

MAE0219 – Lista de Exercícios 07

Departamento de Estatística

1o semestre de 2025

Exercício 1. Um pesquisador estuda as propriedades de um teste laboratorial no diagnóstico de uma certa doença não contagiosa em sua cidade. Os resultados da pesquisa mostram que o teste apresenta resultado positivo em 90% dos casos nos quais o paciente realmente está com a doença, e em 5% dos casos nos quais o paciente não está acometido por ela. Com base nos dados da Secretaria de Saúde da cidade onde o pesquisador é filiado, sabe-se que esta doença aflige 41,2% dos moradores.

- (a) Selecionando aleatoriamente um morador desta cidade e aplicando o teste nele, calcule a probabilidade de o teste dar um resultado positivo.

Solução. $P(+) = P(+ | \text{doente}) \cdot P(\text{doente}) + P(+ | \text{não doente}) \cdot P(\text{não doente})$,
 $P(+) = 0.90 \times 0.412 + 0.05 \times 0.588 = 0.3708 + 0.0294 = 0.4002$.

- (b) Se dez moradores desta cidade forem selecionados ao acaso e testados, qual é a probabilidade de que o teste dê um resultado positivo para pelo menos três deles? (Use um aplicativo)

Resposta. 0,8330325

- (c) Em média, quantos resultados positivos esperamos encontrar dentre os dez moradores selecionados? Qual é o desvio padrão do número de resultados positivos?

Solução.

$$E[X] = n \cdot p = 10 \times 0.4002 = 4.002$$

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 10 \times 0.4002 \times 0.5998 = 2.4012$$

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{2.4012} \approx 1.5496$$

Exercício 2. Se X é uma variável aleatória binomial com valor esperado 6 e variância 2,4; determine $P(X = 5)$.

Solução. Como $np = 6$ e $np(1 - p) = 2,4$, dividindo as equações temos $(1 - p) = 2,4/6 = 0,4$, donde $p = 0,6$. Novamente, como $np = 6$, temos que $n = 10$. Assim,

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} p^5 (1 - p)^{10-5} = 0,2007.$$

Exercício 3. A cada dia, o preço de determinado título de crédito privado aumenta com probabilidade 0,9 e diminui com probabilidade 0,1. Calcule a probabilidade de que o preço suba por 10 dias consecutivos, mas não suba por 20 dias consecutivos.

Solução. Seja X o número de dias até o primeiro dia em baixa. A pergunta então é

$$P(10 < X \leq 20).$$

Observando que $X \sim \text{Geom}(p)$ com $p = 0,1$, temos

$$P(10 < X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 10) = 1 - p^{20} - (1 - p^{10}) = p^{10} - p^{20} = 0,227101$$

Exercício 4. Três em cada quatro alunos de uma universidade fizeram cursinho antes de prestar vestibular. Se 16 alunos são selecionados ao acaso, calcule (usando um aplicativo):

- (a) a probabilidade de que exatamente 6 não tenham feito cursinho;

Resposta. 0,1101

- (b) a probabilidade de que pelo menos 12 tenham feito cursinho;

Resposta. 0,6302

- (c) a probabilidade de que no máximo 13 tenham feito cursinho;

Resposta. 0,802889

- (d) a probabilidade de que entre 9 e 14 (inclusive) tenham feito cursinho.

Resposta. 0,909

- (e) Para um grupo de 80 alunos selecionados ao acaso, qual é o número esperado de alunos que fizeram cursinho? E o desvio padrão?

Resposta. 60 e 3,873

Exercício 5. Suponha que um conjunto de 90 itens contenha 6 itens defeituosos e 84 que funcionem normalmente. Se X é o número de itens defeituosos em uma amostra de 10 itens escolhidos aleatoriamente do conjunto, determine $P(X = 0)$ e $P(X > 2)$. (Use um aplicativo)

Solução. Observe que $X \sim \text{Hgeom}(n = 10, N = 90, K = 6)$. Usando o aplicativo, temos $P(X = 0) = 0,482642$ e $P(X > 2) = P(X \geq 3) = 0,016934$.

Exercício 6. Suponhamos que 25% dos homens trabalhadores e 30% das mulheres trabalhadoras de uma população não tenham registro em carteira de trabalho. Suponhamos também que a população de trabalhadores seja constituída por 53% de homens e 47% de mulheres.

(a) Qual é a proporção de trabalhadores sem registro em carteira na população?

Solução. Sejam:

- H : Homens
- M : Mulheres
- R : Registrados

Pela Lei da Probabilidade Total, temos:

$$\begin{aligned}P(R^c) &= P(H) \cdot P(R^c | H) + P(M) \cdot P(R^c | M) \\&= 0,53 \cdot 0,25 + 0,47 \cdot 0,3 \\&= 0,2735\end{aligned}$$

Resposta. 27,35%

(b) Se 30 trabalhadores forem selecionados ao acaso dessa população, qual é a probabilidade de que pelo menos 8 não tenham registro em carteira? (Use um aplicativo)

Solução. Observe que $X \sim \text{Bin}(30; 0,2735)$. Com o auxílio de um software, obtemos

$$P(X \geq 8) = 0,6021$$

Resposta. 0,6021.

(c) Em média, quantos trabalhadores sem registro em carteira esperamos encontrar dentre os 30 selecionados? E qual é o desvio padrão do número de trabalhadores sem registro em carteira?

Solução.

$$\begin{aligned}E(X) &= n \times p = 30 \times 0,2735 = 8,205 \\ \text{Var}(X) &= n \times p \times (1 - p) = 30 \times 0,2735 \times (1 - 0,2735) = 5,9609 \\ \sigma &= \sqrt{5,9609} = 2,442\end{aligned}$$

Resposta. $E(X) = 8,205$ e $\sigma = 2,442$.