



LOQ4263 – Planejamento e Gestão da Manutenção

Prof. Dr. José Eduardo Holler Branco

Lorena



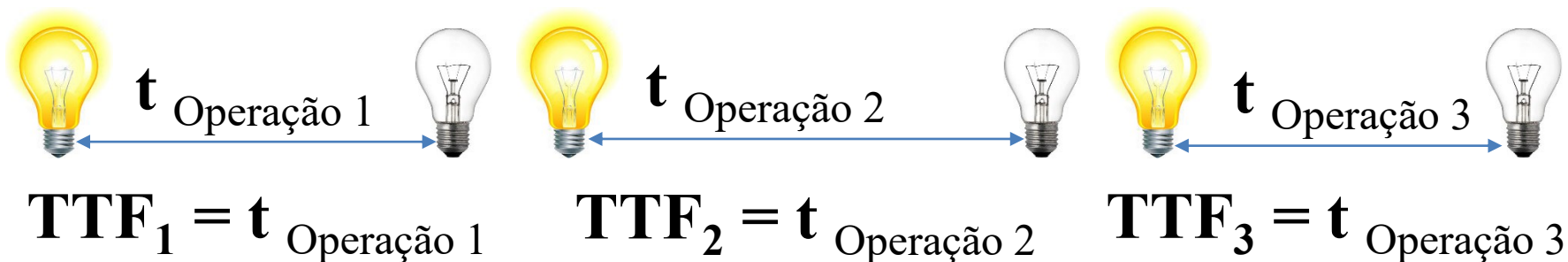
Aula V – Distribuições de probabilidade do tempo até falha e estimativas dos parâmetros da distribuição

Distribuição de probabilidade até falha



Tempo até a falha (TTF – Time to Faile): Corresponde ao tempo transcorrido desde o momento que o item é colocado em operação até o momento de sua PRIMEIRA FALHA.

Aplicado apenas à itens não reparáveis, que são descartados após a falha.



$$MTTF \text{ (Mean Time to Fail)} = \frac{\sum_{i=1}^n TTF_i}{n}$$

Quanto maior o número de amostras (n), mais próximo do real será o valor do MTTF estimado

Distribuição de probabilidade até falha



“Considere uma amostra aleatória completa de tempos até falha $(T_1, \dots, T_n)$ obtida de uma população de interesse tal que T_i 's são variáveis aleatórias independentes que seguem uma mesma distribuição de probabilidade.

Deseja-se utilizar a informação na amostra para estimar o vetor θ de parâmetros da distribuição. Para tanto, deve-se desenvolver uma estatística que, a partir da amostra, forneça uma estimativa de θ ; em outras palavras, deseja-se desenvolver um estimador $\hat{\theta}$ para θ .

Distribuição de probabilidade até falha



Características desejáveis dos estimadores:

- Não-tendencioso: não superestima ou subestima de forma sistemática;
- Consistente: não tendencioso, que converge rapidamente para o valor real do parâmetro à medida que a amostra cresce;
- Eficiente: consistente, que apresenta a menor variância entre os estimadores;
- Suficiente: eficiente, que utiliza toda a informação que a amostra possui.

Tendo em vista esses atributos desejáveis nos estimadores, um método bastante eficaz para obter os estimadores é o da “máxima verossimilhança”.

Distribuição de probabilidade até falha



Método da máxima verossimilhança:

Sejam $T_1, \dots, T_n$ variáveis aleatórias que seguem uma distribuição de probabilidade $f(t, \theta)$, onde θ é um parâmetro desconhecido. Sejam $t_1, \dots, t_n$ os valores observados em uma amostra aleatória de tamanho n . A função de verossimilhança da amostra é:

$$L(\theta) = f(t_1, \theta) \cdot f(t_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(t_n, \theta)$$

A função definida por meio desta Equação retorna a probabilidade total (ou verossimilhança) de as variáveis $T_1, \dots, T_n$ assumirem os valores $t_1, \dots, t_n$ observados na amostra; tal possibilidade é dada pelo valor da função de densidade calculada para cada valor realizado $t_1, \dots, t_n$. Para o caso de variáveis discretas, a verossimilhança é um valor de probabilidade.

Quanto maior a verossimilhança melhor a curva de distribuição estimada pelos parâmetros $\hat{\theta}$ representa a probabilidade de ocorrência das variáveis $T_1, \dots, T_n$.

Distribuição de probabilidade até falha



Método da máxima verossimilhança:

Sejam $T_1, \dots, T_n$ variáveis aleatórias que seguem uma distribuição de probabilidade $f(t, \theta)$, onde θ é um parâmetro desconhecido. Sejam $t_1, \dots, t_n$ os valores observados em uma amostra aleatória de tamanho n . A função de verossimilhança da amostra é:

$$L(\theta) = f(t_1, \theta) \cdot f(t_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(t_n, \theta)$$

A função definida por meio desta Equação retorna a probabilidade total (ou verossimilhança) de as variáveis $T_1, \dots, T_n$ assumirem os valores $t_1, \dots, t_n$ observados na amostra; tal possibilidade é dada pelo valor da função de densidade calculada para cada valor realizado $t_1, \dots, t_n$. Para o caso de variáveis discretas, a verossimilhança é um valor de probabilidade.

Quanto maior a verossimilhança significa que mais a curva de distribuição estimada pelos parâmetros $\hat{\theta}$ representa a probabilidade de ocorrência das variáveis $T_1, \dots, T_n$.

Distribuição de probabilidade até falha



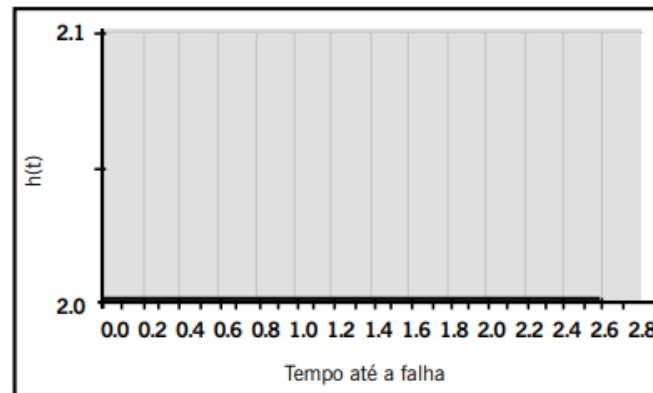
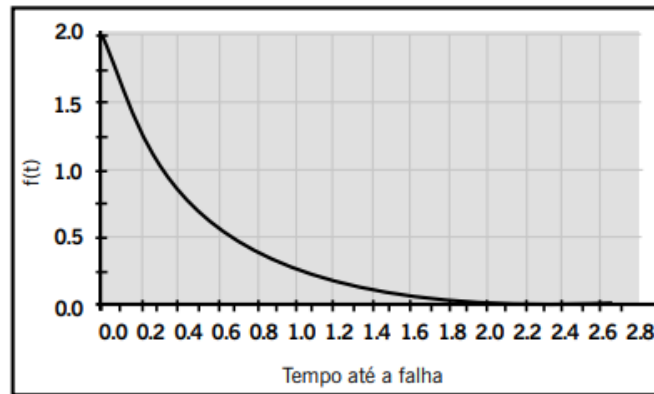
Método da máxima verossimilhança:

Para maximizar a função verossimilhança, aplicamos a condição de primeira ordem para encontrar o ponto de máximo:

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

Muitas vezes é conveniente obter a função $l(\theta) = \ln L(\theta)$ para otimizar a função.

Tempos até falha seguem distribuição exponencial



$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$h(t) = \lambda$$

$$MTTF = E[T] = \frac{1}{\lambda}$$

Tempos até falha seguem distribuição exponencial



Máxima verossimilhança da função exponencial:

$$f(t_i, \lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \lambda) = \lambda^n \prod_{i=1}^n e^{-\lambda t_i} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i}$$

Cuja função logaritmo é dada por:

$$l(\lambda) = \ln[L(\lambda)] = n \cdot \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n t_i$$

Derivando-se essa função com relação à λ :

$$\left. \frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\hat{\lambda}} = \frac{n}{\hat{\lambda}} - \sum_{i=1}^n t_i \rightarrow \hat{\Lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i}$$

Tempos até falha seguem distribuição Weibull

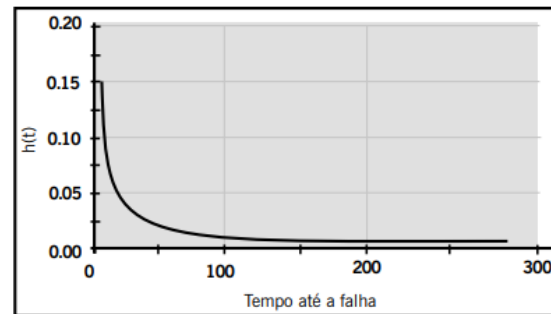


$$f(t) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} e^{-t^\gamma/\theta}$$

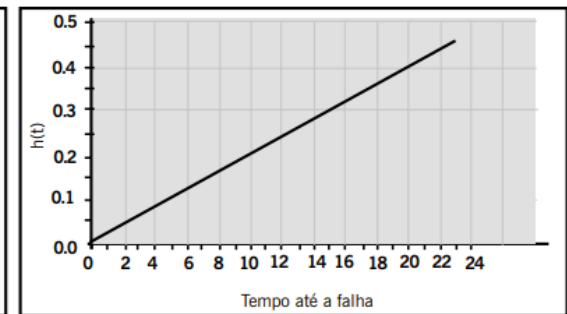
$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma}$$

$$h(t) = \frac{\gamma}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma-1}$$

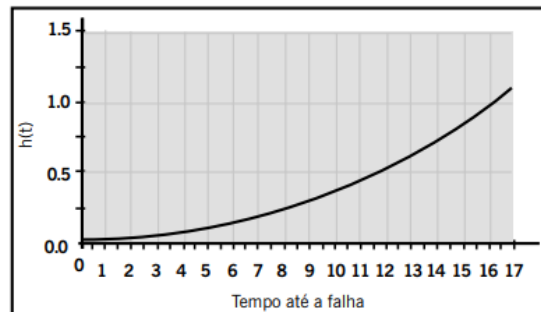
$$MTTF = \theta \Gamma(1 + 1/\gamma)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 2.2: $h(t)$ quando (a) $\gamma = 0,5$; (b) $\gamma = 2,0$; e (c) $\gamma = 3,26$.

Tempos até falha seguem distribuição Weibull



Os estimadores de máxima verossimilhança de γ e θ são dados por $\hat{\Gamma}$ e $\hat{\Theta}$, calculados por meio das seguintes equações:

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\Gamma}} \ln t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\Gamma}}} - \frac{1}{\hat{\Gamma}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i = 0$$

$$\hat{\Theta} = \left[\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\Gamma}} / n \right]^{\frac{1}{\hat{\Gamma}}}$$

Tempos até falha seguem distribuição Lognormal

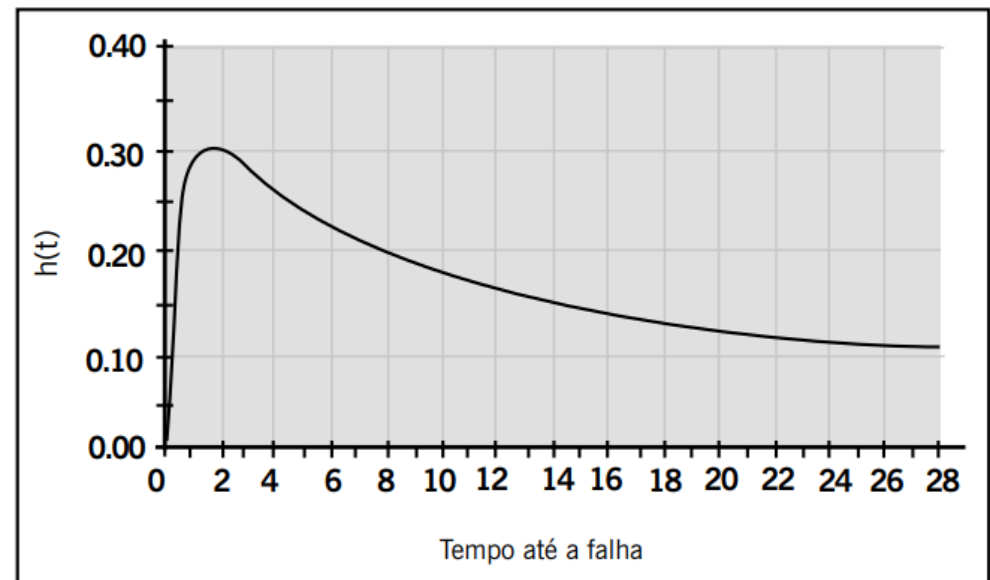


$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\ln t - \mu)}{\sigma}\right]^2\right\}$$

$$R(t) = \Phi\left(\frac{\mu - \ln t}{\sigma}\right)$$

$$h(t) = \frac{\phi[(\mu - \ln t)/\sigma]/\sigma t}{\Phi[(\mu - \ln t)/\sigma]}$$

$$MTTF = e^{(\mu + \sigma^2)/2}$$



Tempos até falha seguem distribuição LogNormal



Os estimadores de máxima verossimilhança de μ e σ são dados por $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$, calculados por meio das seguintes equações:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n (\ln t_i)^2 - \left[\left(\sum_{i=1}^n \ln t_i \right)^2 / n \right] \right\}$$

Referências Bibliográficas



Fogliatto, F. S.; Duarte, J. L. R. Confiabilidade e manutenção industrial— Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.