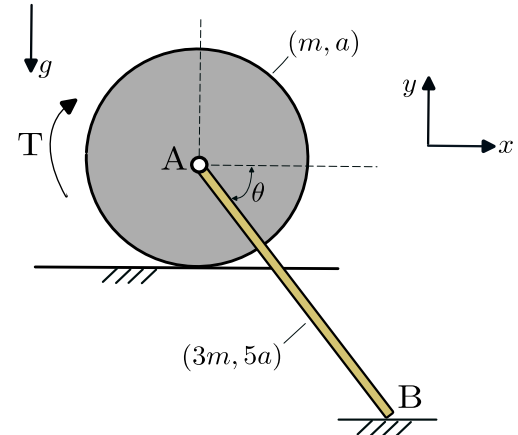




## PME 3100 – Mecânica I – Reoferecimento 2025 – Prova Substitutiva – 03 de Julho de 2025

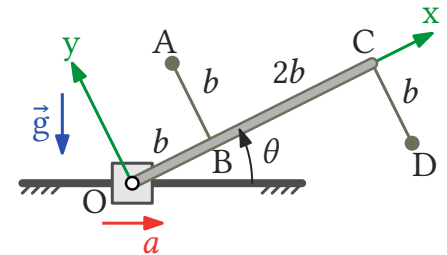
Instruções gerais e formulário estão no caderno de respostas. Se sair antes do término, entregue esta folha ao aplicador.

**Questão 1 (3,5 pontos).** A figura ilustra um sistema mecânico composto por um disco homogêneo de massa  $m$ , raio  $a$  de centro em  $A$ , e por uma barra homogênea  $AB$  de massa  $3m$  e comprimento  $5a$ , que está articulada a este em  $A$ . O disco pode rolar sem escorregar e a extremidade  $B$  da barra está vinculada a deslocar sobre uma superfície retilínea horizontal fixa sem atrito. O sistema parte do repouso na posição indicada na figura e sob a ação de um binário de intensidade conhecida  $T$  aplicado ao disco inicia-se seu movimento. Considerando  $\cos \theta = \frac{3}{5}$  e  $\sin \theta = \frac{4}{5}$  e que o coeficiente de atrito estático entre o disco e a superfície horizontal é de  $\mu$ , pede-se para o instante em que o sistema inicia seu movimento:



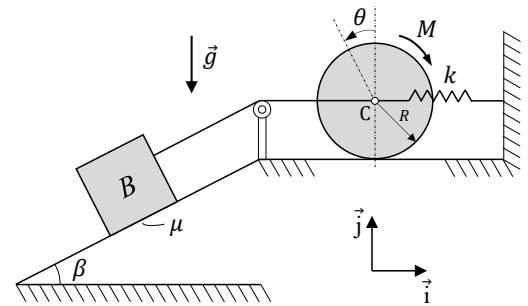
- (0,6) Os diagramas de corpos livre (DCLs) do disco e da barra;
- (0,6) Os vetores aceleração do centro de massa do disco e da barra, em função da aceleração angular do disco  $\vec{\alpha} = -\alpha \vec{k}$ .
- (0,6) As equações escalares obtidas com a aplicação dos teoremas da resultante e da quantidade de movimento angular ao disco.
- (0,6) As equações escalares obtidas com a aplicação dos teoremas da resultante e da quantidade de movimento angular à barra.
- (0,6) A aceleração angular do disco  $\alpha$  e a reação de vínculo em  $B$ .
- (0,5) O máximo valor de  $T$  que pode ser aplicado ao disco para que este não escorregue.

**Questão 2 (3,0 pontos).** Um corpo rígido único de massa  $10m$  é formado por uma barra esbelta e homogênea  $OC$  de massa  $8m$  e comprimento  $3b$  e pelas hastes  $AB$  e  $CD$ , dispostas no plano  $Oxy$ , ortogonais a  $OC$ , cada uma com comprimento  $b$  e com uma massa  $m$  inteiramente concentrada nas respectivas extremidades  $A$  e  $D$ . A extremidade  $O$  do corpo rígido encontra-se articulada a um bloco que desliza sobre uma guia horizontal com uma aceleração  $a$ , conhecida. Pede-se:



- (0,4) o vetor posição ( $G - O$ ) do centro de massa  $G$  do corpo rígido;
- (1,2) o momento de inércia  $J_{Oz}$  e o produto de inércia  $J_{Oxy}$  do corpo rígido;
- (0,4) o diagrama de corpo livre (DCL) do corpo rígido;
- (1,0) o valor do ângulo  $\theta$  para o qual a aceleração angular do corpo rígido é nula.

**Questão 3 (3,5 pontos).** O sistema mostrado na figura é composto por um disco rígido e homogêneo de centro  $C$  e um bloco  $B$  conectados por um fio ideal. O disco possui massa  $m$  e rola sem escorregar sobre o plano horizontal. O disco é também conectado a uma parede por meio de uma mola ideal linear de constante elástica  $k$ . O bloco  $B$ , de massa  $m$ , desliza sobre um plano de inclinação  $\beta$ , partindo do repouso na configuração em que  $\theta = 0$ . O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o plano inclinado é  $\mu$ . Admitindo que no instante inicial a mola não está deformada, e que um momento  $M$  (constante) é aplicado ao disco, pede-se:



- (1,0) os diagramas de corpo livre do disco e do bloco;
- (0,5) a energia cinética do sistema em função da velocidade angular do disco  $\omega$ ;
- (1,0) o trabalho dos esforços externos atuantes no sistema em função de  $\theta$ ;
- (0,5) a velocidade angular do disco  $\omega$  em função de  $\theta$ ;
- (0,5) a aceleração angular do disco  $\alpha$  em função de  $\theta$ .



**Questão 1 – Resolução**

a) DCLs indicados ao lado. (0,3) para cada DCL completamente correto.

b) O disco rola sem escorregar, logo:

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha} \wedge \text{ge}(A - P) = (-\alpha \vec{k}) \wedge \text{ge}(a \vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = a\alpha \vec{i}} \quad (0,3)$$

Do campo de aceleração na barra, notando que  $\vec{a}_B = a_B \vec{i}$ , têm-se:

$$\begin{aligned} \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \wedge \text{ge}(B - A) &\Rightarrow a_B \vec{i} = a\alpha \vec{i} + (\alpha_{AB} \vec{k}) \wedge \text{ge}(5a \cos \theta \vec{i} - 5a \sin \theta \vec{j}) \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_B = a\alpha + 5a\alpha_{AB} \sin \theta \\ 0 = 5a\alpha_{AB} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{AB} = 0 \\ a_B = a\alpha = a_A \end{cases} \end{aligned}$$

Logo a barra AB exibe o movimento de translação retilínea, assim:

$$\boxed{\vec{a}_G = a\alpha \vec{i}} \quad (0,3)$$

c) Aplicando o TQMA (polo A) ao disco:

$$\sum \vec{M}_A^{\text{ext}} = J_A \vec{\alpha} \Rightarrow (-T + aF_{at}) \vec{k} = \frac{ma^2}{2} (-\alpha \vec{k}) \Rightarrow \boxed{\frac{ma}{2} \alpha = \frac{T}{a} - F_{at}} \quad (1) \quad (0,2)$$

Aplicando o TR ao disco:

$$\vec{R}^{\text{ext}} = m \vec{a}_A \Rightarrow (-X_A + F_{at}) \vec{i} + (N - mg - Y_A) \vec{j} = m(a\alpha \vec{i}) \Rightarrow \begin{cases} F_{at} - X_A = ma\alpha \\ N - mg - Y_A = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (2) \quad (0,2) \\ (3) \quad (0,2) \end{matrix}$$

d) Aplicando o TQMA (polo A) a barra:

$$\sum \vec{M}_A^{\text{ext}} = 3m(G - A) \wedge \text{ge} \vec{a}_A \Rightarrow \left(3aY_B - \frac{9amg}{2}\right) \vec{k} = 3m \left(\frac{3a}{2} \vec{i} - 2a \vec{j}\right) \wedge \text{ge}(a\alpha \vec{i}) \Rightarrow \boxed{Y_B - \frac{3mg}{2} = 2ma\alpha} \quad (4) \quad (0,2)$$

Aplicando o TR à barra:

$$\vec{R}^{\text{ext}} = 3m \vec{a}_G \Rightarrow X_A \vec{i} + (Y_B + Y_A - 3mg) \vec{j} = 3ma\alpha \vec{i} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 3ma\alpha \\ Y_B + Y_A - 3mg = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (5) \quad (0,2) \\ (6) \quad (0,2) \end{matrix}$$

e) Resolvendo o sistema de Eqs. (1) - (6), nas variáveis  $\alpha$ ,  $N$ ,  $F_{at}$ ,  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Y_B$ , é possível obter:

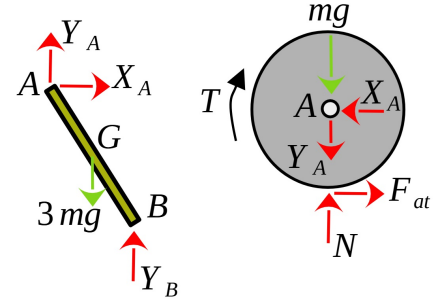
$$\boxed{\alpha = \frac{2T}{9ma^2}} \quad (0,3) \quad \boxed{Y_B = \frac{3mg}{2} + \frac{4T}{9a}} \quad (0,3)$$

f) Resolvendo o sistema de Eqs. (1) - (6) novamente para encontrar as expressões para  $N$  e  $F_{at}$ , é possível obter:

$$N = \frac{5mg}{2} - \frac{4T}{9a} \quad (0,1), \quad F_{at} = \frac{8T}{9a} \quad (0,1)$$

A condição de rolamento puro impõe que:

$$F_{at} \leq \mu N \Rightarrow \frac{8T}{9a} \leq \mu \left( \frac{5mg}{2} - \frac{4T}{9a} \right) \Rightarrow \frac{4T}{9a} (2 + \mu) \leq \frac{5\mu mg}{2} \Rightarrow \boxed{T \leq \frac{45\mu m g a}{(16 + 8\mu)}} \quad (0,3)$$





**Questão 2 – Resolução**

a) Centro de massa do corpo:

$$(G - O) = \frac{m(b\vec{i} + b\vec{j}) + m(3b\vec{i} - b\vec{j}) + 8m\left(\frac{3}{2}b\vec{i}\right)}{10m} \Rightarrow \boxed{(G - O) = \frac{8}{5}b\vec{i}} \quad (0,4)$$

b) Momento de inércia:

$$J_{Oz} = \underbrace{\frac{(8m)(3b)^2}{12}}_{\text{barra}} + \underbrace{(8m)\left(\frac{3b}{2}\right)^2}_{\text{ponto A}} + \underbrace{m[b^2 + b^2]}_{\text{ponto D}} + \underbrace{m[(3b)^2 + b^2]}_{\text{ponto D}} \Rightarrow \boxed{J_{Oz} = 36mb^2} \quad (0,6)$$

Produto de inércia:

$$J_{Oxy} = \underbrace{(8m)\left(\frac{3b}{2}\right)(0)}_{\text{barra}} + \underbrace{m(b)(b)}_{\text{ponto A}} + \underbrace{m(3b)(-b)}_{\text{ponto D}} \Rightarrow \boxed{J_{Oxy} = -2mb^2} \quad (0,6)$$

c) DCL indicado ao lado. (0,4).

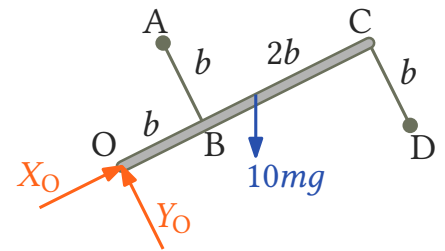
d) Considerando a aceleração angular do corpo rígido nula, a expressão do Teorema da Quantidade de Movimento Angular aplicado ao pólo O se reduz a:

$$(10m)(G - O) \wedge \vec{a}_O = \vec{M}_O$$

Sendo  $\vec{a}_O = a(\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j})$ , dado, tem-se:

$$(10m)\frac{8}{5}b\vec{i} \wedge a(\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) = -\frac{8}{5}b(10mg \cos \theta)\vec{k}$$

$$-a \sin \theta = -g \cos \theta \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan \frac{g}{a}} \quad (1,0)$$





**Questão 3 – Resolução**

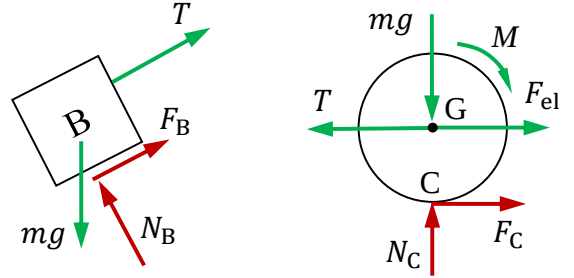
a) A figura ao lado indica os DCLs solicitados. (0,5) para cada DCL completamente correto

b) A energia cinética do sistema em função da velocidade angular do disco  $\omega$  é calculada, como segue:

$$T = T_{\text{bloco}} + T_{\text{disco}} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_B|^2 + \left[ \frac{1}{2}m|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}J_{Gz}\omega^2 \right]$$

Como o fio é inextensível (ideal), temos:  $|\vec{v}_B| = |\vec{v}_G| = |\omega R|$ . Portanto, a energia cinética do sistema é dada por:

$$T = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \left( \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{4} \right) \Rightarrow T(\omega) = \frac{5mR^2\omega^2}{4} \quad (0,5)$$



c) Os únicos esforços externos ao sistema que realizam trabalho são: (i) a força peso do bloco, (ii) a força de atrito de escorregamento atuante no bloco, (iii) a força elástica da mola, e (iv) o momento constante aplicado. Sendo  $\Delta s = R\theta$  o deslocamento do bloco ao longo do plano inclinado, e  $\Delta\delta = R\theta$  a deflexão da mola a partir da condição inicial não deformada, tem-se:

$$W_{\text{ext}} = W_{P_B} + W_{F_B} + W_{F_{el}} + W_M$$

onde

$$W_{P_B} = -\Delta V_g = -m_B g \Delta h_B = mg \Delta s \sin \alpha \Rightarrow W_{P_B} = (mgR \sin \alpha) \theta \quad (0,2)$$

$$W_{F_B} = -F_B \Delta s = -\mu N_B \Delta s \Rightarrow W_{F_B} = -(\mu mgR \cos \alpha) \theta \quad (0,2)$$

$$W_{F_{el}} = -\Delta V_e = -\frac{k}{2} \Delta \delta^2 \Rightarrow W_{F_{el}} = -\left( \frac{kR^2}{2} \right) \theta^2 \quad (0,2)$$

$$W_M = -M \Delta \theta \Rightarrow W_M = -M \theta \quad (0,2)$$

Portanto, o trabalho total dos esforços externos fica:

$$W_{\text{ext}}(\theta) = [mgR (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - M] \theta - \left( \frac{kR^2}{2} \right) \theta^2 \quad (0,2)$$

d) Aplicando o Teorema da Energia Cinética (TEC) ao sistema partindo do repouso ( $T_0 = 0$ ), na configurações em que  $\theta = 0$ , tem-se:

$$\Delta T = T - T_0 = W_{\text{ext}} \Rightarrow \omega(\theta) = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{[mgR (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - M] \theta - \left( \frac{kR^2}{2} \right) \theta^2}{5m}} \quad (0,5)$$

e) Derivando em relação ao tempo a expressão da velocidade angular obtida no item anterior e sendo  $\omega = \dot{\theta}$ , tem-se:

$$\dot{\omega}(\theta) = \frac{2}{5mR^2} \left\{ [mgR (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - M] - \left( kR^2 \right) \theta \right\} \quad (0,5)$$