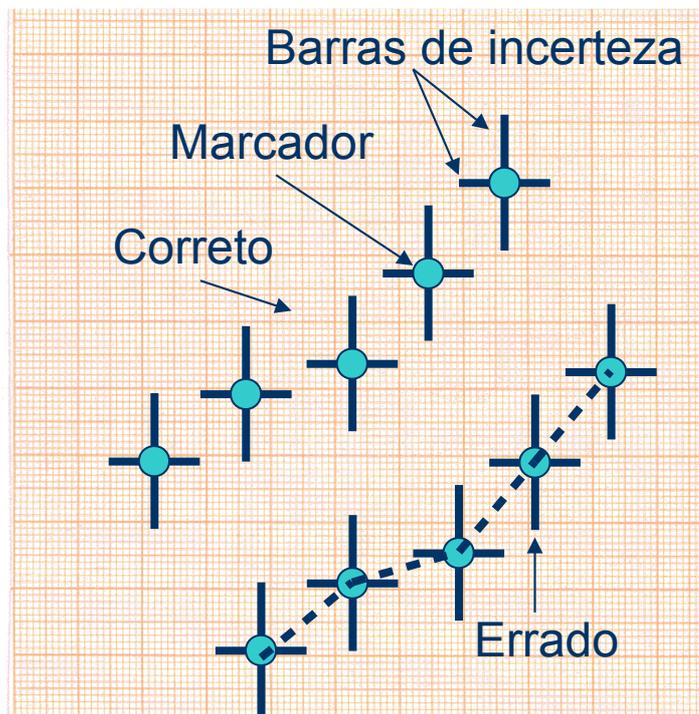


Figura 3.4. Representação de pontos experimentais em um gráfico. NUNCA LIGUE OS PONTOS. Indique as barras de incerteza (se for o caso) em cada ponto nos eixos x e y.

Às vezes, dependendo da análise a ser realizada com os dados, é necessário o desenho de curvas médias ou funções teóricas. Essas curvas têm como utilidade permitir a extrapolação e/ou interpolação de pontos, bem como a comparação entre os dados experimentais e uma previsão teórica. Esse ponto será discutido em detalhes adiante.

4. Gráficos de linhas

Gráficos de linhas são normalmente utilizados para representar a dependência de uma grandeza em relação à outra, como o gráfico apresentado na figura 2.2 que mostra a dependência com o tempo da

velocidade de queda de um ovo. São muitos os tipos de gráficos de linhas que podem ser construídos. Dentre os vários se destacam três tipos comumente utilizados, conforme representado na figura 4.1.

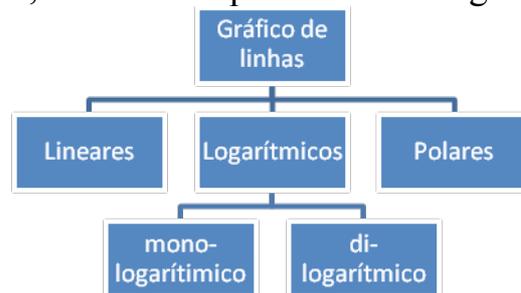


Figura 4.1. Principais tipos de gráficos de linhas utilizados no meio científico.

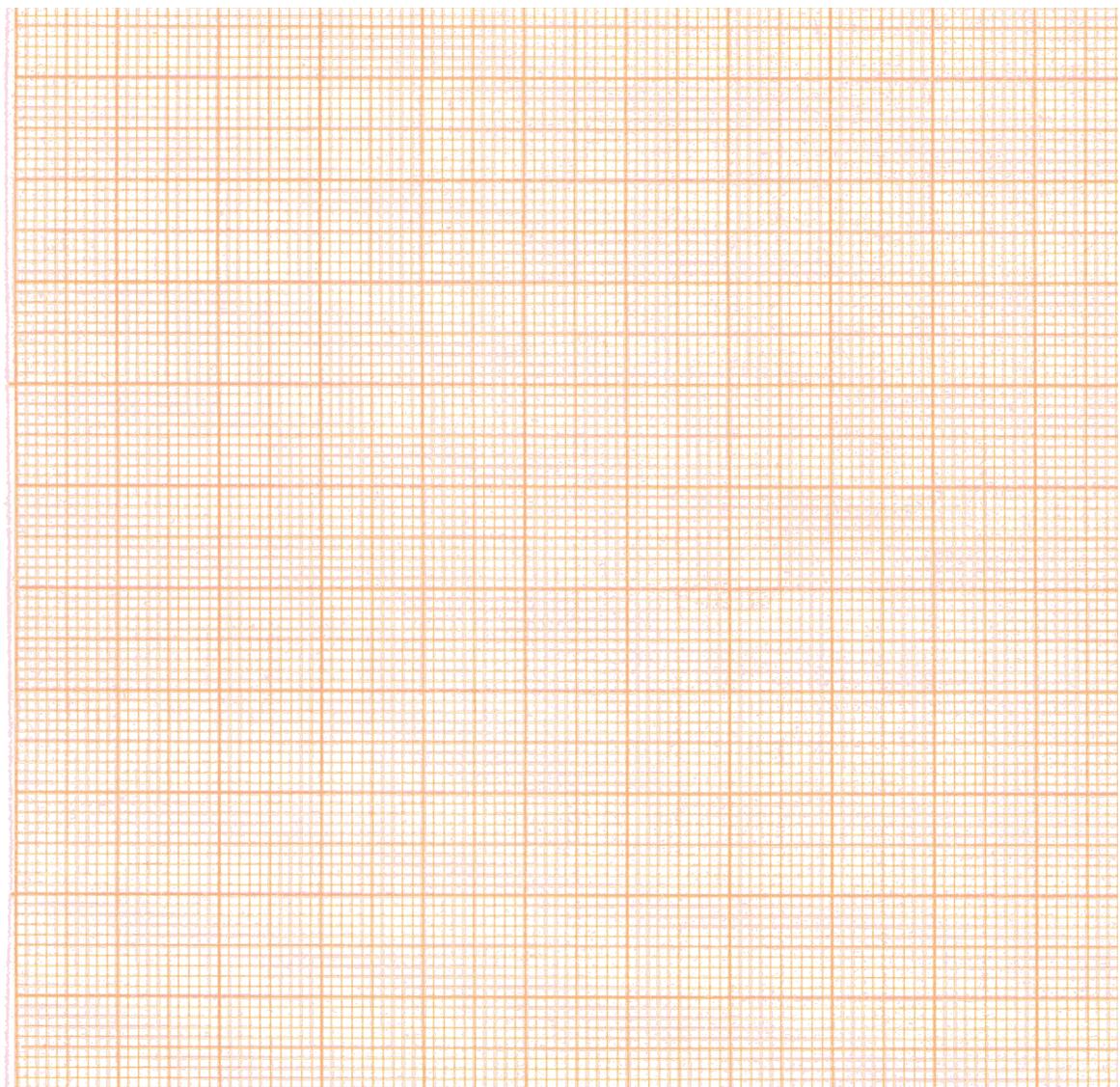


Figura 4.2. Papel em escala milimetrada. Nesse caso, ambas coordenadas são igualmente espaçadas em centímetros.

A escolha do tipo de gráfico está relacionada com os objetivos que se pretende alcançar. Um dos fatores que pode fornecer a ajuda na escolha é analisar a variação dos dados adquiridos. Por exemplo, uma grandeza que varia entre 10 Hz e 100 kHz (100000 Hz) torna-se impossível de ser graficada de forma eficiente em um gráfico linear, devido à grande variação entre um extremo e outro. Nesse caso, gráficos logarítmicos são mais adequados para representar dados desse tipo.

4.1. Escalas lineares

Gráficos em escalas lineares são os mais simples de serem realizados. Como o próprio nome diz, gráficos em escalas lineares são aqueles nos quais ambos os eixos (x e y) são lineares, ou seja, a escala representada no eixo é diretamente proporcional à distância do ponto em relação à origem do eixo.

Gráficos em escalas lineares são desenhados normalmente em papéis milimetrados, conforme mostra a figura 4.2. Você pode usar a figura 4.2 como modelo para gráficos lineares. Basta fazer cópias xérox da figura e utilizar para os seus gráficos.

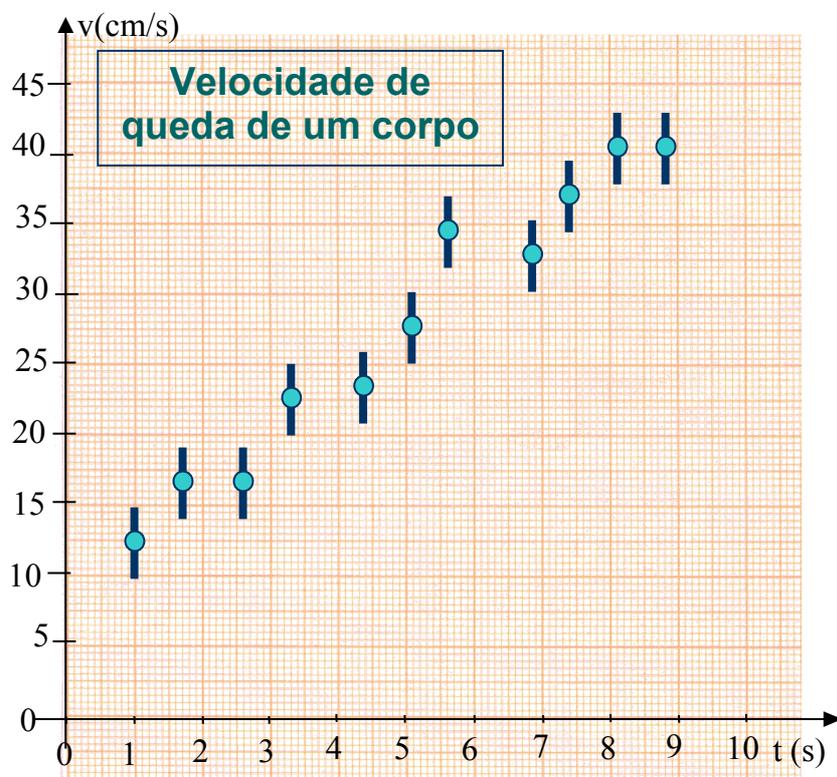


Figura 4.3. Velocidade de queda de um ovo.

Um exemplo de gráfico em escala linear é mostrado na figura 4.3. Nesse caso, grafica-se a velocidade instantânea de queda de um ovo como função do tempo de queda.

Traçando curvas médias

Muitas vezes quer-se extrair informações mais complexas de um gráfico. Poderíamos perguntar, por exemplo, utilizando o gráfico da figura 4.3, qual seria a velocidade do ovo no instante 15 segundos, caso o tipo de movimento não se altere? Qual é a velocidade inicial de queda desse ovo e qual a sua aceleração média? Perguntas como essas podem ser respondidas combinando-se o conhecimento adquirido de Física com algumas técnicas de análise gráfica.

Existem técnicas matemáticas e testes sofisticados³ para determinar o comportamento de dados e permitir extrapolações e interpolações. O aprendizado dessas técnicas foge ao escopo desta disciplina introdutória. Contudo, o método descrito a seguir pode, se executado de forma criteriosa, fornecer resultados muito próximos daqueles obtidos a partir de métodos matemáticos rigorosos.

De modo geral, pode-se desenhar curvas médias sobre conjunto de dados utilizando-se a curva francesa (ver figuras 4.4 e 4.5). O uso de curva francesa exige prática, porém pode-se conseguir resultados bastante satisfatórios.



Figura 4.4. Alguns exemplos de curva francesa. A curva francesa é comumente utilizada para traçar curvas médias de gráficos científicos.

³ Para mais detalhes ver o livro “Fundamentos da Teoria de Erros”, José Henrique Vuolo, Editora Edgard Blücher Ltda.

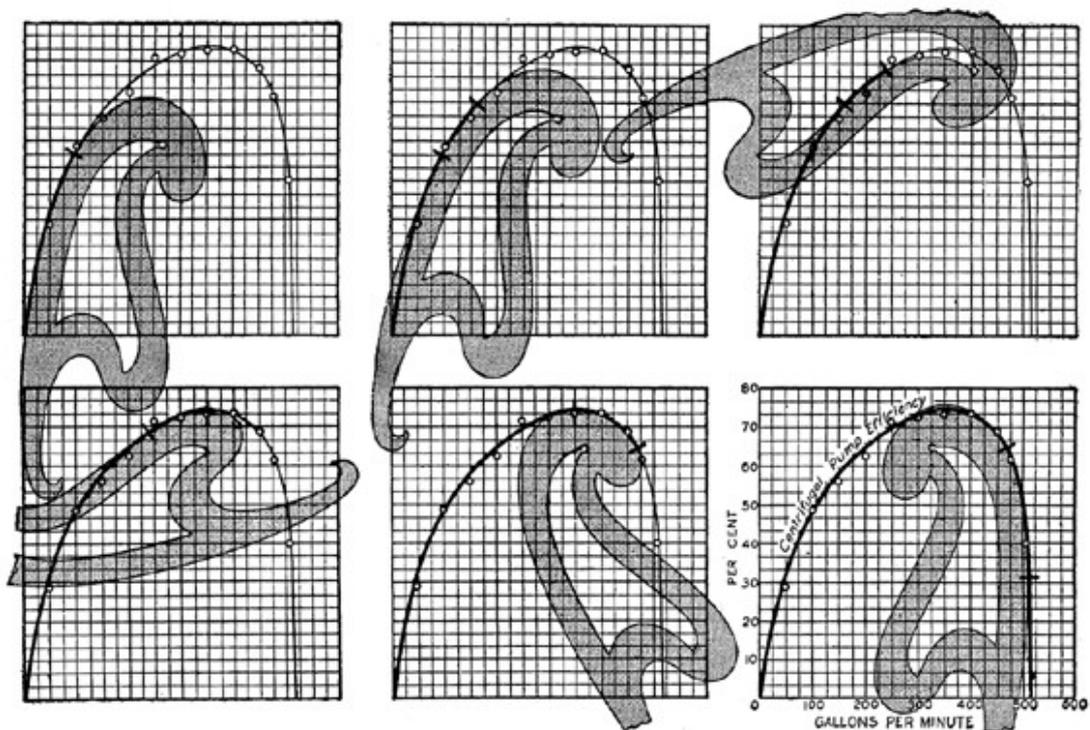


Figura 4.5. Exemplo da utilização da curva francesa para traçar uma curva média em um gráfico científico.

Um inconveniente do uso geral de curvas francesas é o fato de, apesar das curvas médias serem bastante satisfatórias, é difícil obter informações numéricas de forma direta. Além disso, pelo fato da curva obtida ser um guia visual, extrapolações para valores fora do intervalo onde os dados foram medidos são muito imprecisas e não devem ser feitas.

Contudo, existe um caso particular onde o traçado de curvas médias fornece várias informações sobre os dados graficados. Isso ocorre quando o gráfico entre duas grandezas pode ser representado por uma reta. Assim, a curva média obtida é uma reta, que pode ser desenhada utilizando-se uma régua simples.

Vamos re-examinar os dados na figura 4.3. Percebe-se que a dependência entre velocidade e tempo ocorre de forma mais ou menos linear (lembre-se de considerar as incertezas dos pontos experimentais). Para traçar uma reta média, nesse caso, deve-se utilizar uma régua e a reta desenhada deve ser tal que os pontos fiquem aleatoriamente distribuídos em torno dessa reta. Esse desenho é feito de forma manual e exige senso crítico por parte da pessoa que está realizando a análise. A figura 4.6 mostra o mesmo conjunto de dados com a reta média correspondente.

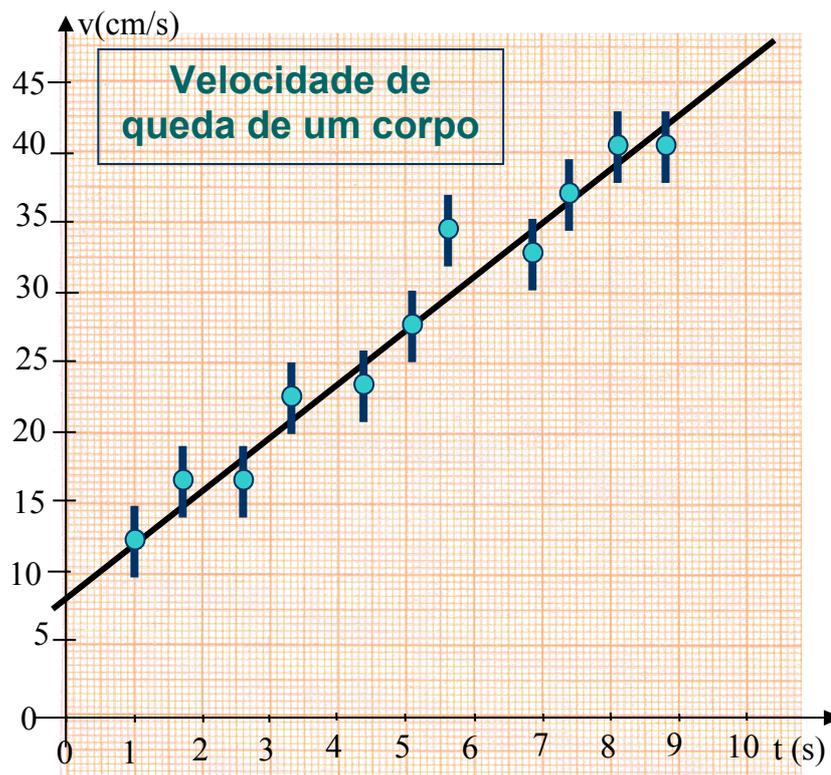


Figura 4.6. Velocidade de queda de um ovo com a sua respectiva reta média que é utilizada para extrair informações numéricas a respeito do movimento de queda.

Note que a reta média não necessariamente deve passar por todos os pontos experimentais (veja ponto com $t = 5,6$ s) e, não necessariamente, deve passar pelo primeiro e último pontos do gráfico. O critério é que os pontos fiquem distribuídos em torno da reta da forma mais aleatória possível.

Deve-se ter cuidado com o uso dessa técnica para traçar retas médias. Em muitos casos, apesar das incertezas experimentais serem suficientemente grandes, os pontos não ficam aleatoriamente distribuídos em torno da reta. Nesse caso, é evidente que a função que descreve a curva média não deve ser uma reta. Um exemplo é mostrado na figura 4.7. Note que os pontos não estão igualmente distribuídos em torno da reta média. Nota-se que, apesar do número de pontos sobre a reta ser equivalente ao número de pontos sob a reta, há a tendência de haver pontos na parte inferior somente nos extremos do gráfico enquanto os pontos superiores encontram-se na região central do gráfico. Esse é um exemplo claro de que a curva média selecionada (reta) não é adequada para descrever os dados experimentais. Mais uma vez, existem métodos matemáticos para avaliar se a função utilizada é a que melhor descreve os dados experimentais, porém o aprendizado desse método foge ao escopo da disciplina. O desenvolvimento da intuição, nesse caso, é importante no julgamento dos resultados obtidos.

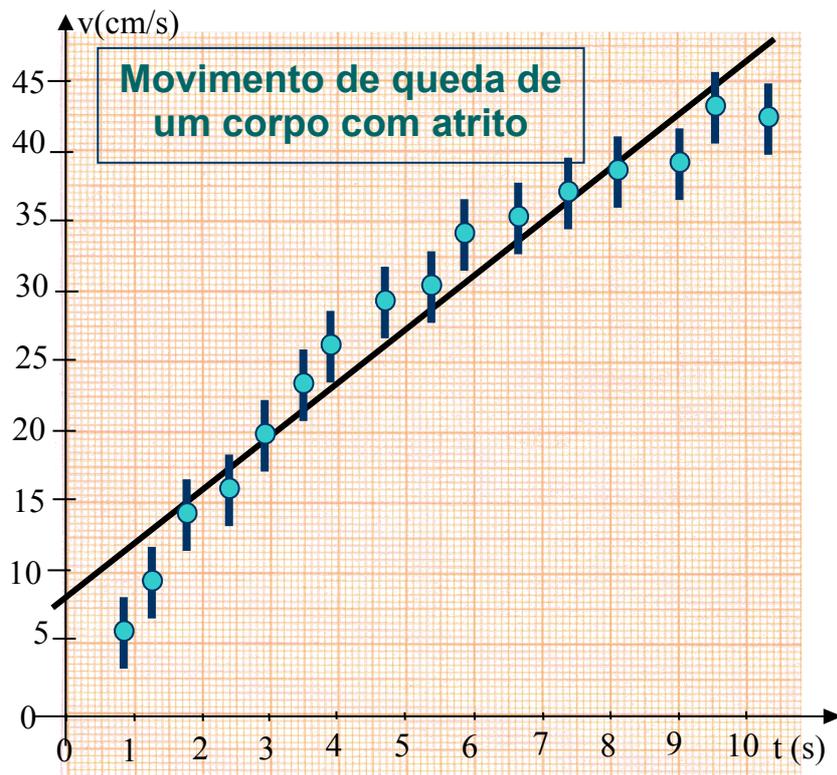


Figura 4.7. Conjunto de dados no qual o uso de uma reta média não é adequado para descrever o comportamento dos dados.

Em um gráfico de escalas lineares (papel milimetrado) retas são objetos geométricos simples de serem representados matematicamente. Nesse caso, a equação de uma reta pode ser escrita como:

$$y = ax + b$$

Onde y é a variável dependente e x é a variável independente. a e b são constantes, respectivamente denominadas coeficientes angular e linear.

Para obter os coeficientes a e b é necessário escolher dois pontos da reta média desenhada no gráfico. **ESCOLHA PONTOS BASTANTE DISTANTES!!!!** Pontos muito próximos acarretam em incertezas bastante elevadas e, muitas vezes, fora de controle. De preferência, escolha um ponto anterior ao intervalo dos dados e um ponto após o intervalo das medidas efetuadas. Vamos denominar esses pontos como sendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Utilizando a equação de reta acima, podemos escrever que:

$$y_1 = ax_1 + b \quad \text{e} \quad y_2 = ax_2 + b$$

Temos, nesse caso, duas equações e duas incógnitas (a e b). Podemos resolver o sistema acima de tal modo que:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad b = y_1 - ax_1$$

Note que os parâmetros a e b possuem unidades. A unidade de a é [unidade de y]/[unidade de x] enquanto a unidade de b é [unidade de y].

Note que, apesar do nome, o coeficiente angular não é igual à tangente do ângulo entre a reta e o eixo- x , porque as escalas de um gráfico são, em geral, diferentes nos eixos x e y , ao contrário do caso geométrico. Lembre-se que o coeficiente angular possui unidade enquanto tangente de um ângulo é um número adimensional. Em geral:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \tan \theta$$

Avaliação de incertezas nos coeficientes angular e linear

A representação gráfica, como vimos, é importante no sentido de ilustrar e sintetizar as relações entre grandezas representativas de um fenômeno. Contudo, medidas experimentais são sempre acompanhadas de suas respectivas incertezas, avaliadas pelos experimentadores. Essas incertezas são representadas graficamente através de barras de erro em cada ponto experimental, conforme mostrado nas figuras anteriores.

Uma pergunta natural que surge do ajuste da reta média, como o realizado na figura 4.6 reflete o fato das incertezas, bem como as flutuações nos pontos experimentais, permitirem que mais do que uma reta média possa ajustar razoavelmente os dados experimentais. É razoável pensar que os coeficientes angular e linear obtidos para a reta média possuem incertezas associadas. Como avaliar a incertezas desses coeficientes?

Tanto a escolha da melhor curva, como mencionado, como o cálculo das incertezas nos coeficientes, pode ser feito de forma rigorosa. Contudo, assim como há um método gráfico razoável para traçar a reta média, há também um método gráfico que pode ser utilizado para estimar as incertezas nos coeficientes obtidos. Esse método consiste em estimar duas retas, uma de máxima inclinação e outra de mínima inclinação, que ainda se adaptem de forma razoável aos dados experimentais. O procedimento a seguir tenta sistematizar esse método de tal forma que as incertezas obtidas sejam razoáveis.

Vamos voltar aos dados apresentados na figura 4.6. Imagine agora dois conjuntos de pontos. Um desses conjuntos tem coordenadas $(x, y + \sigma)$ enquanto o outro conjunto de pontos tem coordenadas $(x, y - \sigma)$, sendo σ a incerteza de cada um dos pontos do conjunto original, conforme mostrado na figura 4.8-a. Nessa figura esses conjuntos estão representados por

quadrados e triângulos, respectivamente. VOCÊ NÃO PRECISA DESENHAR ESSES PONTOS NOS SEUS GRÁFICOS! Eles são apenas guias visuais para fins didáticos. A seguir, traça-se duas retas, uma que melhor se adapte ao conjunto $(x, y + \sigma)$ e outra que melhor se adapte ao conjunto $(x, y - \sigma)$, conforme mostrado na figura 4.8-b. Note que essas retas não precisam ser paralelas entre si e nem mesmo paralelas à reta média ajustada.

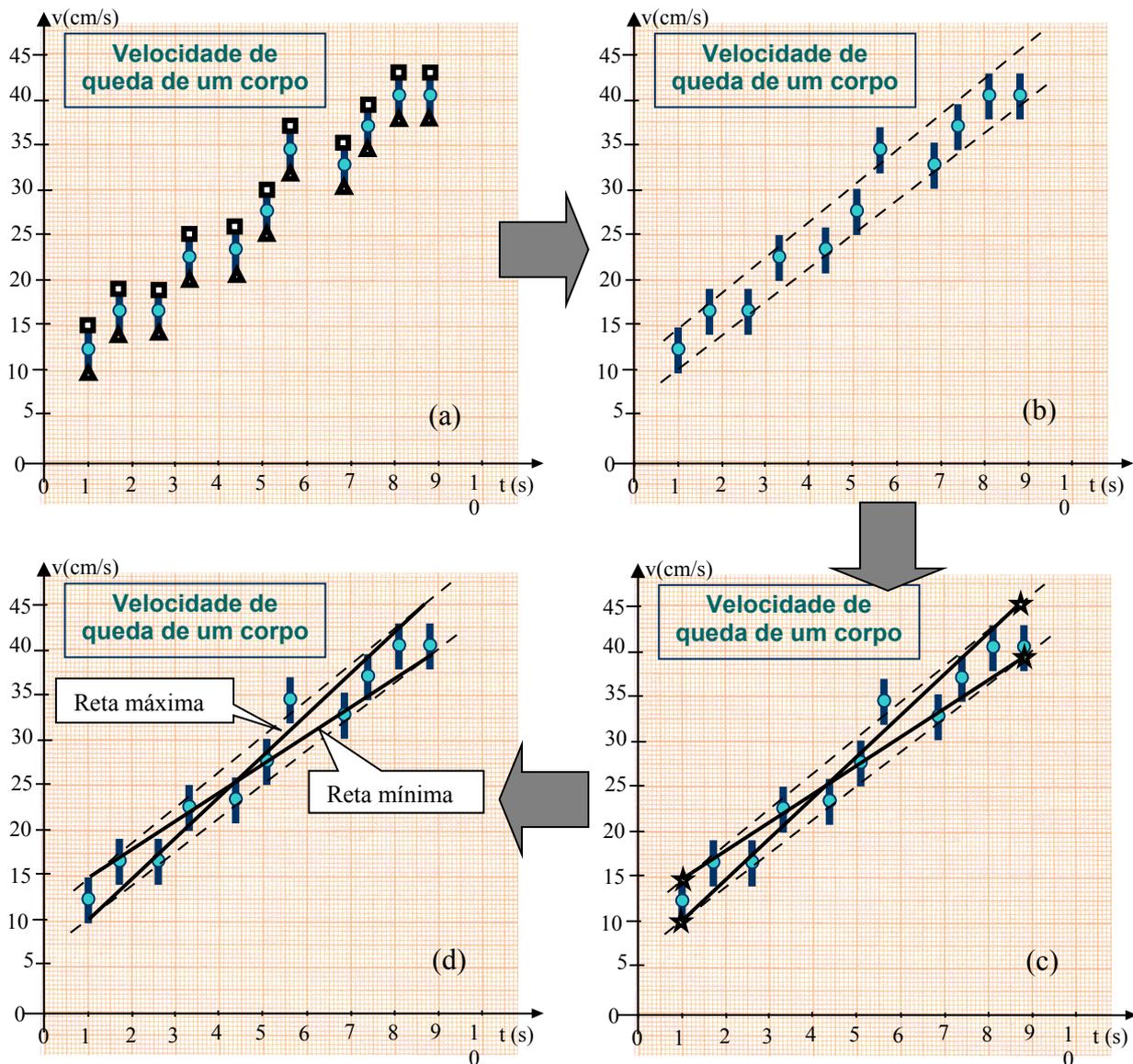


Figura 4.8. Procedimento para estimar as incertezas nos coeficientes da reta média.

A seguir, tomam-se os pontos nessas retas correspondentes ao menor e maior valor da variável x no conjunto de dados experimentais (ver estrelas na figura 4.8-c). Esses pontos servem de referência para traçar as retas máxima e mínima. Para traçar as retas máxima e mínima, ligam-se os

pontos marcados por estrelas, conforme mostrado na figura 4.8-c por retas contínuas.

A figura 4.8-d mostra a figura final obtida. As duas retas contínuas obtidas são denominadas retas máxima e mínima por possuírem, respectivamente, máxima e mínima inclinações. Para cada uma dessas retas calcula-se os coeficientes angulares e lineares, denominados, respectivamente a_{max} , b_{max} , a_{min} , b_{min} . As incertezas nos coeficientes da reta média podem ser obtidas através das expressões:

$$\sigma_a = \frac{|a_{max} - a_{min}|}{2} \quad \text{e} \quad \sigma_b = \frac{|b_{max} - b_{min}|}{2}$$

Linearização de dados

Provavelmente por razões biológicas, o ser humano sabe distinguir bem entre uma curva e uma reta. Porém, é muito difícil para o ser humano perceber, graficamente, a diferença entre uma curva dada por $y = x^2$ e outra dada por $y = x^4$. Em trabalhos técnico-científicos, os dados experimentais, nem sempre, produzem uma curva linear do tipo $y = ax + b$, fácil de extrair informações quantitativas, como descritas anteriormente. Nesse caso faz-se uso de técnicas de linearização de dados, de tal forma que os dados finais obtidos, quando graficados, forneçam uma linha reta, fácil de ser analisada. Experiência e bom senso são elementos importantes para essa operação, bem como o conhecimento da equação esperada para os dados originais.

O ingrediente básico para linearização de dados é o conhecimento da equação esperada para descrever os dados originais. A técnica consiste no uso dessa equação para realizar mudanças de variáveis de tal forma que o gráfico dessas novas variáveis seja uma reta.

Vamos tomar como exemplo um corpo em queda livre. Em um experimento, realizou-se a medida da altura desse corpo (h) para diversos instantes de tempo (t), conforme mostrado na tabela 4.1. Fazendo o gráfico de altura como função do tempo de queda, obtém-se a figura 4.9. Observando esse gráfico, percebe-se que ele tem uma forma de parábola com a concavidade para baixo. De fato, esse é o comportamento esperado para um corpo em queda livre. Assim, podemos supor que a equação que melhor descreveria o comportamento da altura em função do tempo pode ser escrita como:

$$h(t) = C + At^2$$

Onde C e A são constantes que devem ser obtidas a partir da análise dos dados. Como obtê-las?

t (s)	h (cm)	$z = t^2$ (s ²)
0,010	200	0,00010
0,225	173	0,0506
0,319	151	0,1018
0,390	124	0,1521
0,450	99	0,2025
0,504	76	0,2540
0,552	48	0,3047
0,596	26	0,3552
0,637	1	0,4058

Tabela 4.1. Altura (h) em função do tempo (t) para um corpo em queda livre.

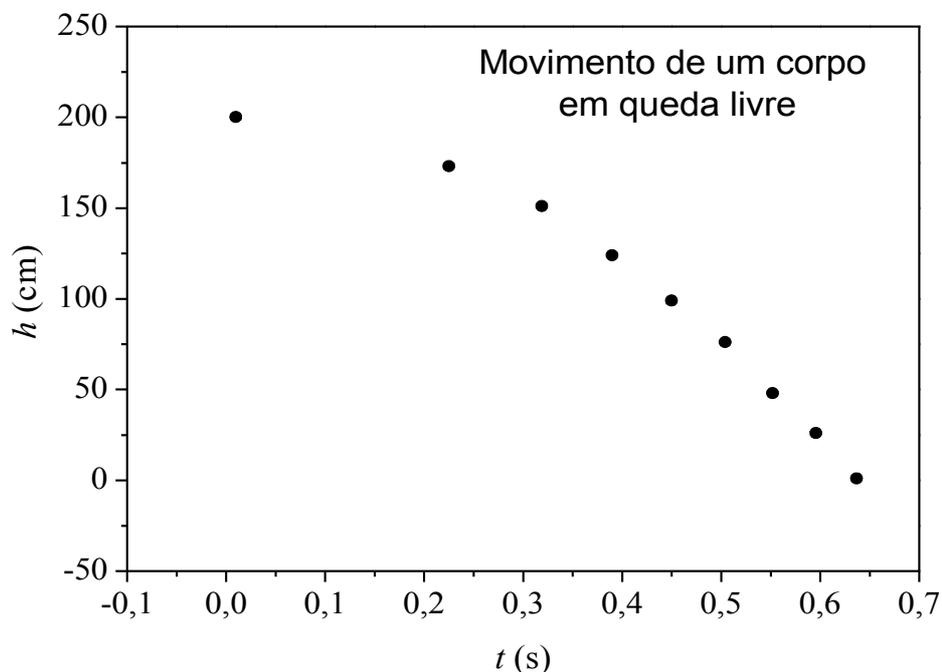


Figura 4.9 – Altura de um corpo em queda livre como função do tempo de queda.

Podemos testar se, de fato, a expressão $h(t) = C + At^2$ representa bem os dados obtidos utilizando técnicas de linearização. Para transformar essa expressão em uma reta, devemos fazer a mudança de variável $z = t^2$. Realizando essa mudança de variáveis obtemos a expressão:

$$h(t) = C + Az,$$

que é a equação para uma reta. A terceira coluna na tabela 4.1 mostra o valor da variável z , calculada a partir dos dados obtidos para o tempo de queda. A figura 4.10 mostra o gráfico da altura de queda em função da variável z . Pode-se descrever o gráfico obtido através de uma reta,

mostrando que a suposição utilizada para a linearização funciona adequadamente.

A partir de um ajuste de reta média, como descrita anteriormente, pode-se obter, sem complicações, os valores para os coeficientes C e A .

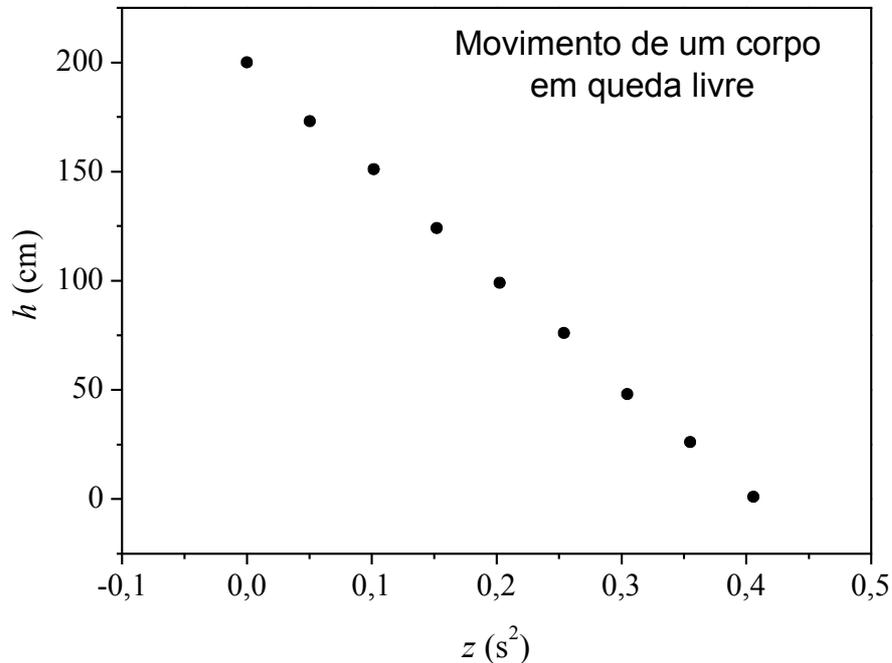


Figura 4.10 – Altura de um corpo em queda livre como função do tempo de queda ao quadrado.

Técnicas de linearização são muito utilizadas na análise gráfica de dados e simplificam consideravelmente o tratamento desses dados. Deve-se lembrar que, caso a mudança de variáveis ocorra sobre uma grandeza que possua incertezas, as incertezas associadas à nova variável devem ser obtidas através de técnicas de propagação de erros, como descritas nessa apostila.

4.2. Escalas logarítmicas

Em muitas situações é comum fazer gráficos de grandezas onde a dependência com uma outra variável é dada por expressões do tipo:

$$y(x) = A^{Bx} \quad \text{ou} \quad y(x) = Ax^B$$

Nesse caso, dependendo das constantes A e B , a grandeza $y(x)$ pode variar muitas ordens de grandeza a partir de pequenas variações de x . É claro que, nesse caso, mudanças de variáveis podem ser realizadas para tornar as equações acima retas. Em geral, as mudanças de variáveis mais comuns envolvem funções logarítmicas. No passado, o cálculo de logaritmos era bastante trabalhoso e envolvia consulta a tabelas (ou tábuas) de logaritmos, nem sempre disponíveis. Nesse sentido, foram criados papéis

gráficos especiais nos quais uma (ou ambas) das escalas é graduada logaritmicamente. A escala logarítmica é construída de tal forma que quando uma quantidade x é marcada nessa escala o comprimento (distância em relação à origem do eixo) é proporcional à $\log(x)$. Um trecho de uma escala logarítmica é mostrado na figura 4.11. Assim, a escala logarítmica é útil quando a mudança de variável necessária para linearizar o gráfico envolver o logaritmo de um número.

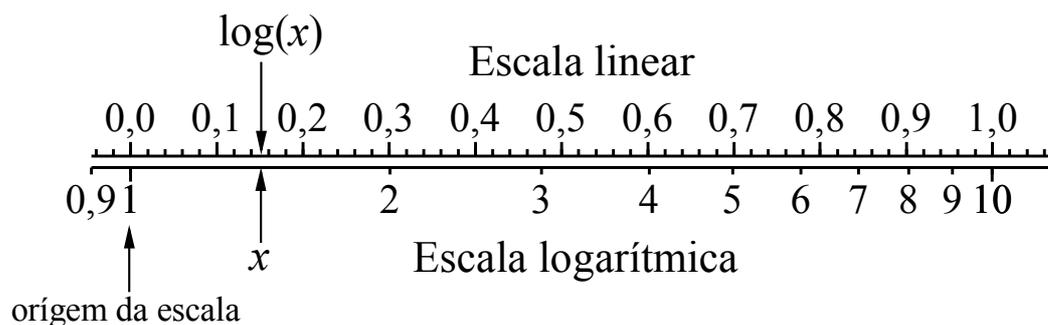


Figura 4.11. Escala logarítmica (abaixo) em comparação com a escala linear (acima). A escala logarítmica é construída de tal forma que quando uma quantidade x é marcada nessa escala o comprimento (distância em relação à origem do eixo) é proporcional a $\log(x)$.

Devido à forma na qual a escala logarítmica é construída, deve-se ficar atento para algumas regras de uso:

1. Não existe zero em escala logarítmica. Devido ao fato de $\lim_{x \rightarrow 0} (\log(x)) = -\infty$ é impossível definir o valor zero na escala.
2. A escala logarítmica é dividida em décadas. Cada década corresponde a uma ordem de grandeza decimal. A divisão da escala, em cada década, é idêntica de uma década para outra.
3. Pelo fato da posição da escala ser proporcional a $\log(x)$ não podemos escolher qualquer escala para fazer o gráfico. A posição equivalente ao 1 na escala logarítmica da figura 4.11 pode ser atribuída somente a números do tipo 1; 0,1; 10; 1000; etc. Do mesmo modo, a posição 3 só pode ser atribuída a números do tipo 3; 0,3; 30; 3000; etc.
4. Uma década subsequente tem que, necessariamente, possuir escala de tal forma que os números são marcados uma ordem de grandeza acima da década anterior. Por exemplo, caso a década anterior varie de 0,01 à 0,1; a década subsequente deve variar de 0,1 à 1 e assim sucessivamente.

Um uso interessante para a escala logarítmica diferente de fazer gráficos é a forma simples de calcular logaritmos. Como a posição de um valor x , na escala, é proporcional a $\log(x)$, e como o tamanho de uma década corresponde a variação de 1 em logaritmos ($\log(10x) - \log(x) = 1$, qualquer que seja x) podemos usar essa informação para o cálculo de logaritmos. Para isso, basta medir a distância d (em centímetros) da posição de x na escala logarítmica e o tamanho da década D , conforme mostra a figura 4.12. Desse modo, $\log(x)$ vale:

$$\log(x) = \frac{d \text{ (cm)}}{D \text{ (cm)}}$$

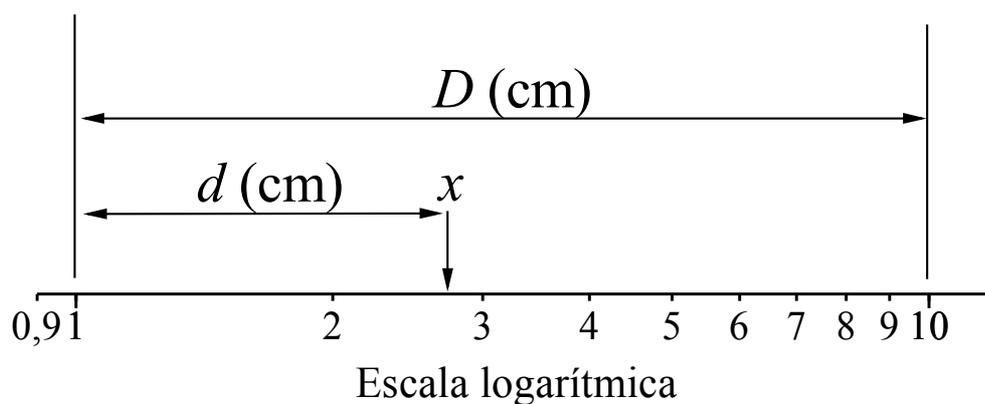


Figura 4.12. Cálculo de $\log(x)$ utilizando a escala logarítmica

Gráfico mono-log

O gráfico mono-log é um gráfico com escala linear no eixo-x e escala logarítmica no eixo-y, conforme mostra a figura 4.14. Esse tipo de escala é bastante útil para gráficos com comportamentos exponenciais, do tipo:

$$y(x) = CB^{Ax}$$

onde A e B são os coeficientes da expressão. Vamos agora calcular o logaritmo da expressão acima. Desse modo:

$$\log(y(x)) = \log(CB^{Ax}) = \log(C) + \log(B^{Ax})$$

ou

$$\log(y(x)) = Ax \log(B) + \log(C)$$

Fazendo uma mudança de variáveis $z(x) = \log(y(x))$, podemos reescrever a equação acima como sendo:

$$z(x) = ax + c,$$

onde $a = A \log(B)$ e $c = \log(C)$.

Desse modo, situações nas quais os dados se comportam como funções exponenciais tornam-se retas quando graficados em papel mono-log. Pode-se, a partir desse gráfico, desenhar a reta média, bem como as retas mínima e máxima para cálculo das incertezas nos coeficientes. Depois de desenhada as retas ajustadas aos dados, o coeficiente angular (a) pode ser calculado a partir de dois pontos quaisquer sobre a reta ajustada (x_1, y_1) e (x_2, y_2) utilizando a expressão (ver figura 4.13):

$$a = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{x_2 - x_1}$$

Ou, simplesmente, medindo-se a distância, em centímetros, entre os pontos y_1 e y_2 (d) bem como o tamanho da década no gráfico (D) e utilizando a expressão:

$$a = \frac{d/D}{x_2 - x_1}$$

A constante C pode ser obtida diretamente pela leitura da escala no eixo-y para o qual $x = 0$.

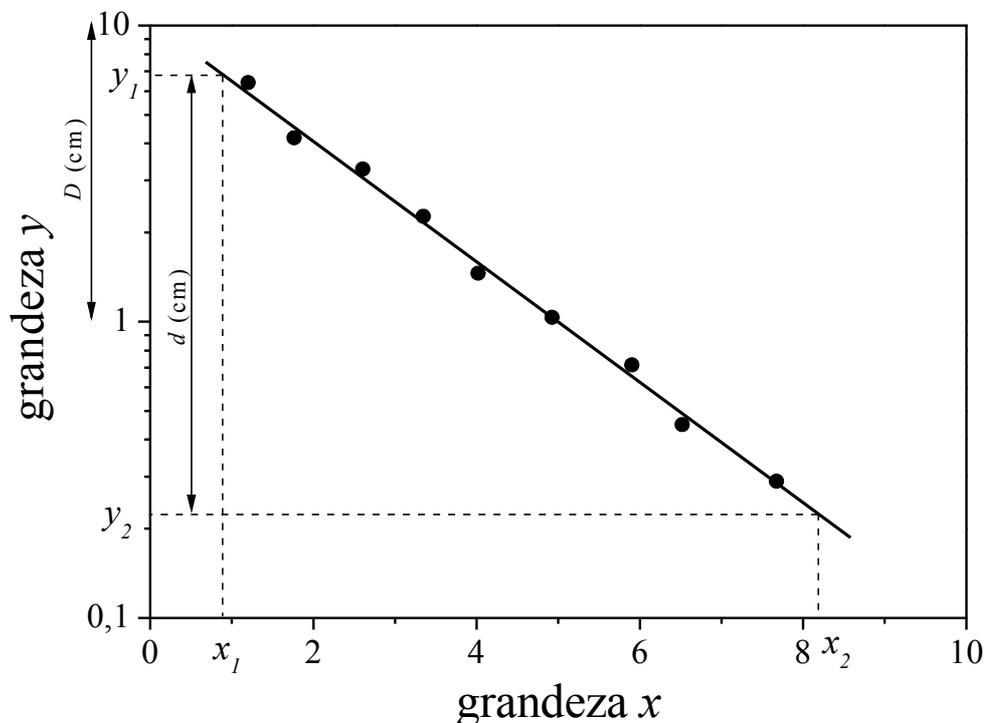


Figura 4.13. Cálculo do coeficiente angular em um papel mono-log.

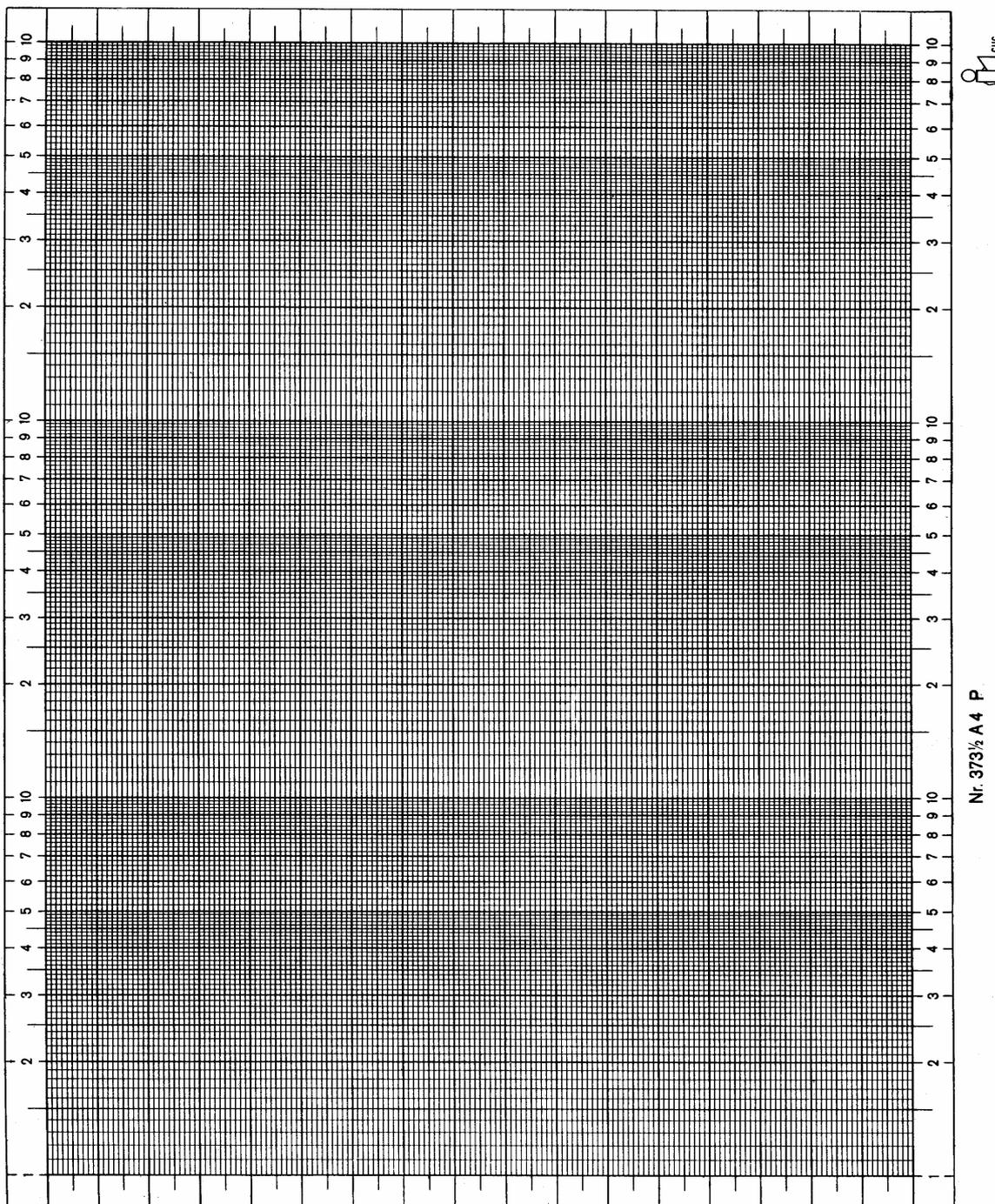


Figura 4.14. Papel mono-log. Você pode usar essa figura como modelo para gráficos mono-logs. Basta fazer cópias xérox.

Gráfico di-log

Como o próprio nome diz, o gráfico di-log é aquele onde ambos os eixos x e y estão em escala logarítmica (figura 4.16). Esse gráfico é útil para linearizar expressões do tipo:

$$y(x) = Bx^A.$$

Aplicando-se log na equação acima obtemos:

$$\log(y(x)) = \log(Bx^A) = \log(B) + A\log(x)$$

Fazendo as mudanças de variáveis

$$z(x) = \log(y(x))$$

e

$$k(x) = \log(x)$$

Podemos escrever a equação acima como sendo

$$z(x) = ak(x) + b$$

Ou seja, a equação de uma reta. Nesse caso, as constantes a e b valem, respectivamente, $a = A$ e $b = \log(B)$.

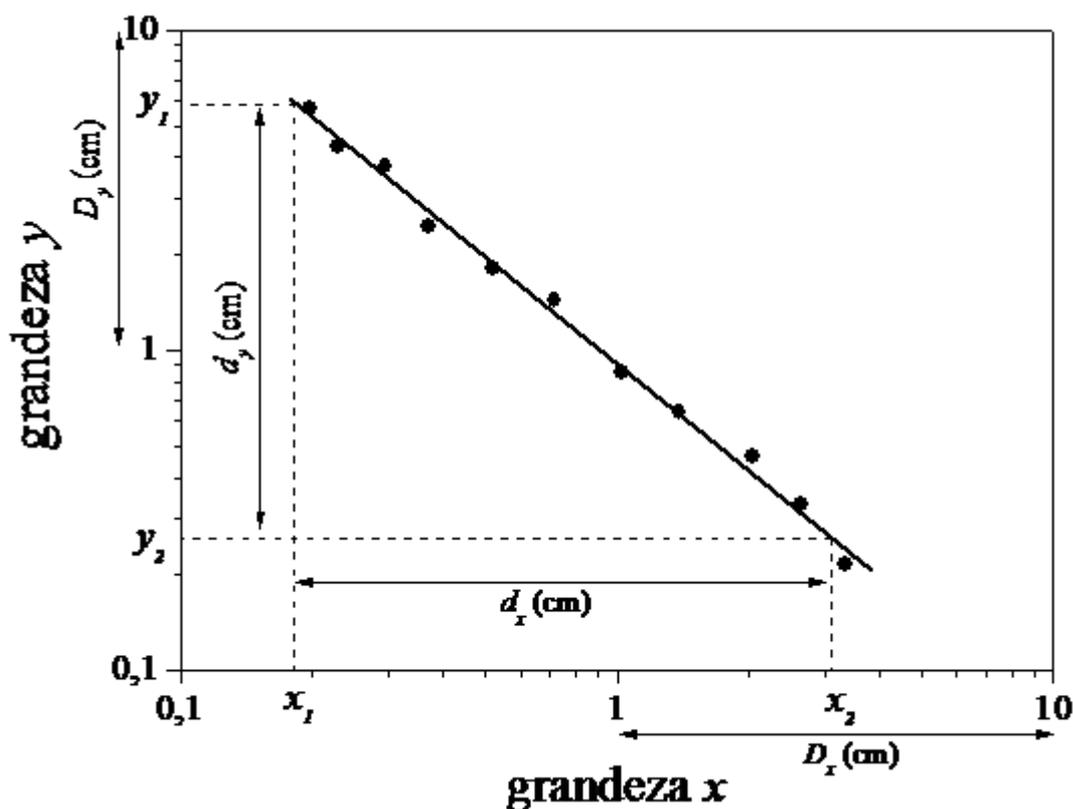


Figura 4.15. Cálculo do coeficiente angular em um papel di-log.

Da mesma forma que no gráfico mono-log, caso o gráfico resulte em uma reta, pode-se traçar a reta média para o cálculo dos coeficientes a e b , bem como as retas máxima e mínima para a estimativa das incertezas nos coeficientes. Escolhendo-se dois pontos sobre as retas ajustadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , o coeficiente a , vale, nesse caso:

$$a = \frac{z_2 - z_1}{k_2 - k_1} = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}$$

Ou, simplesmente, medindo-se a distância, em centímetros, entre os pontos y_1 e y_2 (d_y); x_1 e x_2 (d_x) bem como o tamanho das décadas no gráfico (D_y e D_x) e utilizando a expressão:

$$a = \frac{d_y / D_y}{d_x / D_x}$$

A constante B pode ser obtida diretamente pela leitura da escala no eixo-y para o qual $x = 1$ (caso onde $\log(x) = 0$).

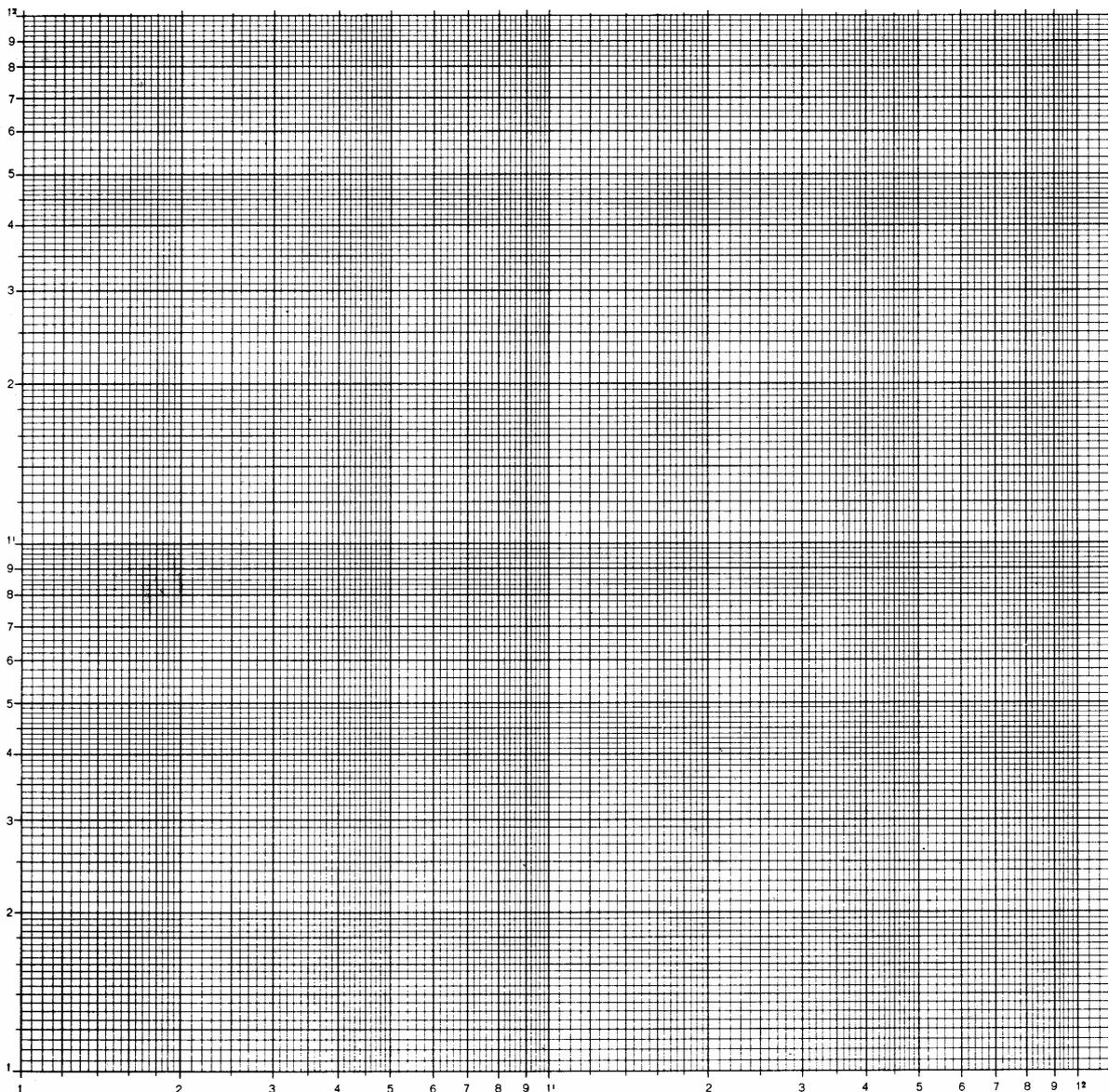


Figura 4.16. Papel di-log. Você pode usar essa figura como modelo para gráficos di-log. Basta fazer cópias xérox.

5. Histogramas

Vamos imaginar o seguinte experimento. Um cientista resolve medir o período de oscilação de um pêndulo. Após realizar o experimento uma única vez ele obtém um determinado valor T para o período de oscilação desse pêndulo. Contudo, após repetir o experimento várias vezes ele observa que cada experimento, mesmo que efetuado sob as mesmas condições experimentais (aquelas controladas pelo experimentador), fornece um valor diferente para o período de oscilação. Nesse caso, o experimentador conclui que o período de oscilação do pêndulo pode ser dado pela média de todas as medidas efetuadas. Contudo, outras questões podem ser igualmente importantes: como as medidas se distribuem em torno desse valor médio? O valor médio é também o valor mais provável de ser medido? Qual a probabilidade de realizar uma medida na qual o período de oscilação obtido é duas vezes maior que o valor médio?

Muitas dessas questões podem ser resolvidas através da análise estatística das medidas efetuadas. Contudo, uma ferramenta importante para análise estatística é o histograma das medidas. Um histograma é um gráfico no qual o conjunto de pontos (x, y) tem um significado específico. Um certo valor y está diretamente relacionado com a probabilidade de efetuar uma determinada medida e obter, como resultado, o valor x . Voltando ao nosso exemplo do pêndulo, a variável graficada no eixo-x poderia ser o período de oscilação enquanto que a variável no eixo-y pode ser o número de vezes que aquele determinado período foi medido pelo experimentador.

Por ter um significado específico, muitas vezes um histograma não é graficado colocando pontos nas coordenadas (x, y) de um papel milimetrado e sim através dos desenhos de barras verticais cuja altura corresponde ao valor y obtido para o ponto x .

A figura 5.1 mostra um histograma típico para o nosso experimento fictício. Nesse caso, o experimentador realizou a mesma medida 200 vezes. Cada barra vertical no histograma corresponde a um intervalo de períodos. Por exemplo, a barra mais alta corresponde a medidas cujo período de oscilação estava entre 0,40 e 0,43 segundos. Após repetir 200 vezes o experimento, o experimentador obteve 39 medidas cujo período de oscilação do pêndulo encontrava-se nesse intervalo de tempo. Para o intervalo de tempo entre 0,50 e 0,53 segundos, o experimentador obteve somente 6 medidas nesse intervalo. Cada um desses intervalos de medidas, que corresponde a uma barra no histograma é denominado de um canal do histograma. Em geral, histogramas possuem canais cujas larguras são fixas para todo o histograma. Casos especiais de histograma possuem canais de larguras variadas, porém são mais difíceis de serem analisados.

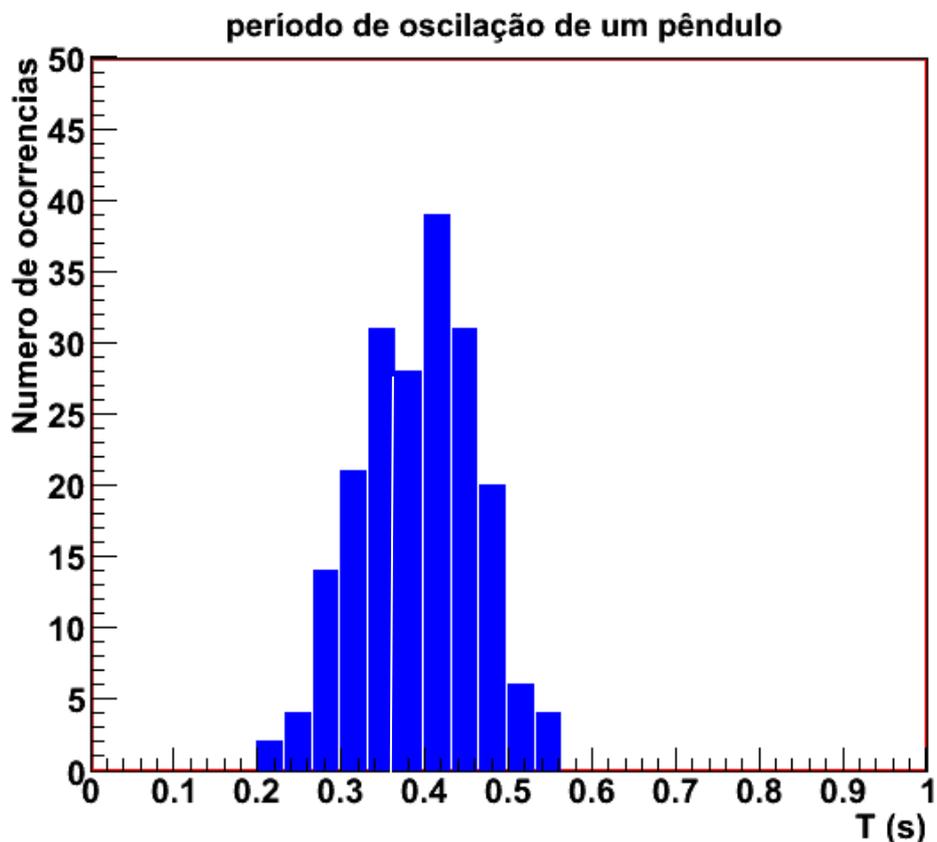


Figura 5.1. Histograma do período de oscilação de um pêndulo simples para um experimento realizado 200 vezes.

A amplitude a ser graficada em um histograma, para cada intervalo de variação da medida, depende de como esse histograma será utilizado posteriormente. É comum, contudo, utilizar uma das seguintes opções:

Histograma de número de ocorrências (N)

A amplitude do histograma, $N(x)$, é simplesmente o número de ocorrências verificadas em cada canal do histograma cujo centro vale x . Apesar de ser o histograma mais simples de se construir, pois exige apenas a contagem do número de ocorrências, a análise do mesmo é mais trabalhosa. Por exemplo, para calcular a probabilidade de efetuar uma medida em um intervalo é necessário saber o número total de medidas utilizadas no histograma.

Histograma de frequência de ocorrência (F)

A frequência na qual ocorre uma determinada medida é definida como sendo a razão entre o número de ocorrências em um canal do histograma cujo centro vale x e o número total de medidas efetuada, ou seja:

$$F(x) = \frac{N(x)}{N_{total}}$$

A vantagem de utilizar essa variável como amplitude do histograma é óbvia. A simples leitura da amplitude do histograma em um determinado canal, no limite de um grande número de medidas, N_{total} , tende à probabilidade de realizar uma medida no intervalo correspondente ao canal estudado. No caso mostrado na figura 5.1, como o experimento foi realizado 200 vezes, a frequência de ocorrência para um dado canal é o número de contagens daquele canal, dividido por 200.

Apesar de os histogramas de ocorrências (N) e frequências (F) serem simples de construir eles possuem algumas limitações. A maior delas é o fato das amplitudes nesses histogramas serem fortemente dependentes da largura escolhida para os canais. Caso a largura escolhida seja duas vezes maior, tanto os números de ocorrências como as frequências serão também duas vezes maiores. Esse aspecto torna histogramas de ocorrências e frequências difíceis de serem comparados com outros histogramas, bem como com curvas teóricas. Um terceiro tipo de histograma, definido como histograma de densidades de probabilidade, elimina essa limitação.

Histograma de densidade de probabilidades (H)

A densidade de probabilidade é definida como sendo a razão entre a probabilidade de realizar uma medida no intervalo x e $x+dx$ e o tamanho do intervalo, dx , no limite no qual esse intervalo é muito pequeno, ou seja:

$$H(x) = \frac{dP}{dx}$$

Se a densidade de probabilidade é conhecida, a probabilidade de ocorrer um resultado em um intervalo $(x, x+\Delta x)$, com Δx pequeno, é, aproximadamente:

$$P(x, x + \Delta x) \approx H(x) \Delta x$$

A grande vantagem de utilizar a densidade de probabilidade para montar histogramas é o fato das amplitudes em cada canal ser independente do número de medidas efetuadas bem como da largura escolhida para os canais do histograma. Experimentalmente, a densidade de probabilidade pode ser obtida como sendo a frequência de ocorrência de eventos em um canal, dividida pela largura do canal no histograma, ou seja:

$$H(x) \approx \frac{F(x)}{\Delta x} = \frac{N(x)}{N_{total} \Delta x}$$

5.1. Construção de histogramas

Depois de realizadas as medidas, o experimentador tem em mãos uma tabela na qual estão listados os valores obtidos para a grandeza que se quer histogramar. Construir um histograma consiste nos seguintes passos:

1. Escolher a largura dos canais do histograma, Δx ;
2. Escolher os centros de cada canal, tomando o cuidado que não sobrem espaços vazios entre os canais.
3. Contar o número de ocorrências para cada um dos canais, $N(x)$. Nesse ponto é possível construir o histograma de número de ocorrências. Caso uma ocorrência ocorra na borda entre dois canais, considere a ocorrência como pertencendo ao canal cujo centro possua maior valor.
4. Caso queira-se construir o histograma de frequências, $F(x)$ dividir o número de ocorrências em cada canal pelo total de medidas efetuadas.
5. Caso queira-se construir o histograma de densidade de probabilidades, $H(x)$, dividir a frequência de cada canal pela largura de cada um dos canais.

Alguns problemas ocorrem na criação do histograma, principalmente quando o número total de medidas (N_{total}) é estatisticamente pequeno.

O problema mais freqüente é a escolha da largura do canal, Δx . Evidentemente, para que a densidade de probabilidade experimental seja o mais próxima possível da definição teórica, deve-se escolher Δx de tal forma a ser o menor valor possível. Entretanto, diminuindo Δx estamos também diminuindo o número de ocorrências em cada canal do histograma, correndo o risco de que, em casos extremos, ocorram canais onde não seja registrada nenhuma ocorrência.

A figura 5.2 mostra dois histogramas onde foram realizadas 20 medidas. No histograma da esquerda, a largura do canal utilizada é cinco vezes mais larga que no histograma da direita. Note que o histograma com largura de canal menor apresenta flutuações elevadas de um canal para outro, além de haver canais onde não há ocorrências. Isso resulta em alguns canais com elevada densidade de probabilidade enquanto outros canais apresentam densidade de probabilidade nula.

Esse fator deixa de ser um problema quando o número de medidas é bastante elevado, como mostrado na figura 5.3. Nesse caso, o experimento hipotético foi realizado 20 mil vezes. Note que, além do tamanho dos

canais, não há diferença entre as densidades de probabilidade entre os histogramas.

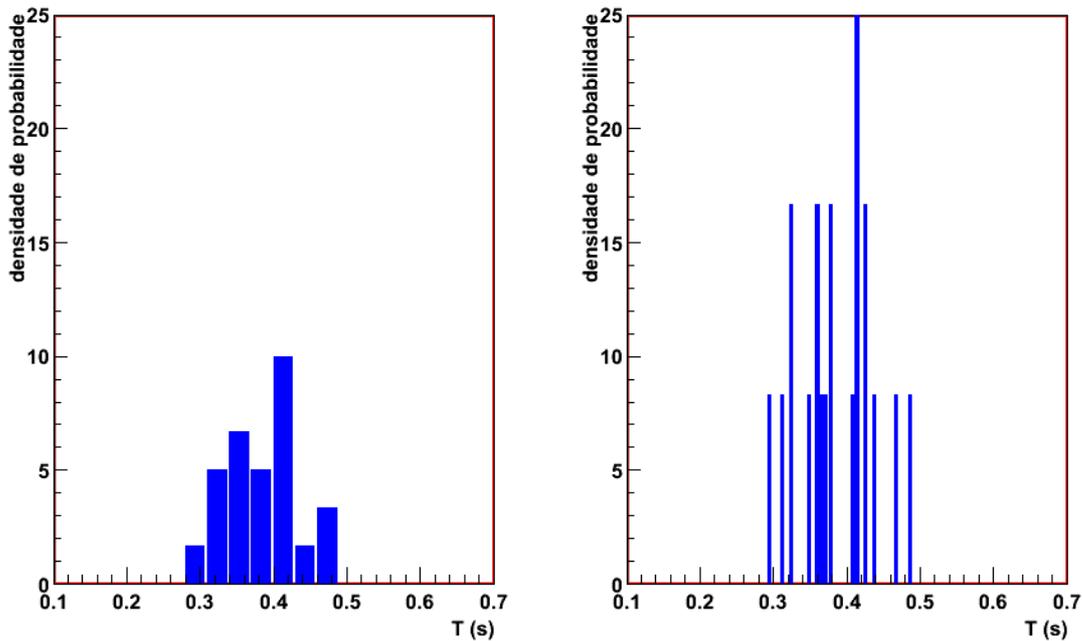


Figura 5.2. Histogramas de densidade de probabilidades para medidas do período de um pêndulo simples. O conjunto de dados utilizado é o mesmo em ambos os casos. O histograma da esquerda foi montado de tal forma que a largura do canal seja 5 vezes maior que no caso da direita. O total de medidas utilizadas para montar os histogramas (N_{total}) foi 20.

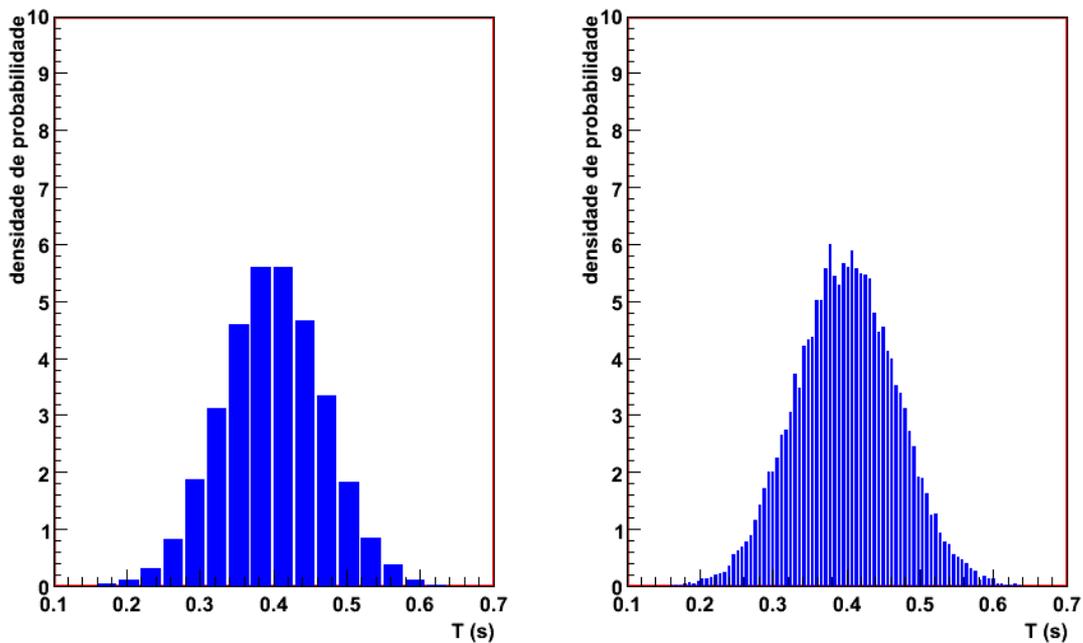


Figura 5.3. Histogramas de densidade de probabilidades para medidas do período de um pêndulo simples, conforme explicado na figura 5.2. Nesse caso, o total de medidas utilizadas para montar os histogramas (N_{total}) foi 20000.

Em muitas situações experimentais é muito difícil realizar um número elevado de medidas de tal forma que a escolha da largura dos canais no histograma possa ser arbitrariamente pequena. Como regra prática, a largura dos canais, Δx , deve ser escolhida de tal forma que o número de ocorrências, $N(x)$, seja pelo menos 10 para os canais próximos ao valor médio das medidas. Outro fator importante é a escolha das posições centrais dos canais do histograma. Deve-se, nesse caso, escolher as posições centrais de tal forma que uma delas seja aproximadamente igual ao valor médio das medidas.

5.2. Interpretação de um Histograma

Quando medimos N vezes uma grandeza, normalmente obtemos valores diferentes para cada medida devido à incerteza estatística ou aleatória associada ao procedimento de medida. Se a incerteza é aleatória, é razoável supor que ela pode fazer com que o resultado da medida seja igualmente maior, ou menor, que o valor verdadeiro da grandeza. Portanto, esperamos que um histograma tenha uma forma simétrica em torno do valor que representa a melhor estimativa para o valor verdadeiro da medida, como podemos observar no histograma da figura 5.4.

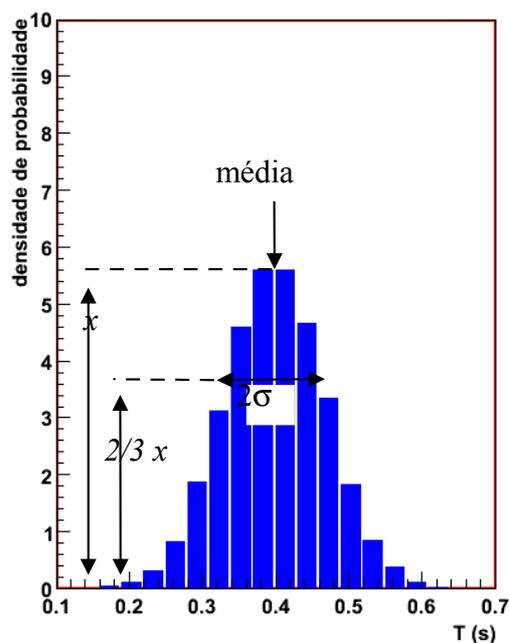


Figura 5.4 – Obtenção de média e desvio padrão a partir da análise gráfica do histograma.

A largura do histograma deve refletir a precisão da medida, pois ela mostra o quanto as medidas variaram em torno da estimativa do valor

verdadeiro. Um histograma mais largo significa uma medida menos precisa e vice-versa. Como discutido no capítulo 5 da apostila “Introdução à Teoria de Erros” de J. H. Vuolo, a melhor estimativa do valor verdadeiro de uma medida é dada pela média e a variação (ou variância) das medidas é dada pelo desvio padrão. Portanto, podemos estimar o valor da média e do desvio padrão de um conjunto de medidas a partir do seu histograma, somente observando o valor central do mesmo e a largura do histograma a, aproximadamente, $2/3$ de sua altura máxima, conforme mostra a figura 5.4. Uma discussão mais formal sobre essa interpretação do significado do valor central e da largura de um histograma pode ser encontrada no capítulo 7 da apostila “Introdução à Teoria de Erros”.

Capítulo V

Relatório científico

(extraído da apostila de Física Experimental I de J. H. Vuolo et. al.)

Nesta seção são apresentadas algumas regras gerais para se escrever um relatório e também os critérios de correção dos mesmos.

1. Objetivos do relatório na disciplina

Não há dúvida de que escrever um bom relatório é bastante difícil e parece que não existe outro método de aprender a escrever a não ser escrevendo.

Além das dificuldades relativas ao conteúdo do relatório, existem as dificuldades de organizar e expressar as idéias e resultados (sem falar das dificuldades gramaticais e de vocabulário). Na verdade, essas dificuldades não são independentes entre si, pois certamente existe uma estreita relação entre a compreensão de um fato e a capacidade de expressão deste fato em palavras.

A importância do relatório na disciplina é que o mesmo é entendido como um treinamento para escrever e ajudar a articular idéias. Os alunos deveriam se conscientizar de que escrever relatório é uma parte importante da disciplina, independentemente do fato que o relatório serve para atribuição de nota na disciplina.

O relatório deve ser um texto completo, dirigido a um leitor com conhecimentos suficientes para entender as experiências da disciplina, mas que nunca tenha visto nada sobre tais experiências.

Assim, o relatório não deve omitir descrições, fórmulas ou detalhes, com argumentos do tipo “isto tem na apostila” ou “o professor já sabe como é”. Mas a descrição do óbvio é dispensável.

2. Organização do relatório

Um relatório pode ser entendido como a descrição detalhada, clara e objetiva de um trabalho realizado. Descrição detalhada significa que o relatório deve apresentar todos os detalhes que sejam realmente relevantes,

omitindo detalhes supérfluos. Clareza e objetividade reduzem o esforço de leitura do relatório ao mínimo sem prejuízo da perfeita compreensão.

O relatório exigido nesta disciplina deve ter as seguintes partes:

- Resumo do trabalho;
- Introdução ao assunto;
- Descrição experimental;
- Resultados de medições, cálculos e análise de dados;
- Discussão final e conclusões;
- Referências bibliográficas;
- Apêndices (geralmente desnecessários);

Cada uma das partes acima pode ser subdividida em dois ou mais itens, quando parecer conveniente. Entretanto, deve-se evitar fragmentação excessiva do texto em muitos itens. Geralmente, as divisões maiores têm os títulos acima (mas podem ser escolhidos títulos diferentes), mas as eventuais subdivisões também devem ter títulos.

Uma observação importante é que o texto do relatório deve ser escrito em português correto, com frases devidamente estruturadas e pontuadas. Ocorre que é um pouco difícil estruturar e pontuar frases quando o texto inclui equações e resultados numéricos, particularmente em deduções de fórmulas. Mas deve-se fazer um esforço para escrever frases corretas também nestes casos.

Outra observação é que o relatório é uma descrição de um trabalho já realizado. Por isso, essa descrição não deve ser feita com verbos em tempos futuro, infinitivo ou imperativo.

2.1. Resumo

O Resumo deve ter aproximadamente 10 linhas e, como o nome indica, deve resumir os objetivos da experiência, equipamento usado, resultados principais e conclusões. Isto é, o resumo deve dar ao leitor uma razoável idéia sobre o conteúdo do relatório (isto é, da experiência e da análise dos dados) e, portanto, deve ser escrito ao final do trabalho, apesar de ser apresentado no início do Relatório. Toda informação contida no Resumo deve ser retomada de forma mais extensa no corpo do Relatório.

Figuras, fórmulas ou referências não devem, evidentemente, ser incluídas num resumo.

2.2. Introdução

A Introdução deve conter os objetivos da experiência, discussão do tema da experiência, apresentação das fórmulas e leis físicas utilizadas, deduções teóricas mais relevantes e outros comentários que são importantes, mas que não se enquadrem em outras partes do relatório.

2.3. Descrição experimental

Esta parte do relatório deve conter uma descrição completa, mas bastante objetiva, dos seguintes itens:

- arranjo experimental (não é aceitável a simples listagem dos equipamentos utilizados);
- procedimento experimental;
- características de instrumentos e incertezas de leitura;
- cuidados particulares e detalhes relevantes.

Geralmente, a descrição do arranjo experimental deve incluir figuras mostrando suas características e dimensões relevantes. A qualidade artística do desenho é menos importante do que a clareza na informação.

Em procedimento experimental, deve-se dar uma descrição resumida do procedimento utilizado para obtenção das medidas, dispensando-se também aqui a descrição do óbvio.

Devem também ser apresentados nesta parte do relatório características e detalhes de instrumentos utilizados, discussão de incertezas instrumentais e cuidados particulares que tenham sido adotados na tomada de dados.

2.4. Resultados de medições, cálculos e análise de dados

Os resultados das medições e cálculos devem ser apresentados nesta parte do relatório, sendo obrigatório o uso de tabelas no caso de quantidades repetitivas.

O texto deve explicar claramente os cálculos realizados e as fórmulas utilizadas devem ser apresentadas explicitamente. Isto é, deve-se escrever as fórmulas utilizadas, mesmo que tais fórmulas já tenham sido apresentadas antes (na Introdução, por exemplo). Resultados de cálculos repetitivos também devem, obrigatoriamente, ser apresentados em tabelas.

Os cálculos de incertezas também devem ser explicados claramente, inclusive com apresentação das expressões usadas.

Os gráficos devem ser anexados nesta parte do relatório e os resultados obtidos neles (por exemplo, um coeficiente angular de reta) devem ser explicitamente apresentados no texto.

2.5. Discussão final e conclusões

Os resultados devem, evidentemente, ser discutidos e comentados na parte anterior do relatório. Mas geralmente existe esta parte final, na qual se deve discutir a experiência como um todo. Esta parte geralmente inclui discussão dos seguintes pontos:

- acordo entre resultados obtidos na experiência e valores experimentais obtidos de outras fontes ou valores de referência;
- crítica do método de medição e do equipamento utilizado;
- sugestões e comentários sobre a experiência.

É essencial que se apresentem as conclusões às quais os dados permitem chegar, frente aos objetivos que foram colocados na introdução de cada experimento.

2.6. Referências bibliográficas

Referências bibliográficas citadas no texto devem ser apresentadas no final, sob o título Referências Bibliográficas.

Exemplos:

A) referência de livro

B.B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, New York, 1983.

onde B.B. Mandelbrot é o autor do livro; The Fractal Geometry of Nature o título; Freeman a editora; New York a cidade onde o livro foi editado; e 1983 o ano da edição (após o título do livro é indicada a edição, se esta não for a primeira edição).

B) referência de artigo de revista

M.A.F. Gomes, Fractal Geometry in Crumpled Paper Balls, Am. J. Phys. 55 (1987) 649.

onde M.A.F. Gomes é o autor do artigo; Fractal Geometry in Crumpled Paper Balls o título (que nem sempre é colocado); Am. J. Phys. (abreviatura

de American Journal of Physics) a revista; 55 o volume; (1987) o ano; e 649 é a página que inicia o artigo.

C) referência de Internet

<http://www.if.usp.br>

onde http é o protocolo de comunicação (hipertexto), www.if.usp.br é o endereço da página do Instituto de Física (if) da Universidade de São Paulo (usp), Brasil (br) na Internet (www - World Wide Web).

2.7. Apêndices

Um apêndice é geralmente utilizado para apresentar um tópico que pode ser separado do texto principal do relatório sem prejudicar muito o seu entendimento, e que por outro lado, se colocado no texto principal viria perturbar a ordem de exposição das idéias. Por exemplo, pode-se colocar num apêndice uma dedução matemática longa de uma fórmula.

3. Regras gerais para o relatório

A seguir são resumidas as regras básicas e também algumas sugestões a respeito do relatório:

- tudo no relatório deve ser perfeitamente legível;
- o relatório deve ser apresentado em papéis de tamanhos normais: A4 (297 mm por 210 mm), carta (270 mm por 216 mm) ou ofício (aproximadamente 33 cm por 22 cm);
- o relatório deve ser escrito em português correto, sendo os relatos em tempo passado, conforme discutido na Seção I.2;
- organizar o relatório nas partes mencionadas na Seção I.2, eventualmente subdividindo cada uma das partes em itens com títulos;
- dados obtidos, cálculos e resultados finais para um determinado assunto nunca devem ser separados em itens diferentes;
- figuras e tabelas devem conter as informações de forma mais completa e sucinta possível, ser numeradas e ter legendas explicativas; mesmo que sejam explicadas no texto; devem ser evitadas a fragmentação e repetição de informação nas tabelas;

- o relatório deve conter uma folha de rosto onde constam a data e os nomes da experiência, da disciplina, do aluno e do professor.

4. Critério de correção e nota

Para a atribuição da nota geralmente serão considerados os seguintes itens:

- obtenção criteriosa dos dados, conforme os objetivos explicitados e o instrumental disponível;
- confecção de tabelas e gráficos convenientes - com unidades, legendas, incertezas e algarismos significativos adequados;
- Introdução e Resumo;
- Descrição Experimental;
- Resultados das Medições e Cálculos (Análise de Dados);
- Discussão Final e Conclusões;

e serão também examinados os seguintes aspectos:

- organização geral do relatório (divisão adequada em itens com respectivos títulos, ordem e outros aspectos relacionados);
- diagramação e cuidado na apresentação;
- se manuscrito, caligrafia (deve ser perfeitamente legível), se digitado, a qualidade da mesma;
- grafia correta das palavras, com frases devidamente estruturadas e pontuadas.

Experiência I (aulas 01 e 02)

Calibração de medidas e Pêndulo simples

1. Objetivos
2. Introdução
3. O pêndulo simples
4. Medida do período de oscilação de um pêndulo
5. Arranjo e procedimento experimental
6. Análise de dados

1. Objetivos

O objetivo desta experiência consiste em se realizar medidas usando padrões diversos e verificar como representá-los adequadamente. Além de medidas de distância mediremos o período de oscilação de um pêndulo simples. Em especial, esse sistema é de extremo interesse na física, pois permite um tratamento teórico preciso, além de permitir a discussão de vários conceitos da física experimental, como noções de estatística, erros aleatórios ou estatísticos, média e desvio padrão e histogramas.

2. Introdução

(Texto baseado na apostila de “Introdução às Medidas em Física” de 2004)

A preocupação com a quantificação de valores permeia toda a história da humanidade. As variações de padrões usados nessas avaliações sempre dificultaram a comparação de um parâmetro obtido por dois sistemas (ou investigadores) distintos. A definição de um sistema internacional de padrões para a realização intercomparação de medidas foi fundamental para minimizar essas dificuldades.

Como exemplo podemos citar as medidas de tempo, que sempre foram importantes devido às mais diversas motivações. Os sistemas de medidas de tempo vêm evoluindo desde a simples ordenação de eventos acontecidos, passando pela previsão de épocas de plantio e colheita na agricultura, duração de jornadas, observações astronômicas, etc., chegando

aos nossos dias, quando a medida do tempo regula o cotidiano de grande parte da humanidade.

Historicamente, o desenvolvimento de medidores de tempo (relógios) acompanha a evolução da necessidade de se medir o tempo, adequando-se a cada estágio desse processo evolutivo. Dos relógios de Sol até o hoje popular relógio de quartzo, se pensar unicamente em instrumentos do cotidiano, muitos caminhos foram trilhados. Por trás de cada instrumento está a necessidade da época. Se para algumas civilizações da Antiguidade bastava distinguir a manhã da tarde, diversas aplicações atuais necessitam de determinações de frações muito pequenas de segundo.

Ao mesmo tempo, a delimitação de intervalos de tempo através da observação de eventos por algum dos órgãos dos sentidos também está afetada pela própria capacidade do corpo humano perceber esses eventos. A vista humana, por exemplo, consegue distinguir eventos separados de 40 ms ($1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s}$) aproximadamente. É este limite de percepção que permite o efeito cinematográfico: quando assistimos a um filme, temos a impressão de que os movimentos ocorrem continuamente apesar de na verdade serem projetadas fotos a uma frequência de 30 por segundo.

Muitos dos intervalos de tempo entre eventos que ocorrem em nosso cotidiano podem ser medidos com um relógio de pulso comum, por exemplo, a duração da aula.

Outros eventos, apesar de serem facilmente percebidos pelos nossos sentidos, ocorrem em intervalos de tempos muito curtos para serem medidos dessa forma. Podemos adotar como sendo de alguns segundos o intervalo de tempo mínimo mensurável com um relógio comum. Esse limite é muito maior do que, por exemplo, o tempo de contato dos seus dedos com o tampo da mesa numa “batucada”.

Tente estimar valores para:

- O tempo de queda de uma borracha da mesa para o chão;
- O tempo de chute de uma bola de futebol;
- O tempo entre dois toques de dedo de uma batucada;
- O tempo gasto para escrever a palavra *tempo* e para assinar o seu nome.

Neste experimento, iremos medir o período de oscilação de um pêndulo com o intuito de:

- realizar medidas de intervalos pequenos de tempo e estudar algumas limitações impostas pela nossa percepção e pelos instrumentos de medida;
- introduzir de maneira prática o conceito de erros estatísticos ou aleatórios;
- realizar uma primeira discussão sobre a adequação de um modelo idealizado a um experimento real.

3. O Pêndulo Simples

O estudo do período de oscilação do pêndulo pode parecer algo desinteressante em um primeiro momento. Porém, essa impressão não poderia estar mais errada. Galileu Galilei, considerado um dos principais criadores do método científico moderno, foi uma das primeiras pessoas a estudar esse sistema físico e descobrir algumas de suas interessantes propriedades.

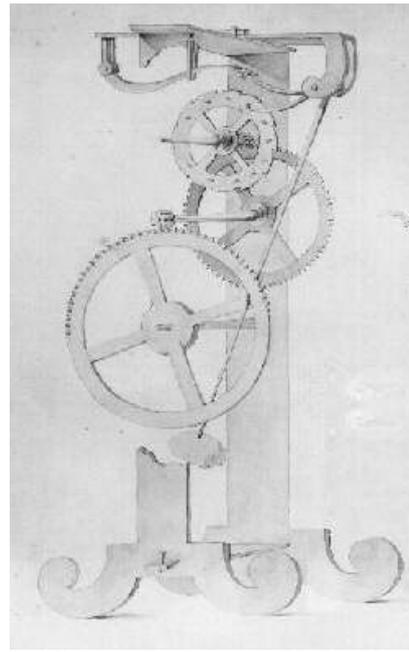
Conta a história que Galileu, ao assistir à missa na catedral de Pisa todos os domingos, reparava que um candelabro balançava devido à corrente de ar, o que o motivou a estudar o movimento oscilatório de um pêndulo. Ele percebeu que independentemente da distância percorrida pelo pêndulo, o tempo para completar o movimento é sempre o mesmo. Galileu não tinha nenhum cronômetro ou relógio que lhe permitisse medir o tempo em suas experiências, por isso controlou o tempo com as suas pulsações.

O estudo do pêndulo levou-o a concluir que a duração do movimento pendular não é afetada pelo peso do corpo suspenso, mas sim pelo tamanho da corda que o suspende. Baseado nestas conclusões, Galileu desenvolveu o relógio de pêndulo, o mais preciso na época.

Toda haste, fio ou outro objeto qualquer, suspenso por um de seus pontos e sujeito à ação da gravidade executará um movimento oscilatório, se for momentaneamente afastado do seu ponto de equilíbrio (desde que o ponto de fixação não coincida com o centro de massa do corpo). O período deste movimento é uma grandeza física característica do sistema. A versão mais simples de um pêndulo consiste de um objeto de massa pequena suspenso por um fio inextensível e de massa desprezível.



(a)



(b)

Figura 2.1 - (a) candelabro na Catedral de Pisa. (b) relógio de pêndulo concebido por Galileu.

Um modelo bastante comum utilizado para relacionar o período T de um pêndulo com seu comprimento L é chamado de modelo do pêndulo simples e baseia-se nas seguintes hipóteses:

- o pêndulo é constituído por um ponto material suspenso por um fio inextensível e sem massa;
- apenas as forças peso e tração agem sobre o ponto material;
- utiliza-se ângulos de abertura pequenos ($\theta < 15^\circ$), tal que seja válida a aproximação $\sin(\theta) \sim \theta$ (em radianos), onde θ é o ângulo entre o fio e a vertical, durante a oscilação (figura 2.2).

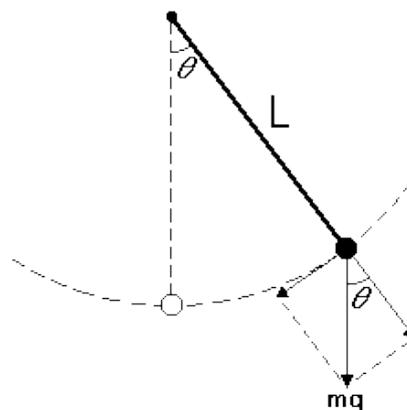


Figura 2.2 - pêndulo simples

Baseado nessas hipóteses pode-se deduzir a seguinte relação entre T e L :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

4. Medida do período de oscilação de um pêndulo

A fim de medir o período de oscilação do pêndulo, deslocamos de um certo ângulo o ponto material que o compõem e medimos o tempo que esse ponto leva para retornar ao mesmo ângulo deslocado inicialmente. Para medir esse tempo, utilizaremos um cronômetro cuja resolução, ou seja, a menor unidade de medida, é 0,01 s. Como toda medida, precisamos atribuir uma incerteza ao valor obtido. Fará parte do nosso experimento refletir sobre a melhor estimativa possível para essa incerteza.

Na experiência anterior lidamos com a medida de comprimentos de objetos bem definidos e utilizamos equipamentos analógicos. As incertezas nas medidas foram estimadas como sendo as incertezas instrumentais dos equipamentos de medida, que normalmente eram a metade da menor divisão do equipamento (lembre-se que para o paquímetro, a incerteza instrumental é a menor divisão). Por se tratar de um equipamento digital, a incerteza instrumental do cronômetro deve ser dada pelo fabricante. Na ausência de um valor fornecido pelo fabricante, podemos considerar a incerteza como sendo a menor divisão do equipamento, ou seja, 0,01 s. Porém, se você repetir a medida várias vezes, você espera obter o mesmo valor para o período do pêndulo? A variação nos valores de período obtidos será em torno de 0,01 s? Realize essa medida algumas vezes com o pêndulo próximo a você e verifique o resultado.

Após a observação desses resultados, já deve estar claro para você que o valor medido do período varia muito mais que o erro instrumental atribuído. Por que isso ocorre? Qual será o valor do período de oscilação do pêndulo e, principalmente, qual será o valor da incerteza dessa medida? Diante desta constatação, fica claro que o erro instrumental não é o único a afetar o resultado e a incerteza de uma medida. Existem outros tipos de incerteza que precisam ser considerados. Nesta aula, iremos estudar a **incerteza aleatória ou estatística**. Leia o capítulo 4 da apostila “Introdução

à Teoria de Erros” de J. H. Vuolo para uma extensa discussão sobre os tipos de incerteza mais comuns que iremos encontrar.

5. Arranjo e Procedimento Experimental

5.1. Calibração de medidas

Nessa primeira parte do experimento iremos verificar a importância da padronização na realização de medidas diversas. Primeiramente faremos medidas para obter a área da sala e lousa, usando os instrumentos de medidas mais simples que conhecemos: pés e mãos. Em seguida, deve-se medir o comprimento de cada pé e mão usado com uma trena ou régua. Por fim, cada grupo deve medir com uma trena as dimensões da sala e lousa.

Usaremos um procedimento parecido para obter o período de dez oscilações de um pêndulo simples. Como padrão inicial usaremos os batimentos cardíacos de cada indivíduo, que posteriormente deve ser calibrado com o auxílio de um cronômetro. Para posterior comparação com a equação 1, é necessário que as condições experimentais possam ser aproximadas pelas hipóteses e limitações do modelo. Assim, utiliza-se como ponto material uma bolinha de chumbo, e o fio de um material de baixa densidade e pouca elasticidade. Adota-se ainda, pequenos ângulos de oscilação máxima (no caso de $\theta_{\max} \sim 10^\circ$, o erro percentual da aproximação da hipótese c é menor que 1%). É necessário ter em mente que, estritamente, o pêndulo simples não existe na natureza, mas o modelo pode ser tão próximo da realidade, que as diferenças são encobertas pelas incertezas experimentais.

5.2. Pêndulo Simples com medidores padronizados

Inicialmente, realizaremos a medida do período de oscilação de um pêndulo colocado na frente da sala de aula, próximo à mesa do professor. Ele irá deslocar o pêndulo do seu ponto de equilíbrio, fazendo-o oscilar e todos os alunos medirão o período de oscilação desse pêndulo com o cronômetro fornecido a cada um.

Antes de iniciar a medida, teste o seu cronômetro. Acione e pare o cronômetro imediatamente várias vezes. Que valores você obteve? Esse valor representa o tempo mínimo que você consegue medir com o cronômetro. Como esse tempo se compara ao período de oscilação do pêndulo? Se os dois tempos forem muito semelhantes, como você acha que isso vai afetar a suas medidas? Como minimizar a influência dessa

limitação nas suas medidas? Ao invés de medir o tempo de uma oscilação, não seria mais preciso medir o tempo de mais oscilações, ou seja, intervalos de tempo maiores? Por quê?

Cada aluno irá medir o período de oscilação do pêndulo 5 vezes. Como a classe tem em torno de 20 alunos, teremos uma amostra de cem medidas e poderemos comparar os valores obtidos entre todos os alunos. O tratamento que daremos aos dados será discutido na seção 6.

Em seguida, cada grupo medirá o período de oscilação utilizando um equipamento diferente: seu próprio relógio de pulso de resolução de 1 s. O que você espera obter para a incerteza em cada um dos casos? Elas serão semelhantes? Por quê?

6. Análise de dados

Como você deve ter notado, o valor obtido para o período nas diversas medidas varia muito mais que o erro instrumental atribuído à medida. Isso ocorre pois não é apenas o instrumento de medida que influencia no resultado da mesma. Nas aulas anteriores, estávamos medindo objetos muito bem definidos e estáticos, em uma situação que nos permitia comparar o comprimento a ser medido com o padrão de medida de maneira bastante cuidadosa. Neste caso, o mesmo não ocorre. A medida do período do pêndulo sofre influência de diversos fatores, que estão fora do nosso controle. Para citar alguns exemplos:

- o mecanismo de acionamento do cronômetro não é instantâneo devido à mecânica de funcionamento do mesmo;
- o reflexo humano não é instantâneo, ou seja, leva um certo intervalo de tempo para o experimentador perceber a passagem do pêndulo pelo ponto desejado, reagir e acionar o botão do cronômetro;
- a própria definição experimental do período do pêndulo está sujeita a incertezas. Que ponto do espaço corresponde exatamente ao ponto de inversão do movimento do pêndulo?

Diante de todos esses fatores, fica claro que ao repetirmos a medida do período de oscilação do pêndulo, iremos obter sempre valores diferentes. Conseqüentemente, nos resta decidir qual valor numérico deve ser usado para representar o período de oscilação do pêndulo e como podemos estimar a incerteza dessa medida.

Como discutido na seção 4.3 da apostila “Introdução à Teoria de Erros” de J.H. Vuolo, a variação nos valores medidos do período é chamada

de erro aleatório ou estatístico, pois ela ocorre devido a diversos fatores aleatórios, que não podem ser controlados durante o experimento. Na seção 5 dessa mesma apostila, é mostrado que o valor que melhor representa o resultado experimental de várias medidas (y_i) feitas em circunstâncias estatísticas é a média, dada por:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} \quad (2)$$

onde N é o número de medições feitas.

A incerteza nesse valor pode ser estimada a partir da flutuação dos dados, ou seja, a partir da variação ou desvio dos dados em relação à média, onde definimos o desvio de uma medida pela expressão:

$$d_i = y_i - \bar{y} \quad (3)$$

A princípio, poderíamos tomar o valor médio dessa grandeza para estimar a incerteza. Porém, devido à própria definição de média, o valor médio de d_i será sempre zero. Portanto, inicialmente, podemos nos livrar do sinal definindo a variância dos dados que é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \quad (4)$$

A variância é uma média do quadrado do desvio. A raiz quadrada da variância é chamada de desvio padrão (σ) e é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \quad (5)$$

Podemos dizer que o desvio padrão é uma medida de quanto os dados *em média* se “desviam” da média. A partir do formalismo da chamada Teoria de Erros, podemos demonstrar que a incerteza do valor médio será dada pelo desvio padrão da média (σ_m), definido como:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (6)$$

Para o propósito desta disciplina, vamos apenas assumir esta expressão como correta (sem demonstrar isso) e utilizá-la para estimar a incerteza aleatória ou estatística de todas as medidas que realizarmos daqui em diante.

6.1. Calibração de medidas

Usando os valores das dimensões medidas com pés e mãos, calcule os valores das áreas escrevendo o resultado final com o número adequado de significativos. Em seguida re-escreva esse valor usando a calibração obtida para cada pé e mão. Novamente tome cuidado para re-escrever esse valor com o número correto de significativos. Finalmente, calcule o valor dessas áreas a partir das medidas das dimensões obtidas diretamente com a trena. Compare o número de significativos dos dois valores de áreas obtidos com os diferentes sistemas de medidas.

Calcule os valores médios e desvios padrões tanto para a área da sala quanto para a lousa da sala. Os valores individuais concordam com os valores médios?

Analogamente, escreva o valor do período de 10 oscilações do pêndulo em segundos a partir das medidas usando batimentos cardíacos (e sua respectiva calibração) e a outra série usando cronômetro. Compare novamente o número de significativos dos resultados finais.

Calcule o valor médio e desvio padrão para o período de 10 oscilações do pêndulo. Os valores individuais concordam com os valores médios?

6.2. Pêndulo Simples

De posse dos dados, vamos estudar como os valores de período medidos pelos vários alunos da classe se comportam. Calcule a média, o desvio padrão e o desvio padrão da média dos dados. Uma maneira bastante eficiente de se estudar os dados é fazendo um histograma dos mesmos. Na seção 5 do capítulo IV da apostila da disciplina é explicado como construir um histograma. Utilizando os dados medidos por todos os colegas de classe construa um histograma.

Em seguida, interprete o resultado obtido. Que informações o histograma pode lhe fornecer? Como você pode extrair a média e o desvio padrão a partir do histograma? Os valores obtidos numericamente concordam com os valores obtidos graficamente?

Calcule a média, desvio padrão e desvio padrão da média dos dados obtidos com o relógio de pulso. Compare os valores obtidos a com os dois equipamentos. Compare também esses resultados com os valores obtidos na primeira parte e com os valores obtidos pelos colegas.

A partir do comprimento medido do pêndulo e do valor da aceleração da gravidade, calcule o período esperado para o pêndulo utilizado, assumindo que o modelo do pêndulo simples é válido para este caso. Os dois valores são iguais? Como é possível compará-los? A medida de comprimento tem incerteza? Como você acha que isso vai afetar o valor do período obtido pela fórmula 1?

Experiência II (aulas 03 e 04)

Densidade de sólidos

1. Objetivos
2. Introdução
3. Procedimento experimental
4. Análise de dados
5. Referências
6. Apêndice: Propagação de incertezas

1. Objetivos

O objetivo desta experiência consiste em diferenciar o tipo de material plástico que compõe objetos sólidos pela determinação de sua densidade. A densidade de um sólido não pode ser obtida a partir de uma medida direta. É preciso medir a massa e o volume do objeto para em seguida calcular a sua densidade. Portanto, o valor da densidade e sua incerteza vão depender de outras duas medidas. Esse processo leva à **propagação de incertezas** que iremos estudar nesta aula. Também iremos discutir como combinar medidas com diferentes incertezas e a **compatibilidade** entre duas medidas ou entre uma medida e um valor esperado.

2. Introdução

A densidade de um sólido homogêneo é definida por

$$d = \frac{m}{V},$$

onde m é a massa do sólido e V é o seu volume. Para a identificação de um plástico, a incerteza na densidade é tão importante quanto o próprio valor medido. Por exemplo, se a densidade obtida de um plástico X é $d_X = 1,15 \text{ g/cm}^3$ e a incerteza correspondente é $\sigma_X = 0,20 \text{ g/cm}^3$, o resultado é praticamente inútil para a identificação do plástico, pois a grande maioria dos plásticos têm densidades entre $0,9 \text{ g/cm}^3$ e $1,4 \text{ g/cm}^3$. Se, por outro lado, a incerteza é $\sigma_X = 0,05 \text{ g/cm}^3$, então o número de possibilidades é bem menor e o plástico pode ser identificado com a ajuda de outros critérios mais simples, tais como transparência, consistência e coloração. Assim, podemos perceber a necessidade de uma teoria para a propagação das

incertezas das medidas primárias (geométricas e massa) para se obter a densidade e, em particular, o cálculo da incerteza no resultado final.

3. Procedimento Experimental

A parte experimental desta aula consiste em determinar as massas (m_i) e os respectivos volumes (v_i) de uma amostra de cilindros feitos do mesmo plástico. As massas são determinadas por meio de balanças e os volumes devem ser calculados a partir das dimensões geométricas de cada sólido aplicando aos mesmos um modelo tridimensional conveniente. Essas medições serão feitas com uma régua e um paquímetro, conforme o caso.

Cada equipe receberá um pote contendo peças feitas de um mesmo plástico para as quais deverão ser determinadas suas densidade a partir dos comprimentos e suas respectivas massas. Apesar das peças em um determinado pote serem feitas do mesmo plástico, diferentes potes contém peças feitas de plásticos diferentes, que deverão ser identificados no final da experiência.

Situação 1:

Meça primeiramente a massa das peças usando uma balança digital e suas dimensões com uma régua.

Situação 2:

Meça novamente as massas utilizando uma balança analítica (que tem menor divisão de 0,0001g) e utilize as dimensões dos cilindros obtidas com a régua para o cálculo do volume.

Situação 3:

Desta vez, utilize o valor da massa obtido com a balança digital e meça as dimensões dos cilindros com um paquímetro.

Como regra geral de procedimento em física experimental, deve-se anotar os dados da maneira mais clara e organizada possível. O significado de um determinado número pode ser perfeitamente claro no momento em que se faz a experiência, mas pode se tornar um pouco obscuro alguns dias após e totalmente confuso depois de algumas semanas. O melhor, neste caso, é fazer uma figura para cada objeto, indicando as grandezas relevantes (massa, comprimento, diâmetro, etc.) e posteriormente anotar em tabelas os valores medidos de cada grandeza. Também devem ser anotadas as características dos instrumentos utilizados, tais como marca, modelo, número de série, menor divisão e outros detalhes.

4. Análise de dados

Calcule o volume v_i de cada peça, sua respectiva incerteza σ_{v_i} e sua incerteza relativa (σ_{v_i}/v_i) para cada uma das situações acima. Organize os resultados obtidos em cada situação em tabelas diferentes. Lembre-se de que as incertezas devem ser propagadas corretamente a partir das incertezas das grandezas primárias. Leia o Apêndice no final desta aula ou consulte o capítulo 8 da referência 1.

Novamente com o auxílio da teoria de propagação de erros, determine a densidade, d_i , de cada peça e sua incerteza, σ_{d_i} , considerando as três situações. Nesse caso, organize os valores de densidade que você obteve para cada tipo de material numa mesma tabela, a fim de compararmos os resultados obtidos por instrumentos de medidas diferentes. Qual situação propiciou o resultado mais preciso? Por quê? Os resultados são compatíveis, isto é, eles concordam entre si? Como podemos compará-los? Para serem considerados compatíveis é preciso que os valores numéricos das medidas sejam iguais? Que critério usar para definir a compatibilidade entre os resultados?

Utilizando uma tabela de densidade de plásticos (a ser fornecida pelo professor) identifique o material de cada equipe a partir da compatibilidade do valor obtido com as medidas com o valor esperado para cada tipo de plástico. Os valores de densidade que você obteve permitiram uma identificação de todos os tipos de materiais (sem ambigüidades)? Todas as três situações de medida realizadas permitem essa identificação? Discuta em detalhes.

5. Referências:

1. J. H. Vuolo et al, Física Experimental 1 para o Bacharelado em Física, Geofísica e Meteorologia, Instituto de Física da USP (2005).
2. J. H. Vuolo, Fundamentos da Teoria de Erros, São Paulo, Editora Edgard Blucher, 2ª edição (1996)
3. J. C. Sartorelli et al, Introdução às Medidas em Física, Notas de aula, Instituto de Física da USP, (2004).

6. Apêndice: Propagação de incertezas

Quando efetuamos uma operação matemática sobre uma medida que apresenta incerteza, o resultado a ser obtido apresentará uma incerteza final que dependerá da incerteza da grandeza primária. Caso desejemos determinar uma grandeza que depende de várias medidas, as incertezas de todas as medidas irão influir no resultado final. De que forma as incertezas das grandezas primárias irão influir na incerteza da grandeza a ser determinada?

Para exemplificarmos, consideremos o cálculo do volume de um cilindro que vocês utilizaram nesta aula. Como sabemos, o volume de um cilindro é dado pela fórmula:

$$V = \pi R^2 H,$$

onde R e H são o raio e a altura do cilindro, respectivamente. Fica claro, que a incerteza no volume do cilindro depende tanto da incerteza do raio quanto da incerteza da altura do mesmo. O raio e a altura influirão da mesma maneira na incerteza do volume?

A resposta é não, pois o volume do cilindro varia com o raio R de uma maneira diferente do que varia com a altura H . Dessa forma, a influência do raio e da altura será diferente no resultado final.

Pode-se mostrar que a incerteza σ_w de uma grandeza hipotética $w = w(x, y, z, \dots)$, que depende das variáveis x, y, z, \dots , é dada pela fórmula:

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \sigma_z^2 + \dots,$$

onde os termos dentro dos parênteses são derivadas parciais da função $w = w(x, y, z, \dots)$ com relação as variáveis x, y, z, \dots . A soma quadrática pode ser justificada pelo fato de que não seria razoável somá-las simplesmente, porque isto implicaria dizer que cada vez que o efeito da grandeza x estivesse no seu extremo, as demais também deveriam estar. Faria menos sentido ainda combiná-las com uma subtração, uma vez que quando combinamos várias grandezas primárias com incertezas, o resultado final deve ter uma incerteza maior e não menor.

Ainda no exemplo do cálculo do volume do cilindro, a incerteza no cálculo volume σ_V é dada pela expressão:

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial R} \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial H} \right)^2 \sigma_H^2} = \sqrt{(\pi H 2R \sigma_R)^2 + (\pi R^2 \sigma_H)^2}$$

onde as expressões dentro dos parênteses são os resultados das derivadas parciais de V com relação à R e H , respectivamente.

Dividindo os dois membros da equação acima pelo volume V , podemos mostrar que:

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_H}{H}\right)^2},$$

isto é, a incerteza no cálculo do volume pode ser expressada em termos das incertezas relativas do raio e volume σ_R/R e σ_H/H , respectivamente. Muitas vezes é mais vantajoso trabalharmos com as incertezas relativas, como fizemos acima, pois simplifica os cálculos e deixa clara a influência da incerteza de cada uma das medidas no valor da incerteza da medida final.

Experiência III (aula 05)

Distância focal de uma lente

1. Objetivos
 2. Introdução
 3. Medida da distância focal de uma lente delgada
- Distância focal de uma lente convergente
4. Arranjo e procedimento experimental
 5. Análise de dados
 6. Referências

1. Objetivos

Nesta experiência realizaremos novamente uma medida indireta. Desta vez, mediremos a distância focal de uma lente. Este experimento envolverá, mais uma vez, noções de estatística como a propagação de incertezas e noções novas, como a média ponderada.

2. Introdução

Quando realizamos uma medida experimental devemos ter em mente que outros fatores além da precisão instrumental podem influenciar sua incerteza. Por exemplo, quando estamos medindo um intervalo de tempo com um cronômetro digital, apesar da sua precisão ser de 1 centésimo de segundo, devido ao tempo de reação humano, não conseguimos realizar medidas de tempo com precisão superior a 1 ou 2 décimos de segundo. Nesse caso, apesar do instrumento possuir precisão elevada, o método de medida utilizado não permite aproveitar toda a precisão instrumental.

Situações onde a precisão do instrumento não é o fator determinante na incerteza de uma medida são comuns em Física Experimental. São muitos os fatores que limitam a precisão de uma medida. Alguns exemplos são:

- Limitação do operador em efetuar uma medida, por exemplo, acionar e parar o cronômetro.

- Uso do instrumento ou instrumento inadequado. Por exemplo, usar um micrômetro comum para medir o diâmetro interno de um cilindro.
- Medidas em condições não otimizadas, por exemplo em situações onde há paralaxe inevitável.
- Calibração do instrumento.
- Mau uso do equipamento.

A avaliação correta de uma incerteza experimental é muito complexa em casos onde o instrumento não é o fator determinante da incerteza de uma medida. Uma forma de minimizar esse problema é a realização da mesma medida várias vezes para avaliar a sua incerteza estatística. Porém, fatores como o mau uso do instrumento ou problemas de calibração, em geral, não se refletem em incertezas estatísticas. Deste modo, cabe ao experimentador realizar uma avaliação dos métodos utilizados durante o experimento, bem como a qualidade dos instrumentos e equipamentos experimentais, para que as incertezas das medidas efetuadas sejam estimadas da melhor forma possível.

Neste experimento realizaremos a medida da distância focal de uma lente convergente simples, utilizando o método do objeto e da imagem. Como discutiremos, dependendo da situação experimental a ser medida, as incertezas envolvidas são muito maiores que as incertezas dos equipamentos utilizados.

3. Medida da distância focal de uma lente delgada

Vários aparelhos ópticos como microscópios, telescópios e espectroscópios utilizam elementos como lentes, espelhos e prismas para construção de imagens. Outro exemplo de sistema óptico é o olho humano. Nesse caso, um elemento óptico importante, o cristalino, funciona como uma lente especial, na qual o seu poder de focalização pode ser alterado a partir da alteração da sua geometria.

O fenômeno físico que ocorre nas lentes é a refração. Quando um raio de luz incide obliquamente numa superfície, parte da sua intensidade luminosa é refletida e parte é transmitida (refratada). A intensidade refratada é, contudo, desviada em relação à sua direção incidente. Lentes são construídas de tal forma que a luz refratada nas suas superfícies altere as características da imagem observada, tais como a posição e magnificação.

3.1. Distância focal de uma lente convergente

Por definição, a distância focal de uma lente é a distância entre o ponto de foco de uma imagem e a lente caso o objeto que gera a imagem esteja a uma distância infinita da lente, conforme mostra a figura 2.1. No entanto isto só é correto nas chamadas lentes delgadas, uma aproximação que inclui apenas lentes tão finas que a distância entre as suas faces é desprezível quando comparada com outras distâncias envolvidas (distância do objeto e imagem).

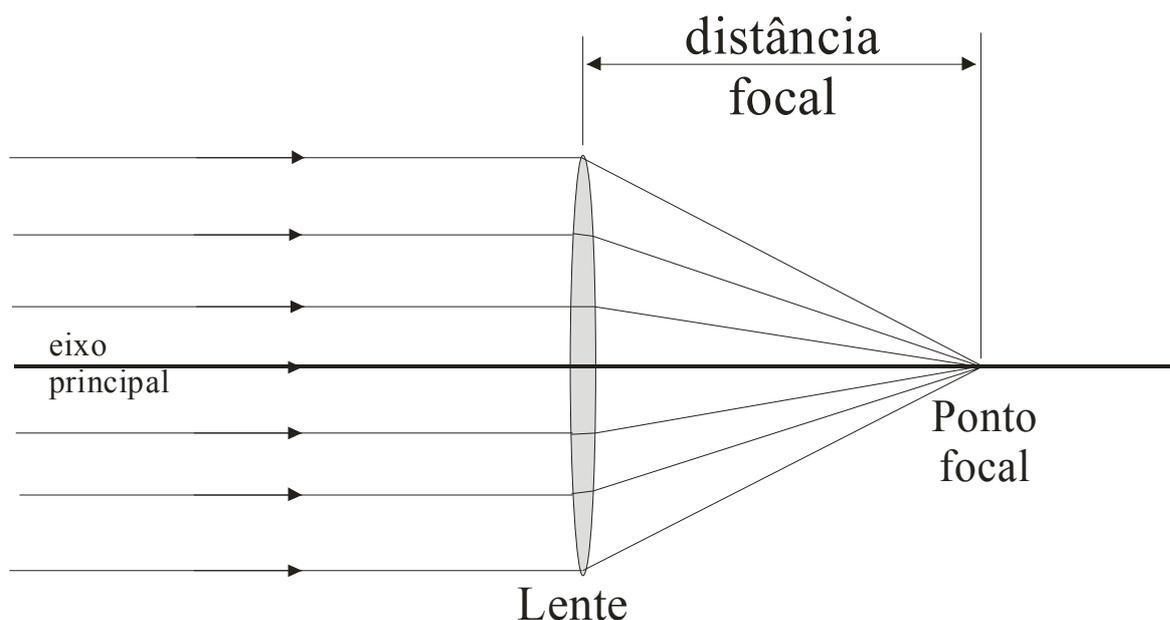


Figura 2.1 – distância focal de uma lente delgada simples.

O processo de construção de imagens formadas por lentes simples segue duas regras básicas:

1. Qualquer raio luminoso paralelo ao eixo principal da lente é desviado de tal forma a passar pelo ponto focal da lente
2. Qualquer raio luminoso incidente sobre o centro da lente não sofre desvio.

A figura 2.2 mostra como construir uma imagem em um sistema composto por uma lente convergente simples utilizando as duas regras descritas acima. A intersecção de raios luminosos provenientes de um determinado objeto forma a imagem deste objeto. Um aspecto interessante da formação da imagem está relacionado à posição do objeto em relação à lente. Dependendo dessa posição, os raios luminosos podem convergir ou divergir após atravessar a lente, conforme mostra a figura 2.3. Diz-se que uma imagem é real quando os raios luminosos convergem após atravessar a lente, formando uma imagem do lado oposto ao que o objeto se encontra.

Do mesmo modo, diz-se que uma imagem é virtual quando esses raios luminosos divergem após atravessar a lente. Nesse caso, a imagem é formada no mesmo lado da lente em que o objeto está posicionado.

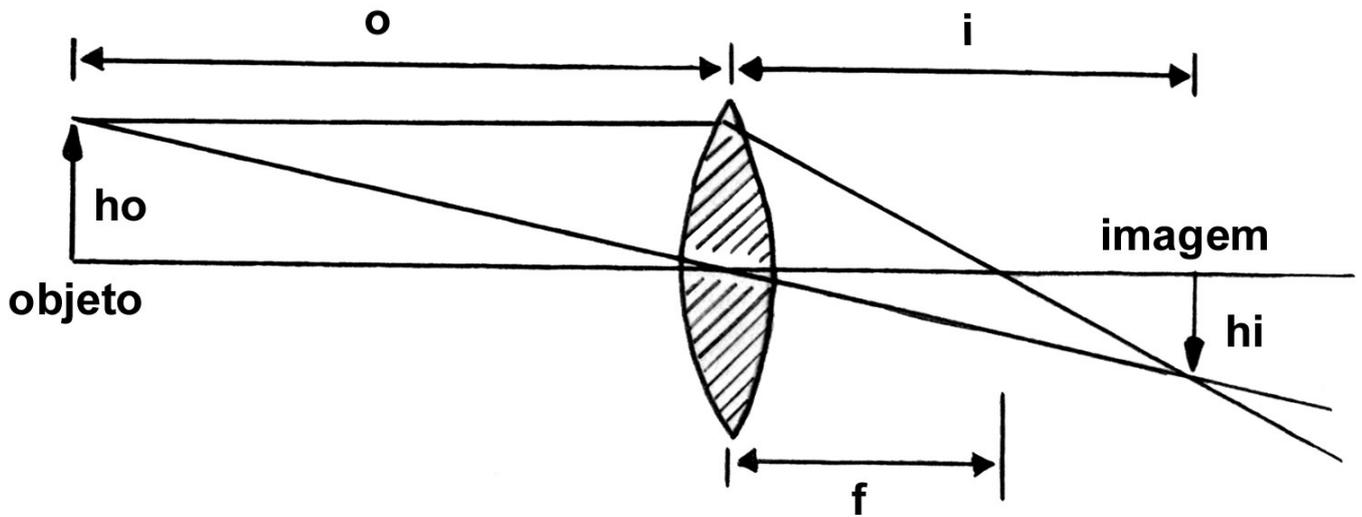


Figura 2.2 – Construção da imagem de um objeto por uma lente.

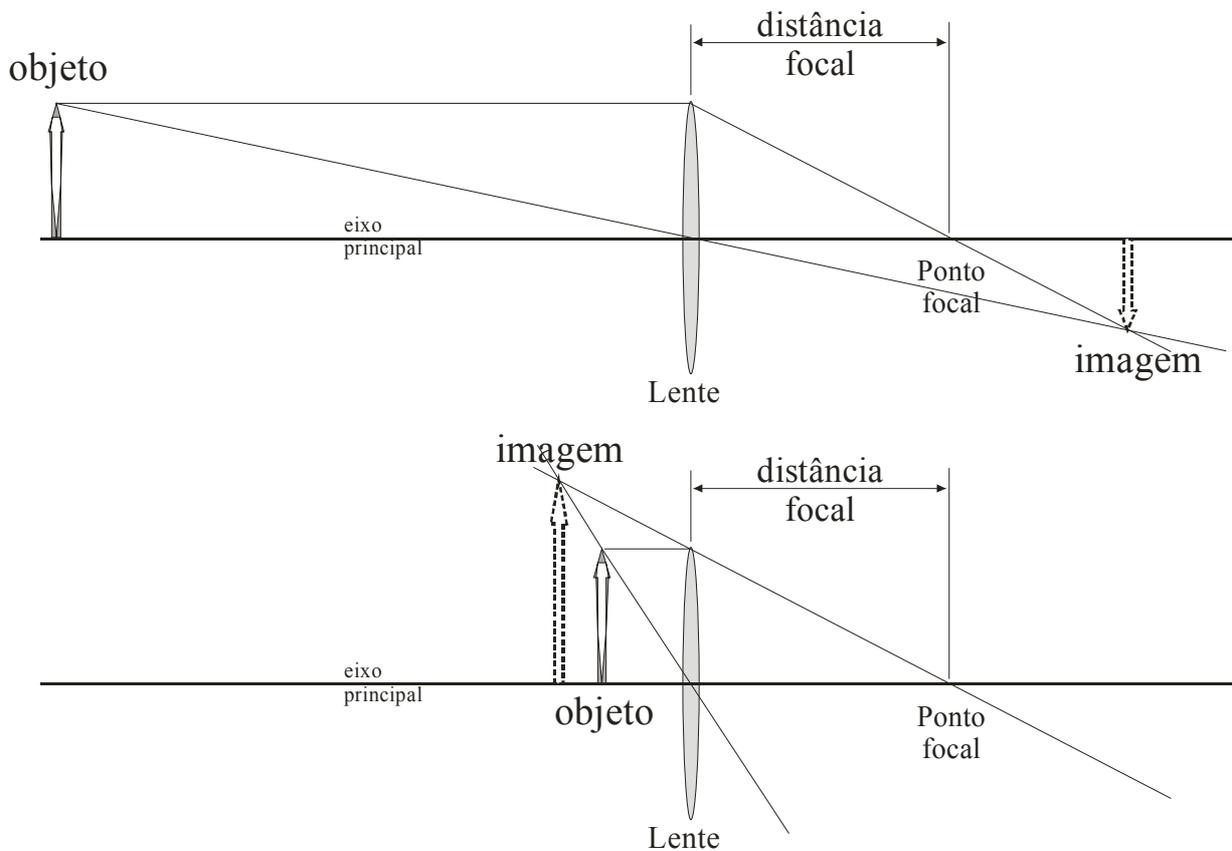


Figura 2.3 – Formação de uma imagem real (acima). Note que os raios convergem após atravessar a lente e uma imagem virtual (abaixo). Nessa última, os raios divergem após atravessar a lente.

Conhecendo-se a distância entre o objeto e o plano central da lente (o) e a distância entre a imagem e esse mesmo plano (i), conforme mostra a figura 2.2, a distância focal (f) pode ser calculada através da expressão:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}.$$

A expressão acima é denominada de equação de Gauss para lentes simples e é válida somente se a espessura da lente puder ser desconsiderada em relação às outras dimensões envolvidas. Assume-se que a distância do objeto à lente (o) é sempre positiva, enquanto que a distância da imagem à lente (i) é positiva caso a mesma encontre-se do lado oposto ao objeto e negativa caso a imagem se encontre do mesmo lado que o objeto. Uma lente é considerada convergente quando a sua distância focal, resultante da expressão acima, for positiva e divergente quando a distância focal resultante é negativa.

4. Arranjo e procedimento experimental

A experiência de medida da distância focal de uma lente simples será realizada utilizando uma bancada óptica simples. Essa bancada consiste em um trilho metálico preto (para evitar reflexões indesejadas de luz) onde se pode apoiar a fonte luminosa, a lente a ser estudada, e um anteparo para projeção da imagem.

A fonte luminosa consiste de um tubo de PVC contendo uma lâmpada comum. Esse tubo é fechado em ambos os lados. Em um desses lados, um orifício em forma de cruz, coberto com papel vegetal translúcido, é o objeto que será utilizado para determinar a distância focal da lente.

O anteparo no qual a imagem resultante será projetada é feito de plástico branco opaco e deve ser posicionado na bancada de modo que a imagem resultante esteja perfeitamente focalizada.

A lente a ser utilizada é uma lente convergente simples, acoplada a um anel plástico que permite o seu posicionamento na bancada óptica. Anote os dados que possibilitem identificar a lente utilizada, como o número de identificação da lente.

O procedimento experimental consiste em posicionar o objeto a uma distância, o , em relação ao centro da lente. Em seguida, posiciona-se o anteparo utilizado para projeção da imagem de tal forma que a mesma esteja bem focalizada visualmente. Mede-se a distância, i , entre o centro da lente e a superfície do anteparo.

Para cada medida efetuada, não esqueça de avaliar as incertezas na distância do objeto e da imagem ao centro da lente. Em muitas situações, a precisão da escala utilizada é muito maior que a precisão obtida durante a realização da medida. Desse modo, o uso da precisão da escala subestima a incerteza experimental. Para avaliar a incerteza de cada uma das medidas efetuadas avalie, por exemplo, a facilidade em determinar a posição do papel translúcido na fonte de luz e a facilidade em focalizar a imagem no anteparo. Dependendo da posição do objeto na bancada óptica, pode-se variar a posição do anteparo em alguns milímetros mantendo a imagem em aparente foco. A partir dessa variação pode-se estimar a incerteza na medida da distância da imagem.

Realize aproximadamente 15 medidas distintas de posição de objeto e imagem, avaliando as incertezas em cada uma delas. Organize esses dados em uma tabela, da forma que achar adequado. Anote o procedimento utilizado para a realização das medidas e incertezas, bem como os cuidados efetuados durante a tomada de dados. Evite que apenas um membro do grupo realize todas as medidas. Isso evita erros sistemáticos residuais devido a vícios de focalização. Quais são os fatores que mais influenciaram as medidas efetuadas? Evite realizar medidas nas quais as posições do objeto são muito próximas uma da outra.

5. Análise dos dados

Calcule a distância focal da lente, f_i para cada uma das medidas efetuadas, utilizando a expressão:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$$

A partir da expressão acima, utilizando a teoria de propagação de incertezas (consulte o capítulo 8 da referência 1) deduza uma expressão para o cálculo da incerteza da distância focal (σ_{f_i}) a partir das incertezas na posição do objeto e da imagem. Calcule a incerteza (σ_{f_i}) da distância focal bem como a incerteza relativa (σ_{f_i}/f_i) para cada uma das medidas efetuadas.

Organize os resultados obtidos em forma de tabela. Compare os resultados obtidos. Eles são compatíveis entre si? Observa-se alguma tendência nos valores das distâncias focais ou nas incertezas relativas com o aumento ou diminuição da distância do objeto à lente? Comente os resultados.

Em seguida, determine um valor médio para a distância focal da lente a partir das várias medidas realizadas. Como podemos fazer isso? Podemos

combinar as medidas de distância focal (f_i) com incertezas diferentes a partir da **média ponderada** que é dada por:

$$f = \frac{\sum_{i=1}^N p_i f_i}{\sum_{i=1}^N p_i}$$

onde N é o número de medidas obtidas e p_i é o peso estatístico de cada medida dado por:

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

A incerteza da média ponderada é dada por:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^N p_i}}$$

6. Referências:

1. J. H. Vuolo et al, Física Experimental 1 para o Bacharelado em Física, Geofísica e Meteorologia, Instituto de Física da USP (2005).

Experiência IV (aulas 06 e 07)

Queda livre

1. Objetivos
2. Introdução
3. Procedimento experimental
4. Análise de dados
5. Questões
6. Referências

1. Objetivos

Nesta experiência estudaremos o movimento da queda de um corpo, comparando os resultados experimentais com o modelo da queda livre. Elaborar um modelo consiste em descrever certo fenômeno a partir de uma teoria, adotando um conjunto de hipóteses que nos levam a considerar apenas os efeitos mais importantes. Utilizaremos a análise gráfica para verificar a validade do modelo empregado e, assim, das hipóteses que o originaram. Obteremos também uma estimativa da aceleração da gravidade.

Com este estudo, também iremos discutir como medir a velocidade de um objeto, que é uma grandeza derivada de outras duas grandezas fundamentais (o tempo e o espaço).

2. Introdução

A elaboração de modelos a partir de hipóteses simplificadoras é um procedimento importante para a física. Os fenômenos físicos dependem de muitos fatores e é fundamental saber reter apenas aqueles mais relevantes, que influenciam de modo significativo o processo considerado.

Quando uma maçã cai de uma árvore podemos dizer que ela sofre a influência da atração gravitacional, do empuxo relativo ao ar que a circunda e da resistência do ar. A princípio poderíamos considerar também a variação da atração gravitacional da Terra com a altura, a influência dos outros planetas e galáxias. Levar em conta todas estas forças para descrever a queda da maçã poderia tornar impraticável a obtenção de qualquer resultado numérico. Assim, por meio da análise da influência relativa dos

fatores mencionados, podemos eleger os mais relevantes e, com a hipótese de que apenas eles governam o movimento do corpo, somos capazes de descrever o fenômeno de maneira quantitativa.

No modelo de queda livre supõe-se que toda a influência do ar sobre o movimento do corpo é desprezível. Neste caso, a hipótese com que trabalhamos é a de que não há nenhuma outra força atuando no objeto, a não ser a da atração gravitacional. Quando se aplica um modelo, é sempre necessário considerar os limites da sua aplicabilidade. Podemos usar o modelo de queda livre para afirmar que uma bolinha de chumbo e de papel caem de 1 metro de altura em um mesmo intervalo de tempo, por exemplo. Mas será que a hipótese de desprezar a influência do ar continua válida quando lançamos estes objetos do décimo andar de um prédio?

Nesta aula estudaremos a queda de um objeto com um formato aerodinâmico dentro da sala do laboratório, verificando se o modelo de queda livre descreve adequadamente os resultados empíricos dentro da nossa precisão experimental.

De acordo com a segunda lei de Newton, podemos relacionar a força resultante F sobre um certo corpo com a sua quantidade de movimento p como:

$$F = \frac{dp}{dt} ,$$

onde $p = mv$, sendo m a massa do corpo e v , a sua velocidade. Considerando a situação em que a massa é constante, temos:

$$F = m \frac{dv}{dt} = m\vec{a} ,$$

em que a é a aceleração.

No modelo de queda livre trabalhamos com a hipótese de que apenas a força de atração gravitacional atua sobre o corpo. Esta pode ser dada por mg , onde g é a aceleração da gravidade, desde que o evento estudado situe-se nas proximidades da Terra. Dessa maneira, escrevemos:

$$m\vec{a} = m\vec{g} .$$

Considerando que a velocidade e a posição iniciais são dadas por v_0 e x_0 , respectivamente, a solução da equação acima fornece:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2} t^2 ,$$

que representa a posição do objeto em função do tempo. Se a posição e velocidade iniciais e a aceleração da gravidade possuem a mesma direção, podemos reescrever a equação acima, de maneira simplificada, como:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{g}{2} t^2 .$$

A velocidade, por sua vez, é dada por:

$$v(t) = v_0 + gt .$$

Com o modelo de queda livre tiramos uma outra conclusão importante acerca do movimento do corpo e que empregaremos na análise dos dados: como se considera que a aceleração é constante, podemos dizer que a velocidade média entre dois instantes t_1 e t_2 é igual à velocidade instantânea na metade do intervalo, $t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$. Dessa forma, temos:

$$v(t_m) = \overline{v_{t_1, t_2}} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} .$$

Podemos nos questionar em que condições esta aproximação é válida. Será que ela é válida somente para o caso da queda livre? Ou será que mesmo para situações onde a influência do ar é mensurável, esta aproximação também é válida para intervalos de tempo curtos?

3. Procedimento experimental

Nesta experiência, o objeto a ser lançado tem a forma de um elipsóide de revolução (parecido com um ovo), que cai entre dois fios metálicos sem tocá-los.

Inicialmente, o objeto é mantido no topo da haste por meio de um eletroímã, que é desligado através de uma chave, liberando o elipsóide.

O acionamento continuado desta chave provoca pulsos de alta tensão entre os fios e, devido a um anel metálico em torno do corpo (na figura 5.1 ele é representado por uma faixa hachurada em torno do elipsóide, que é feito de um material isolante), ocorrem descargas elétricas entre os fios, originando faíscas. Os pulsos são gerados por um circuito elétrico, com a mesma frequência da rede elétrica, $f = 60,00\text{Hz}$ (estes quatro algarismos significativos mostram a grande precisão do período de oscilação da rede elétrica). Assim, o intervalo de tempo entre duas faíscas é

$$T = \frac{1}{60,00} \text{s} .$$

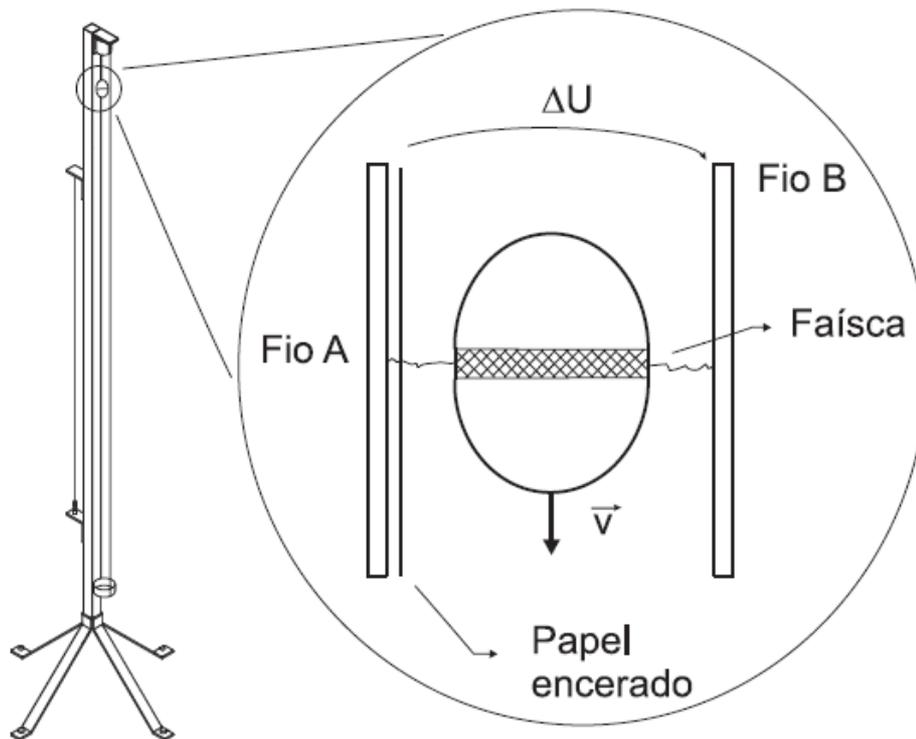


Figura 5.1: equipamento utilizado para o estudo da queda do corpo. As faíscas provocadas pelos pulsos de alta tensão entre os dois fios marcam um papel encerado.

Para registrar a ocorrência das faíscas emprega-se uma fita de papel encerado (papel de fax), colocada ao longo da haste de suporte dos fios. As descargas elétricas marcam o papel, determinando a posição do objeto no instante em que a faísca ocorreu.

Para se realizar a tomada de dados sugerimos os seguintes passos:

- 1) para garantir que o elipsóide marque corretamente o papel, é importante observar se a haste de suporte dos fios está alinhada com a vertical, o que pode ser verificado com um fio de prumo e com algumas simulações de queda do corpo. Nestas deve-se notar se o objeto não toca os fios. **Tome muito cuidado para não tomar um choque elétrico;**
- 2) para obter o deslocamento do corpo com o tempo, usamos o papel encerado que será marcado pelas faíscas em intervalos constantes. Nesta etapa deve-se prender o papel na haste e colocar o elipsóide no topo dela, preso pelo eletroímã;
- 3) após garantir que a haste esteja na vertical, a fita presa corretamente e o ovo preso no topo da haste, aciona-se a chave que desliga o eletroímã e ao mesmo tempo dá início aos pulsos de alta tensão;

- 4) após a queda do elipsóide, é importante observar se as marcas no papel encerado são regulares, pois isto garante que todas as faíscas ocorreram corretamente e não houve falhas.

4. Análise de dados

Para analisarmos o movimento do corpo, podemos determinar a relação entre a sua velocidade e o tempo. Para isso, medimos o deslocamento do elipsóide $\Delta x_{ij} = x(t_j) - x(t_i)$, correspondente ao intervalo de tempo $\Delta t_{ij} = t_j - t_i$, obtendo a velocidade instantânea em $t_m = \frac{t_i + t_j}{2}$, a partir de:

$$v(t_m) = \frac{\Delta x_{ij}}{\Delta t_{ij}} = \frac{x(t_j) - x(t_i)}{t_j - t_i} .$$

É importante lembrar que ao usarmos esta relação assumimos que a aceleração é constante, pelo menos em um breve intervalo de tempo.

Na análise dos dados, além da unidade convencional de tempo, o *segundo*, podemos alternativamente adotar como unidade de tempo o intervalo entre duas faíscas, a qual denominamos de *ut*, onde $ut = (1/60)s$. Por exemplo, podemos dizer que a terceira faísca ocorre em $3ut$. Fica a critério do aluno escolher a unidade de tempo usada na análise.

A análise dos resultados é feita a partir das seguintes etapas:

Parte I:

- 1) identificar o primeiro ponto marcado na fita, associando-o com o instante inicial, ou seja, $t = 0ut$ (ou *segundo*). Localizar os demais, anotando ao lado deles os tempos correspondentes em *ut* ou *segundos* ($1ut$, $2ut$, $3ut$ e etc);
- 2) medir a distância entre os diversos pontos, $\Delta x_{ij} = x(t_j) - x(t_i)$, com uma régua, anotando os valores em uma tabela com a descrição do intervalo ao qual eles se referem. Um dos integrantes do grupo, denominado de A, obterá a distância entre duas marcas consecutivas (1-2, 3-4, 5-6 e etc) e o B medirá, pulando uma marca (1-3, 2-4, 5-7, 6-8 e etc). Veja que nenhum ponto foi tomado como extremo de dois intervalos. Isto foi feito para evitar que um dado seja dependente de outro. Não se esqueça de estimar a incerteza destes valores;

- 3) construir tabelas das velocidades instantâneas e dos tempos aos quais elas se referem, com as respectivas incertezas.

Parte II:

- 1) fazer um gráfico da velocidade em função do tempo, empregando os pontos obtidos na etapa anterior, colocando barras de incerteza. Assumindo a validade das hipóteses que dão origem ao modelo de queda livre, esperamos obter uma dependência linear entre a velocidade e o tempo, o que representa que a aceleração do corpo é constante. A partir desta idéia, avalie a adequação do modelo aos dados. Eles são bem descritos por uma reta?
- 2) por meio da análise do gráfico, determinar os parâmetros da reta com as respectivas incertezas (há uma explicação sobre isto na apostila anterior, no capítulo 3). Teremos então a velocidade no instante inicial e a aceleração do corpo;
- 3) discutir os resultados obtidos, comparando a aceleração da gravidade obtida com o valor fornecido pelo IAG (Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas), $g = 9,7864 \text{ m/s}^2$.
- 4) Se trocássemos o elipsóide por um objeto oco, muito mais leve, será que o modelo de queda livre continuaria valendo? Com o objetivo de explorar esta questão mais a fundo efetuaremos medidas relativas ao movimento de um carro em um trilho de ar, que oferece pouco atrito. Inicialmente tomam-se os dados relativos ao carro em queda apenas. Em seguida, colocaremos uma vela para observar como os resultados são alterados. O que se espera para cada situação? Faça um gráfico para cada caso, comparando-os.

5. Questões

- 1) Por que é importante não tomar intervalos cujos extremos sejam repetidos?
- 2) A primeira faísca deve obrigatoriamente ocorrer com o acionamento da chave que desliga o eletroímã? Neste sentido, o valor da velocidade tirado do ajuste da reta está de acordo com o esperado?

6. Referências

1. J. H. Vuolo et al, Física Experimental 2 para o Bacharelado em Física, Geofísica e Meteorologia, Instituto de Física da USP (2005).

Experiência V (aulas 08 e 09)

Curvas características

1. Objetivos
2. Introdução
3. Procedimento experimental
4. Análise de dados
5. Referências

1. Objetivos

Como no experimento anterior, iremos estudar a adequação de um certo modelo a resultados experimentais. O objetivo desta experiência é estudar alguns elementos resistivos através do levantamento de suas curvas características. Estudaremos o **resistor comercial** e a **lâmpada de filamento**. Para isso, iremos aprender a utilizar os instrumentos de medida elétrica: voltímetro e amperímetro, e vamos verificar a influência dos instrumentos no resultado experimental.

Finalizando, iremos verificar a adequação das curvas características ao modelo da Lei de Ohm.

2. Introdução

Define-se como corrente elétrica através de um condutor, o movimento dos elétrons livres do material do condutor numa direção preferencial. Quantitativamente a corrente pode ser escrita como a quantidade de carga que atravessa a seção reta do condutor por unidade de tempo:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta q}{\Delta t} \right) = \frac{dq}{dt} \quad (2.1)$$

onde q é a carga e t é o tempo. A unidade de corrente é o **ampère** que corresponde ao fluxo de um **coulomb** de carga por **segundo**.

Quando os elétrons livres de um material condutor se movimentam, eles sofrem choques sucessivos com outros elétrons livres e com os átomos do material e estão sujeitos às forças de atração e repulsão exercidas por

eles. Tudo isso dificulta o trânsito das cargas livres que gastam energia. Portanto, para manter esse trânsito, ou seja, a corrente elétrica, deve-se fornecer energia de uma fonte externa. A dificuldade do trânsito das cargas livres através de um material é chamada de resistência elétrica do material.

A resistência elétrica de um elemento resistivo é definida como a razão entre a voltagem e a corrente que passa por esse elemento:

$$R = \frac{V}{i} \tag{2.2}$$

Essa é a definição geral de resistência elétrica, seja o elemento resistivo **ôhmico** (linear), caso em que a resistência R é constante para todos os pares (V, i) , seja ele **não ôhmico** (não linear), caso em que a resistência varia para os diferentes pares (V, i) .

Para estudar elementos resistivos de um circuito levantamos suas curvas características. A curva característica de qualquer elemento de circuito é definida como sendo o gráfico da corrente i (ordenada) em função da tensão V (abscissa). Esse gráfico serve para caracterizar o comportamento do elemento sob determinadas condições ambientais.

A definição (2.2) para um elemento resistivo assegura uma propriedade importante desses elementos que é $V_x=0$ quando $i_x=0$. Isso quer dizer que por mais complicada que seja sua curva característica, ela sempre passa pela origem do sistema de coordenadas, como pode ser visto na figura 2.1.

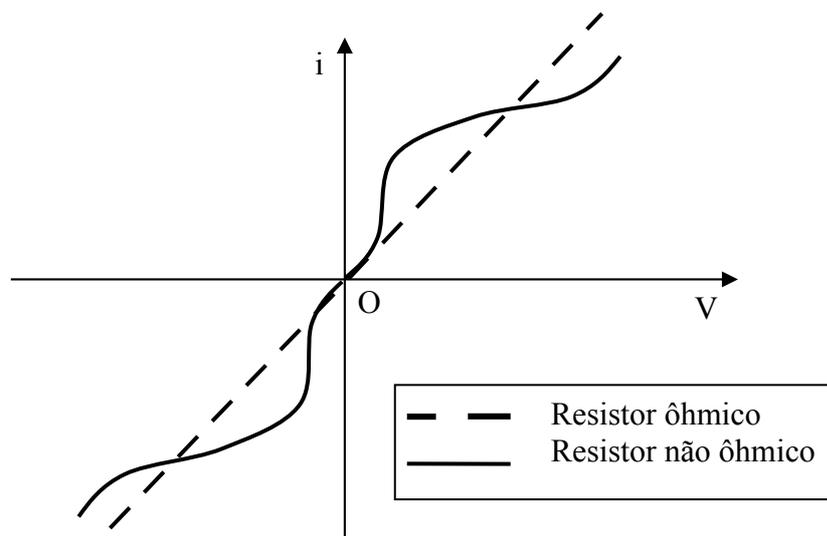


Figura 2.1: Curva característica de dois elementos resistivos hipotéticos.

3. Procedimento Experimental

ATENÇÃO:

Todo experimento que envolve eletricidade deve ser efetuado com cuidado, para evitar danos ao equipamento ou acidentes com os experimentadores. Por isso, fique atento às orientações do seu professor.

Inicialmente, os alunos irão se familiarizar com os instrumentos de medida e com as informações do manual fornecidas pelo fabricante. Depois desse primeiro contato, as curvas características serão levantadas. Para uma explicação detalhada sobre o princípio de funcionamento e a utilização de multímetros, veja a seção 3.2 do Capítulo IV da apostila da disciplina.

Parte I:

Cada equipe receberá dois multímetros e dois resistores. O objetivo desta parte do procedimento experimental é determinar os valores das resistências de três maneiras diferentes, analisando a influência do equipamento de medida em cada caso.

- (a) Inicialmente, coloque o multímetro na função ohmímetro, meça e anote os valores das três resistências disponíveis. Verifique as variações na leitura e a melhor escala de leitura. Utilize o manual do multímetro para verificar os valores de incerteza das medidas na função ohmímetro. Anote esses valores.
- (b) Em seguida, monte um circuito conforme ilustrado na figura 3.1, usando cada um dos resistores (representado por **X** na figura) por vez.

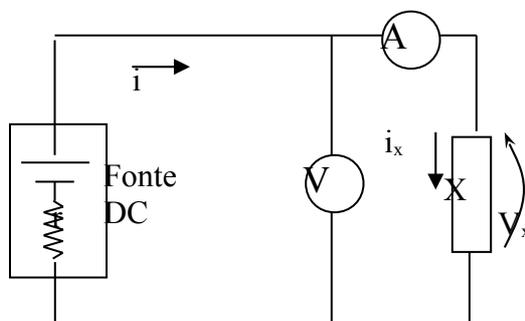


Figura 3.1: Primeiro circuito sugerido para se obter a resistência de um resistor.

Ligue os multímetros, um na função voltímetro em paralelo com o resistor e o outro na função amperímetro em série com o resistor. **Ligue o amperímetro e o voltímetro na maior escala de leitura e ajuste para a escala ideal**, meça e anote os valores de tensão e corrente lidos nos multímetros. Fique atento para a escolha da escala de leitura dos multímetros, utilizando sempre a escala que forneça maior precisão na medida. Anote a escala utilizada.

Utilize o manual do multímetro para verificar os valores de incerteza das medidas na função voltímetro e amperímetro. Anote as incertezas das escalas utilizadas.

(c) Monte um novo circuito conforme ilustrado na figura 3.2.

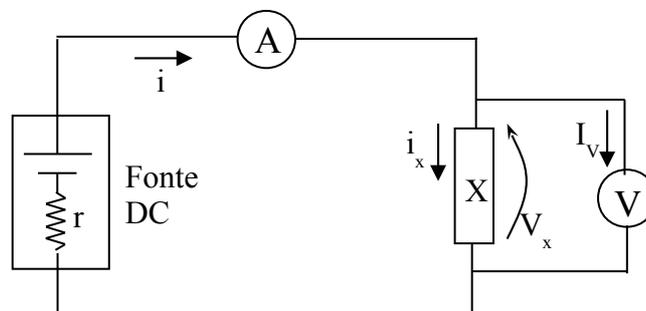


Figura 3.2: Circuito alternativo para se obter a resistência e a curva característica de um resistor.

Mais uma vez, utilize cada um dos três resistores por vez. Anote o valor da corrente i no circuito, medida pelo amperímetro, com sua respectiva incerteza (de acordo com o manual do fabricante). Anote o valor da queda de tensão V_x sobre o resistor.

Parte II:

Monte o circuito da figura 3.2. Varie o valor de tensão da fonte, no intervalo orientado pelo professor, totalizando cerca de 15 medidas distribuídas nesse intervalo. Para cada valor de tensão da fonte, anote os valores de queda de tensão V_x no resistor. Anote as escalas de leitura do voltímetro e amperímetro e as incertezas nessas escalas de leitura, de acordo com o manual.

Substitua o resistor do circuito 3.2, por uma lâmpada de filamento. Efetue o mesmo procedimento de variação da tensão da fonte, medindo as quedas de tensão na lâmpada V_x . Procure obter cerca de 15 medidas distribuídas no intervalo de tensão orientado pelo professor. Anote as escalas de leitura do voltímetro e amperímetro e as incertezas nessas escalas de leitura, de acordo com o manual.

4. Análise de Dados

Parte I:

- a) Anote o valor de leitura de R_x e sua incerteza.
- b) Utilize o valor medido de i e da queda de tensão V_x sobre o resistor para calcular o valor de R_x . Calcule a incerteza no valor de R_x utilizando a propagação de erros.
- c) Repita o mesmo cálculo do item anterior para R_x , porém utilizando os novos valores de i e V_x medidos, com sua respectiva incerteza (também utilizando a propagação de erros).

Compare os valores de R_x obtidos com os três métodos acima. Você observou alguma diferença nesses valores? Em caso positivo, ao que você atribui essa diferença?

Parte II:

Construa o gráfico de i em função de V_x , com as incertezas de cada ponto, e analise suas características, comparando os comportamentos do resistor comercial e da lâmpada nos intervalos de tensão utilizados.

O comportamento obtido era esperado? Discuta se os elementos resistivos satisfazem o modelo ôhmico, ou seja, apresentam resistência constante. Como você pode fazer essa verificação? Em caso negativo, discuta quais fatores devem estar influenciando a mudança de comportamento.

No caso em que o modelo ôhmico é satisfeito, calcule, através do inverso do coeficiente angular da reta obtida, o valor da resistência R_x . Determine sua incerteza utilizando o método gráfico de reta máxima e reta mínima. Como este resultado se compara àqueles obtidos na parte I?

5. Referências

1. N. Carlin et al, Física Experimental III para o Bacharelado em Física, Geofísica e Meteorologia, Instituto de Física da USP (2005)

Experiência VI (aula 10)

Resfriamento de um líquido

1. Objetivos
2. Introdução
3. Arranjo e procedimento experimental
4. Análise de dados
5. Referências

1. Objetivos

A partir de um arranjo experimental bastante simples, vamos estudar a lei de resfriamento de uma solução de glicerina. Além da familiarização com experimentos envolvendo o conceito de temperatura, vamos extrair empiricamente uma lei física através de uma análise gráfica dos dados.

2. Introdução

Assim como a Mecânica, a termodinâmica é uma das áreas mais fundamentais da física. Os conceitos de temperatura e calor estão sempre presentes no nosso cotidiano, por exemplo, quando cozinhamos um alimento, ao tomamos banho e etc. Outro conceito diretamente relacionado com temperatura e calor que também está presente no nosso cotidiano é o conceito de troca de calor.

A temperatura de um corpo é uma medida do grau de agitação de suas moléculas. Quando a temperatura de um corpo é suficientemente baixa, suas moléculas quase não se movimentam, seja esse movimento de translação, rotação ou ainda de vibração. Por outro lado, para temperaturas suficientemente altas, as moléculas estão em constante agitação. A grande importância da temperatura é que além de ser uma medida de fácil aquisição experimental, podemos relacioná-las com várias outras grandezas de interesse.

Como em toda física experimental, para efetuarmos uma medida de temperatura também necessitamos de um instrumento de medição. O instrumento de medida mais conhecido para efetuarmos medidas de temperatura é sem dúvida o termômetro. Utilizamos esse aparelho

freqüentemente para medirmos nossa temperatura quando estamos com febre. Seu princípio de funcionamento é bastante simples. Quando o material que o compõe entra em equilíbrio térmico com a temperatura do nosso corpo, sua escala estaciona num determinado valor, que é a temperatura corporal. Em geral utiliza-se o termômetro de coluna de mercúrio (ou de álcool) cuja propriedade termométrica é a dilatação volumétrica dos líquidos que se aquecem.

Outro instrumento de medida de temperatura é o termopar metálico que apresenta o efeito termoelétrico pelo qual é produzida uma diferença de potencial elétrico na junção de dois materiais distintos (força eletromotriz) que é dependente da temperatura.

É do conhecimento comum que dois corpos inicialmente em temperaturas diferentes, quando colocados em contato depois de um certo tempo atingem um estado final em que suas temperaturas são iguais. É claro que o tempo necessário para que as temperaturas dos corpos em contato se igualem varia muito nas diferentes situações.

Por exemplo, sabemos que a areia da praia se aquece mais rapidamente que a água do mar. O tempo gasto para um sistema atingir o equilíbrio térmico pode depender de vários fatores, como a própria composição química dos materiais e do reservatório térmico utilizado na experiência.

Vamos considerar aqui um sistema formado por uma amostra de glicerina dentro de um tubo de ensaio no qual está inserido um termopar para a medição de temperatura. Este sistema é colocado dentro de um cilindro no qual há um fluxo de ar comprimido. Vamos aquecer esse sistema até temperaturas em torno de 110°C e esperar seu resfriamento até atingir a temperatura ambiente. Desejamos saber qual é a função matemática que descreve o resfriamento da glicerina.

A fim de explicarmos a lei do resfriamento da glicerina do ponto de vista teórico, considerou-se um modelo [1] que leva em conta considerações geométricas sobre o reservatório térmico e a capacidade térmica dos materiais que compõem a glicerina. A partir deste modelo, podemos prever que a temperatura da solução de glicerina decai exponencialmente da seguinte forma:

$$\Delta T = T - T_R = (T_0 - T_R)e^{-t/\tau} \quad (1)$$

onde T_0 e T_R são a temperatura inicial e a temperatura do reservatório, respectivamente. A partir da equação acima, vemos que temperatura do sistema decai exponencialmente com uma constante de decaimento τ , cujo valor depende das considerações mencionadas acima. Como conhecemos a

temperatura do sistema e as medidas de tempo, é possível determinarmos o tempo característico τ , supondo a lei acima.

3. Arranjo e procedimento experimental

O arranjo experimental utilizado nesta experiência está esquematizado na figura abaixo. Ele consiste de um tubo de ensaio com uma certa quantidade de glicerina na qual está imerso um termopar para a medição da temperatura. Este conjunto é colocado dentro de um cilindro no qual há fluxo de ar comprimido.

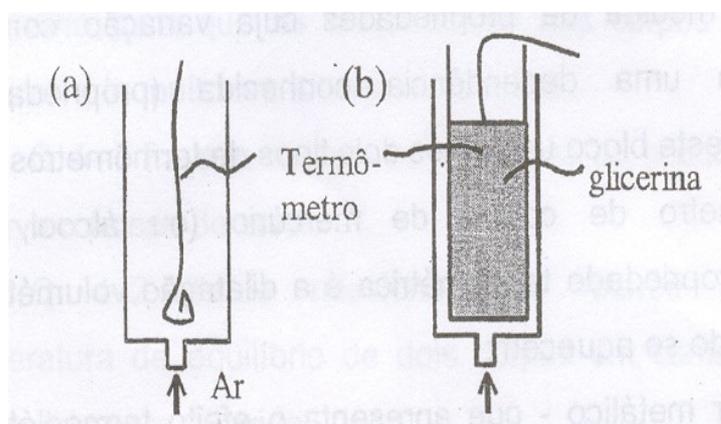


Figura 1: Sumário do arranjo experimental utilizado. Na situação (a) o termopar é inserido no tubo de ensaio para a medição de T_R , enquanto na situação (b) o termopar é inserido no tubo de ensaio com glicerina.

Inicialmente colocamos o termopar dentro do cilindro de ar comprimido para a medição da temperatura do reservatório T_R , conforme mostrado na figura 1a.

O tubo de ensaio vai ser lentamente aquecido a partir de uma temperatura inicial, que é a temperatura ambiente. Antes de aquecer a glicerina meça a altura h da glicerina no tubo de ensaio. Em seguida, posicione o termopar aproximadamente no nível médio de altura da glicerina conforme esquematizado na figura 1b. Inicie o processo de aquecimento com o auxílio de uma chama, aproximando e afastando a chama do tubo de ensaio. Quando o sistema atingir temperaturas da ordem de 112°C insira o tubo de ensaio no cilindro com ar comprimido, tomando o cuidado de não encostar o tubo de ensaio nas laterais e no fundo do cilindro. Observe a diminuição de temperatura e quando o termopar registrar 110°C , dispare o cronômetro para iniciar a tomada de dados.

A fim de tomarmos medidas mais precisas, é conveniente anotarmos intervalos regulares de temperatura, por exemplo, marcando variações de 5 °C na temperatura da glicerina. Para isso, um dos componentes da equipe observa o cronômetro e dá um aviso ao companheiro a cada decréscimo de 5 °C na temperatura. O companheiro então anota o tempo correspondente ao decréscimo na temperatura. A tomada de dados deve prosseguir até que a temperatura da glicerina seja aproximadamente 5 °C superior a temperatura ambiente.

4. Análise de dados

Organize os dados de temperatura e tempo numa tabela. Não se esqueça que a equação (1) descreve a diferença entre a temperatura da glicerina e a temperatura do reservatório a cada instante de tempo t .

Faça um gráfico da temperatura em função do tempo utilizando um papel milimetrado. Qual é a forma da curva formada pelos pontos experimentais ?

Isso confirma a descrição teórica feita através da equação (1)?

Conforme você já deve ter percebido, o papel milimetrado é bastante apropriado quando desejamos fazer gráficos de funções que são lineares. Para outras funções, entretanto, não conseguimos extrair muitas informações quando o utilizamos. Isso é decorrência de nossa dificuldade em trabalhar com funções que não são lineares. Dessa forma, uma maneira de linearizarmos um conjunto de dados consiste em utilizar escalas logarítmicas ao invés de escalas lineares. Para esse propósito, foram criados papéis gráficos especiais nos quais uma (ou ambas) as escalas é graduada logaritmicamente. A escala logarítmica é construída de tal forma que quando uma quantidade x é marcada nessa escala o comprimento (distância em relação à origem do eixo) é proporcional à $\log(x)$. Os papéis gráficos que apresentam uma escala logarítmica são chamados de monolog. Aqueles que possuem as duas escalas logarítmicas são denominados papéis dilog.

Para uma descrição detalhada sobre a utilização dos papéis monolog e dilog, consulte o capítulo III da Apostila.

Faça um gráfico de ΔT em função do tempo utilizando um papel monolog.

Qual é o formato da curva agora? Quantos regimes de decaimento há no resfriamento da glicerina?

A partir dos dados no papel monolog, verifique que a constante de decaimento τ é simplesmente o inverso do coeficiente angular da curva

graficada acima. Determine a constante de decaimento τ . Compare com o valor do tempo característico obtido pelas outras equipes.

A partir do gráfico final feito para a glicerina, obtenha os tempos necessários para que a **temperatura da glicerina** atinja as seguintes temperaturas: 65 °C, 44,5 °C e 31,3 °C.

Questão:

A taxa de decaimento da ocorrência de uma certa doença é descrita pela equação

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

Na tabela abaixo, temos alguns valores do número de ocorrências da doença em função do número de anos.

t (anos)	1,1	2	4,7	5,5	6,7
$N(t)$	50	33	10	7	4

Determine os parâmetros N_0 e k .

5. Referências:

1. J. C. Sartorelli, Y. Hosoume e E. M. Yoshimura, Rev. Bras. Ens. de Fis., **21**, 116 (1999).
2. Introdução as Medidas em Física, Notas de Aula, Instituto de Física da USP (2004).

Experiência VII (aulas 11 e 12)

Cordas vibrantes

1. Objetivos
2. Introdução
3. Arranjo experimental
4. Procedimento experimental
5. Análise de dados
6. Apêndice
7. Referências

1. Objetivos

Essa experiência tem como objetivo estudar o efeito de ressonância em um fio tensionado e, a partir desse estudo, determinar uma expressão empírica que estabeleça uma conexão entre as frequências de ressonância desse sistema com todos os parâmetros relevantes ao experimento.

2. Introdução

Em muitas situações do cotidiano, a explicação de um fenômeno experimental pode ser muito complexa do ponto de vista teórico. Apesar disso é importante poder prever o efeito causado por esse fenômeno. Nesses casos, costuma-se determinar fórmulas empíricas que possibilitem a previsão de uma grandeza física quando o objeto estudado encontra-se em alguma configuração pré-estabelecida. Nesse contexto, uma fórmula empírica não pode ser considerada uma explicação física do fenômeno estudado, mas apenas uma ferramenta de previsão para esse fenômeno.

Quando se quer determinar uma expressão empírica para uma determinada grandeza deve-se, a partir da observação, estabelecer quais parâmetros influenciam a grandeza estudada. Uma vez estabelecida a lista de parâmetros, estuda-se, através de medidas, a dependência da grandeza física com cada um desses parâmetros, mantendo-se todos os outros fixos. Em seguida, todos os dados obtidos são analisados com o intuito de extrair uma expressão que permita prever o valor da grandeza estudada para um determinado conjunto de parâmetros.

Nesta experiência, realizaremos o estudo do fenômeno de ressonância de um fio tensionado com o objetivo de obter uma expressão que relacione as frequências de ressonância observadas com os parâmetros do experimento.

Quando um fio tensionado é posto a vibrar, dependendo da frequência de vibração utilizada, o fio pode entrar em um estado de ressonância, na qual a amplitude da vibração torna-se bastante elevada. As frequências nas quais a ressonância é observada dependem de vários parâmetros do fio. Esse é o efeito que permite, por exemplo, que vários instrumentos musicais funcionem, como o violão, piano, etc. No caso do violão, em geral de seis cordas, cada corda vibra em uma frequência de ressonância bem estabelecida (notas musicais). Para gerar as diferentes notas, cada corda possui características físicas diferentes, como o material que é construída, espessura, etc. Além disso, outros fatores, como o comprimento da corda e a tensão aplicada à mesma (afinação do instrumento) influencia a frequência de ressonância. Assim, para obter uma expressão que possibilite prever a frequência de ressonância de uma corda deve-se estudar como a frequência varia com cada um desses parâmetros.

A hipótese mais simples para uma fórmula empírica consiste em supor que a dependência de uma grandeza (y) com um determinado parâmetro (x) se dá através da expressão:

$$y = Ax^b$$

onde A e b são constantes. Outras formas (exponencial, logarítmica, trigonométrica, etc) podem ocorrer. Contudo, somente a observação e análise das medidas efetuadas nos permitem fazer uma escolha mais adequada.

No nosso exemplo do violão, os parâmetros que podem influenciar a frequência de vibração do fio são: o comprimento (L), a tensão aplicada (T) e as suas características de construção. No último caso, podemos representar essas características de construção através da densidade linear do fio (μ), sendo $\mu = M/L$, com M sendo a massa do fio. Assim, uma primeira aproximação para uma expressão que correlacione a frequência de ressonância com esses parâmetros pode ser escrita como:

$$f = AL^\beta T^\gamma \mu^\delta,$$

Onde A , β , γ e δ são constantes.

Quando observamos um fio de violão, percebemos que, devido a sua construção, outras frequências além da frequência natural de ressonância, podem ser obtidas. Devido ao fato da corda estar presa em ambas as

extremidades, além da frequência natural, frequências de meio tom também são possíveis de ser obtidas. Na figura 1.1 é mostrado um esquema da vibração de uma corda cujo comprimento é bem determinado, presa em ambas as extremidades. O modo mais simples de vibração é aquele no qual a corda se movimenta totalmente em fase. Costuma-se denominar essa frequência de “frequência natural de vibração”. Um segundo modo de vibração, no qual podemos dividir a corda ao meio e que cada metade se movimenta em oposição de fase também é possível, pois a corda permanece fixa em suas extremidades e assim sucessivamente, conforme mostra a figura 2.1. Cada um desses modos é representado por um número, correspondente ao número de ventres (máximos de vibração) observados. Assim, o primeiro modo de vibração possui $n = 1$, o segundo, $n = 2$ e assim indefinidamente. Com base nesses argumentos é de se esperar que a frequência de vibração de um fio também dependa do modo de vibração observado. Assim, a fórmula empírica para as frequências de ressonância pode ser escrita como:

$$f = Cn^\alpha L^\beta T^\gamma \mu^\delta ,$$

onde α , β , γ e δ são constantes que podem ser extraídas dos dados experimentais.

O objetivo desse experimento é estudar o fenômeno de ressonância em um fio tensionado e verificar se a suposição acima para a dependência da frequência com os parâmetros experimentais é válida e, caso seja, determinar o valor das constantes na expressão acima.

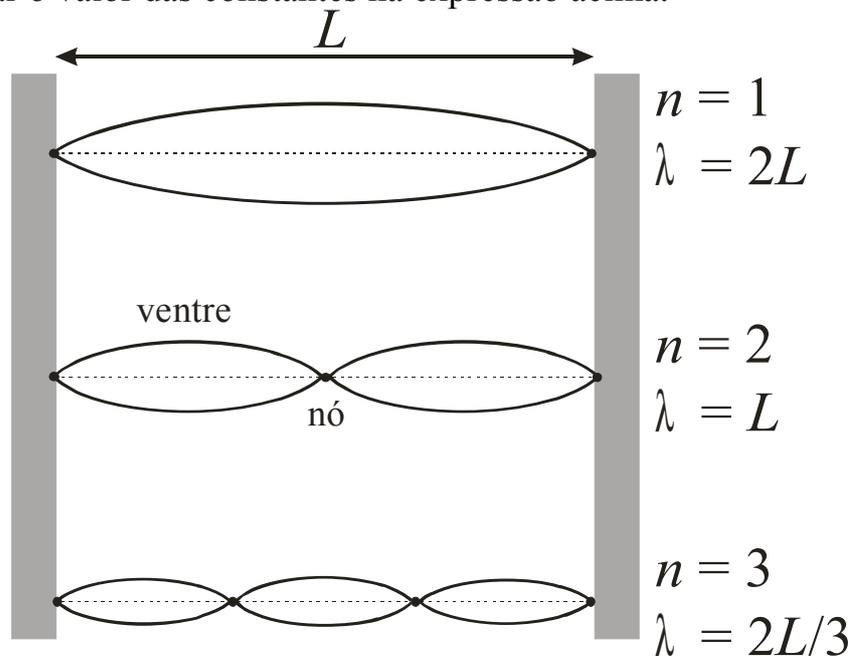


Figura 2.1. Modos normais de vibração de um fio de comprimento L .

3. Arranjo experimental

O Arranjo experimental utilizado para o estudo da ressonância de um fio está esquematizado na figura 3.1. Nesse arranjo, um fio de nylon é preso a um suporte e tensionado através de um sistema de polia. A tensão no fio é controlada através da massa acoplada a esse sistema.

Um alto-falante é acoplado ao fio, próximo a uma das suas extremidades. Este alto-falante é excitado por meio de um gerador de ondas harmônicas senoidais cuja frequência pode ser controlada pelo experimentador.

O experimento consiste em selecionar diversos fios de densidades lineares e comprimentos diferentes, montá-los no arranjo experimental e tensioná-los. Em seguida, o gerador de áudio tem sua frequência ajustada de modo a observar os modos normais de vibração desse fio.

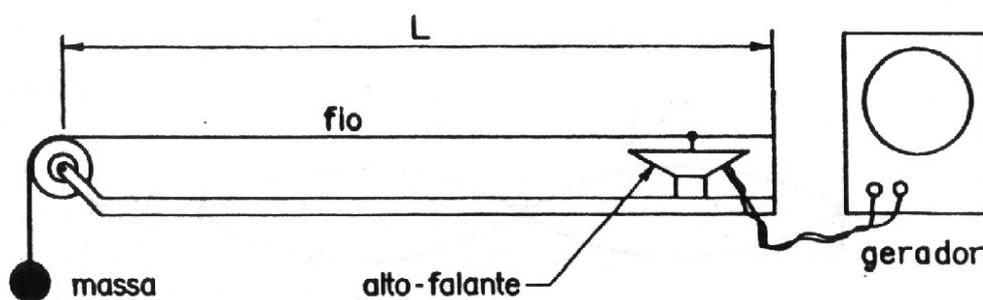


Figura 2.1. Arranjo experimental utilizado para estudar o fenômeno de ressonância de um fio tensionado.

Devem-se tomar os dados necessários para avaliar a dependência das frequências de ressonância com cada um dos parâmetros envolvidos no experimento (modo de vibração, densidade linear do fio, tensão aplicada ao fio e comprimento). Sendo assim, a tomada e análise de dados está dividida em 4 partes, cada uma delas relacionada a uma das grandezas que influenciam as frequências de vibração do fio.

4. Procedimento experimental

Cada grupo deve realizar a tomada e análise dos dados da Parte I e, a critério do professor, escolher entre as partes II a IV para uma segunda tomada e análise de dados.

Parte I:

Estudo da dependência da frequência (f) com o modo de vibração (n)

Selecione um determinado fio de nylon de comprimento L (o maior comprimento possível, de modo a aproveitar o fio para as medidas seguintes), monte-o no arranjo experimental e aplique uma tensão que deve permanecer fixa durante a tomada de dados. Não se esqueça de anotar esses parâmetros (densidade linear do fio, comprimento e tensão aplicada).

Com o gerador de áudio, ajuste a frequência do mesmo de modo a observar o modo fundamental de ressonância ($n = 1$, ou seja, observa-se apenas um ventre). Essa frequência é observada quando a amplitude de oscilação do fio é máxima. Leia e anote o valor para a frequência de ressonância para esse modo de vibração no gerador de áudio (não esqueça a incerteza).

Repita o procedimento acima para modos de vibração de maior ordem ($n = 2, 3, 4, \dots$) para o maior número possível de modos. Note que a amplitude de oscilação diminui com o aumento do número de ventres observados de modo que modos muito elevados ($n = 5, 6, 7, \dots$) podem ser difíceis ou impossíveis de observar.

Organize todos os dados obtidos em uma tabela que estabeleça a dependência da frequência de ressonância (f) com o modo de vibração (n)

Parte II:

Estudo da dependência da frequência (f) com a tensão aplicada ao fio (T)

Utilizando o fio da tomada de dados anterior, ajuste a frequência do gerador de áudio para observar o segundo modo de vibração ($n = 2$). Leia e anote o valor para a frequência de ressonância para esse modo de vibração no gerador de áudio e para a tensão (T) aplicada ao fio (não esqueça a incerteza).

Repita a medida acima alterando apenas a tensão que é aplicada ao fio. Para isso, deposite ou retire os lastros presos ao sistema de polia do arranjo experimental. Não se esqueça de medir a massa que está sendo utilizada para tensionar o fio. Repita esse processo para 6-8 tensões diferentes e organize os dados em uma tabela que estabeleça a relação entre a frequência do segundo modo de vibração do fio com a tensão aplicada ao mesmo.

Deve-se tomar o cuidado de não selecionar valores de massa muito próximos entre uma medida e outra, pois nesse caso a análise gráfica torna-se difícil de ser realizada. Variações de aproximadamente 50 g entre uma medida e outra fornecem dados satisfatórios.

Parte III:

Estudo da dependência da frequência (f) com o comprimento do fio (L)

Utilizando o fio da tomada de dados anterior, com os mesmos parâmetros utilizados na parte I da tomada de dados, ajuste a frequência do gerador de áudio para observar o segundo modo de vibração ($n = 2$). Leia e anote o valor para a frequência de ressonância para esse modo de vibração no gerador de áudio e para o comprimento (L) do fio utilizado (não esqueça a incerteza).

Repita o procedimento acima, reduzindo o comprimento do fio. Meça a frequência de ressonância do segundo modo de vibração para esse novo comprimento (não esqueça de anotar o comprimento e sua incerteza). Repita esse procedimento, variando o comprimento do fio de aproximadamente 10 cm entre uma medida e outra. Organize os dados em uma tabela de tal forma a correlacionar a frequência de vibração com o comprimento utilizado para o fio.

Parte IV:

Estudo da dependência da frequência (f) com a densidade linear (μ) do fio

O estudo da dependência da frequência de ressonância com a densidade linear do fio necessita a troca do fio utilizado entre uma medida e outra. Deve-se tomar o cuidado de reproduzir todos os outros parâmetros (L , T e n), dentro das incertezas experimentais, de tal modo que o único parâmetro variável seja a densidade linear (μ).

Meça a frequência do segundo modo de vibração ($n = 2$) para cada um dos fios disponíveis no laboratório. Organize os dados em uma tabela de tal forma a correlacionar a frequência de vibração com a densidade linear do fio.

5. Análise dos dados

A nossa suposição inicial para a determinação de uma expressão empírica para as frequências de ressonância de um fio tensionado é tal que a frequência de ressonância pode ser escrita como:

$$f = Cn^\alpha L^\beta T^\gamma \mu^\delta,$$

onde α , β , γ e δ são constantes que podem ser extraídas dos dados experimentais.

Faça, inicialmente, uma análise dimensional da expressão acima e, com base nessa análise, determine os valores para as constantes acima. É possível obter todos os valores a partir de uma análise dimensional da expressão acima?

Agora vamos determinar o valor das constantes da expressão acima a partir dos dados experimentais. Caso a expressão acima seja representativa do fenômeno de ressonância em um fio, temos que, variando apenas um dos parâmetros a dependência da frequência de ressonância com esse parâmetro é uma expressão da forma:

$$f = Kx^a,$$

onde K é uma constante que depende de como os outros parâmetros foram fixados, x é o parâmetro que está sendo variado (n , L , T ou μ) e a é a constante relacionada a esse parâmetro (α , β , γ ou δ). Nesse caso, fazendo-se um gráfico da frequência de ressonância como função deste parâmetro em um papel di-log, obtém-se uma reta cuja inclinação é a constante a . Faça um gráfico di-log para cada um dos conjuntos de dados obtidos anteriormente. Esses gráficos são, de fato, compatíveis com retas? Obtenha, a partir dos gráficos obtidos, valores experimentais para as constantes α , β , γ e δ . Os valores experimentais são compatíveis com aqueles extraídos a partir da análise dimensional realizada com a expressão empírica para a frequência de ressonância? Compare também com os valores teóricos esperados, conforme descrito no Apêndice desse capítulo. Como você poderia obter a constante de proporcionalidade (C) da fórmula empírica? Discuta os resultados?

6. Apêndice: modos normais de oscilação de um fio tensionado

*Texto baseado na apostila de laboratório da disciplina
Física Experimental II para Engenharia*

Quando aplicamos a segunda lei de Newton a trechos de um fio que está tensionado e executando uma oscilação transversal, chegamos a uma equação diferencial da forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = 0$$

que corresponde à equação de uma onda com velocidade de propagação v . (x, y) são as posições, no espaço, de um ponto do fio que, quando em repouso, está contido no eixo x ($y = 0$). A oscilação se dá na direção y , transversal ao eixo x e t corresponde ao tempo. A associação da equação acima com a de propagação de uma onda não é imediata. Esse fato pode ser percebido empiricamente, quando damos um “chacoalhão” no fio e fazemos pulsos caminharem pelo fio tensionado. A demonstração teórica fica mais clara quando vemos que uma função qualquer dada por $y(x,t) = f(x \pm vt)$ é uma solução da equação acima. Nesse caso, para t fixo temos uma forma bem estabelecida para o fio em função de x e, caso deixemos o tempo fluir, essa forma viaja no sentido de x , com velocidade v . A direção de deslocamento é dada pelo sinal positivo ou negativo na expressão $x \pm vt$.

No caso particular de um fio tensionado de comprimento L e fixo em ambas as extremidades, no qual aplicamos uma perturbação transversal ao fio e periódica, observamos o fenômeno de ressonância toda vez que a frequência da perturbação externa for igual a uma das **frequências próprias** do fio tensionado.

Para determinar quais são as frequências de ressonância desse arranjo, devemos recordar a correspondência entre a frequência de oscilação (f) de uma onda qualquer com o seu comprimento de onda (λ). Essa correspondência depende da velocidade de propagação da onda e é dada por:

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

A determinação dos possíveis comprimentos de onda pode ser realizada com argumentos puramente geométricos. Na figura 1.1 são mostrados alguns modos possíveis de vibração. Como o fio está preso em ambas as extremidades, somente modos cujos comprimentos de onda satisfazem essa condição são possíveis. Esses modos são classificados de

acordo com o número de ventres observados. Modos com apenas 1 ventre possui modo $n = 1$ e assim sucessivamente. Da figura 1.1 pode-se extrair que o comprimento de onda está relacionado ao modo de vibração, bem como ao comprimento do fio, segundo a expressão:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \text{ com } n = 1, 2, 3, 4 \dots$$

Nesse caso, o índice n em λ_n representa o modo de vibração observado.

Para um fio fixo e de comprimento L , as frequências naturais de vibração podem ser escritas através da expressão:

$$f_n = \frac{nv}{2L}, \text{ com } n = 1, 2, 3, 4 \dots$$

A velocidade de propagação da onda no fio depende das suas propriedades e da tensão longitudinal aplicada ao mesmo (maiores detalhes para a determinação da velocidade pode ser obtida na referência 1). Para um fio cuja densidade linear vale μ ($\mu = M/L$, sendo M a massa do fio) e sujeito a uma tensão longitudinal T a velocidade de propagação de uma onda por esse fio vale:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Desse modo, as frequências naturais de vibração de um fio tensionado são dadas por:

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \text{ com } n = 1, 2, 3, 4 \dots$$

7. Referências

- [1] H. Moysés Nussenzveig, “Curso de Física Básica”, vol. 2, Editora Edgard Blücher Ltda.

Calendário da Disciplina

	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	relat 2ª/3ª
agosto	5 exp I-1	6 exp I-1	7	8	9	
	12 exp I-2	13 exp I-2	14	15	16	
	19 exp II-1	20 exp II-1	21	22	23	R1
	26 exp II-2	27 exp II-2	28	29	30	
setembro	2	3	4	5	6	
	9 exp III	10 exp III	11	12	13	R2
	16 exp IV-1	17 exp IV-1	18	19	20	R3
	23 exp IV-2	24 exp IV-2	25	26	27	
	30					
outubro	7 prova 1	8 prova 1	9	10	11	
	14 exp V-1	15 exp V-1	16	17	18	R4
	21 exp V-2	22 exp V-2	23	24	25	
	28	29	30	31		
novembro	4 exp VI	5 exp VI	6	7	8	R5
	11 exp VII-1	12 exp VII-1	13	14	15	R6
	18 exp VII-2	19 exp VII-2	20	21	22	
	25 prova 2	26 prova 2	27	28	29	R7
dezembro	2	3	4	5	6	
			entrega de notas			

Avisos sobre locais de provas e eventuais imprevistos serão afixados no quadro de avisos em frente à sala dos técnicos no Edifício Ala Central.