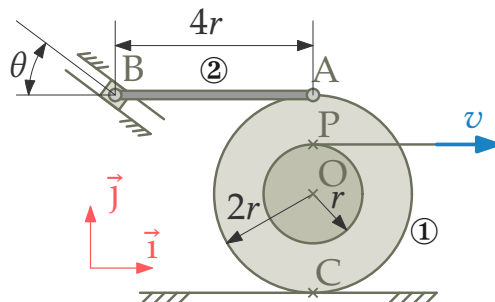


**PME 3100 – Mecânica I – Reoferecimento 2025 – Prova 2 – 22/05/2025**

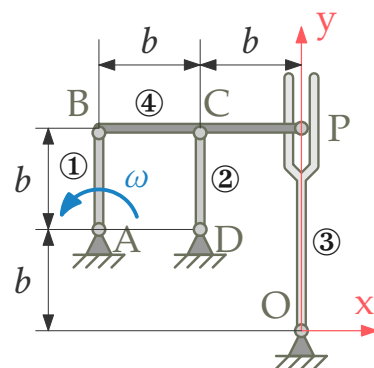
*Instruções gerais e formulário estão no caderno de respostas. Se sair antes do término, entregue esta folha ao aplicador.*

**Questão 1 (3,5 pontos).** A figura ao lado mostra um sistema mecânico composto por uma bobina de centro O com raio de enrolamento  $r$  e raio de rolamento  $2r$ , e por uma barra homogênea AB de comprimento  $4r$ . A bobina pode rolar sem escorregar sob uma superfície plana horizontal fixa, quando o cabo que está sempre tensionado e conectado a esta em P é puxado para a direita com velocidade constante  $v$ . A extremidade A da barra AB está articulada a bobina, enquanto B é vinculada a deslocar sem atrito ao longo de uma guia retilínea fixa inclinada de um ângulo  $\theta$  em relação a horizontal, com  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  e  $\cos \theta = \frac{4}{5}$ . Considerando a configuração representada na figura com a barra AB orientada na horizontal, o sistema de coordenadas descrito pela base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  e a geometria fornecida na figura, pede-se:



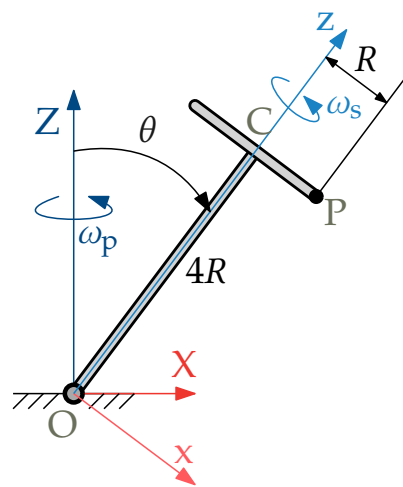
- (0,5) Obter o vetor velocidade angular da bobina  $\vec{\omega}_1$ .
- (0,5) Localizar o centro instantâneo de rotação I da barra AB, indicando claramente a construção geométrica utilizada para sua obtenção.
- (1,0) Obter o vetor velocidade angular  $\vec{\omega}_2$ , da barra AB, e o vetor velocidade  $\vec{v}_B$ , do ponto B.
- (0,5) Obter os vetores aceleração  $\vec{a}_O$ , do ponto O, e  $\vec{a}_A$ , do ponto A.
- (1,0) Obter o vetor aceleração angular  $\vec{\alpha}_2$ , da barra AB, e o vetor aceleração  $\vec{a}_B$ , do ponto B.

**Questão 2 (3,0 pontos).** No mecanismo ilustrado na figura, os pontos A, B, C e D constituem um paralelogramo, os vínculos em A, B, C, D e O são articulações ideais e a extremidade P do corpo 4 é livre para deslizar relativamente à guia retilínea presente no corpo 3. Sabendo que a barra AB descreve uma rotação com  $\vec{\omega}_1 = \omega \vec{k}$  constante e adotando o sistema de coordenadas Oxy solidário ao corpo 3 (referencial móvel), pede-se para a configuração indicada na figura:



- (0,6) A velocidade  $\vec{v}_P$  e a aceleração  $\vec{a}_P$ , do ponto P.
- (0,4) As componentes intrínsecas da aceleração do ponto P.
- (0,8) As velocidades relativa  $\vec{v}_{P,rel}$  e de arrastamento  $\vec{v}_{P,arr}$ , do ponto P, e velocidade angular  $\vec{\omega}_3$ , do corpo 3.
- (1,2) As acelerações relativa  $\vec{a}_{P,rel}$  e de arrastamento  $\vec{a}_{P,arr}$ , do ponto P, e aceleração angular  $\vec{\alpha}_3$ , do corpo 3.

**Questão 3 (3,5 pontos).** Na figura ao lado é mostrada a vista plana de um mecanismo composto de uma haste OC delgada de comprimento  $4R$  e articulada em O, e preso a ela existe um disco de centro C e raio  $R$  que pode girar em torno do eixo da haste. A haste OC apresenta movimento tridimensional com velocidade angular  $\vec{\omega}_p = \omega_p \vec{Z}$  constante em torno do eixo fixo OZ. Além disso, o disco tem velocidade angular  $\vec{\omega}_s = \omega_s \vec{k}$  constante medida em relação à haste OC. Considerando um ângulo  $\theta$  constante e adotando o referencial móvel solidário à haste (note que o eixo Oy é positivo “*entrando*” na folha) pede-se:



- a) (0,5) A expressão da velocidade angular  $\vec{\omega}_p$  descrita na base móvel  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  
b) (0,6) As velocidades angulares de arrastamento ( $\vec{\omega}_{arr}$ ), relativa ( $\vec{\omega}_{rel}$ ) e absoluta ( $\vec{\omega}$ ) do disco.  
c) (0,4) As acelerações angulares de arrastamento ( $\vec{\alpha}_{arr}$ ), relativa ( $\vec{\alpha}_{rel}$ ) e absoluta ( $\vec{\alpha}$ ) do disco.  
d) (0,8) Para o caso particular em que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , as velocidades de arrastamento ( $\vec{v}_{P,arr}$ ), relativa ( $\vec{v}_{P,rel}$ ) e absoluta ( $\vec{v}_p$ ) do ponto P.  
e) (1,2) Para o caso particular em que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , as acelerações de arrastamento ( $\vec{a}_{P,arr}$ ), relativa ( $\vec{a}_{P,rel}$ ) e absoluta ( $\vec{a}_p$ ) do ponto P.



**Questão 1 – Resolução**

a) Do campo de velocidades na bobina (corpo 1):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega}_1 \wedge (P - C) \Rightarrow \vec{v}_I = \vec{0} + (\omega_1 \vec{k}) \wedge (3r\vec{j}) \Rightarrow \omega_1 = -\frac{v}{3r} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_1 = -\frac{v}{3r}\vec{k}} \quad (0,5)$$

b) A figura ao lado indica o CIR da barra AB (ponto I), bem como a construção geométrica utilizada. (0,5)

c) Do campo de velocidades bobina (corpo 1):

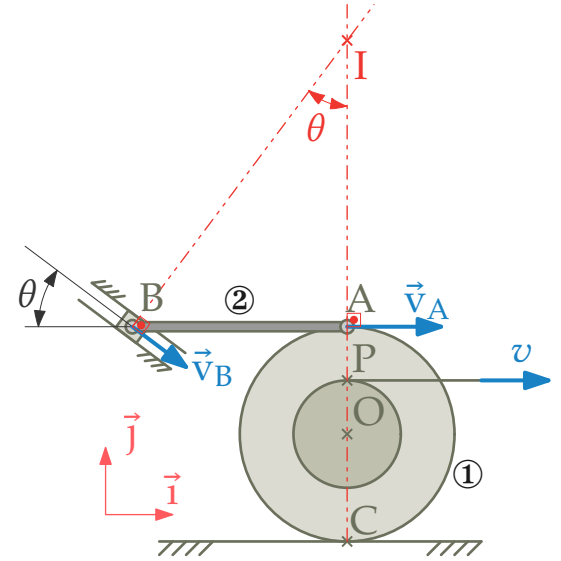
$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega}_1 \wedge (A - C) = \vec{0} + \left(-\frac{v}{3r}\vec{k}\right) \wedge (4r\vec{j}) = \frac{4v}{3}\vec{i} \quad (0,2)$$

Com base na localização do CIR, do campo de velocidades da barra AB (corpo 2), tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_I + \vec{\omega}_2 \wedge (A - I) \Rightarrow \frac{4v}{3}\vec{i} = \vec{0} + (\omega_2 \vec{k}) \wedge \left(-\frac{4r}{\tan \theta}\vec{j}\right) = \frac{16}{3}r\omega_2\vec{i} \\ \Rightarrow \omega_2 &= \frac{v}{4r} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_2 = \frac{v}{4r}\vec{k}} \quad (0,3) \end{aligned}$$

Do campo de velocidades da barra AB (corpo 2):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_2 \wedge (B - A) = \frac{4v}{3}\vec{i} + \left(\frac{v}{4r}\vec{k}\right) \wedge (-4r\vec{i}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = v\left(\frac{4}{3}\vec{i} - \vec{j}\right)} \quad (0,5)$$



d) Uma vez que a velocidade angular  $\vec{\omega}_1$  da bobina é constante, o movimento retilíneo descrito por seu centro O é uniforme:

$$\boxed{\vec{a}_O = \vec{0}} \quad (0,2)$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_1 \wedge (A - O) + \vec{\omega}_1 \wedge [\vec{\omega}_1 \wedge (A - O)] = \vec{0} + \vec{0} + \left(-\frac{v}{3r}\vec{k}\right) \wedge \left[\left(-\frac{v}{3r}\vec{k}\right) \wedge (2r\vec{j})\right] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = -\frac{2v^2}{9r}\vec{j}} \quad (0,3)$$

e) Observando que o ponto B deve descrever um movimento retilíneo na direção da guia fixa temos, do campo de acelerações da barra AB (corpo 2):

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{\alpha}_2 \wedge (B - A) + \vec{\omega}_2 \wedge [\vec{\omega}_2 \wedge (B - A)] \\ a_B (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) &= -\frac{2v^2}{9r}\vec{j} + (\alpha_2 \vec{k}) \wedge (-4r\vec{i}) + \left(\frac{v}{4r}\vec{k}\right) \wedge \left[\left(\frac{v}{4r}\vec{k}\right) \wedge (-4r\vec{i})\right] \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{5}a_B = \frac{v^2}{4r} \\ -\frac{3}{5}a_B = -\frac{2v^2}{9r} - 4r\alpha_2 \end{cases} \quad (0,6) \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de equações, temos:

$$a_B = \frac{5v^2}{16r} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = \frac{v^2}{4r}\left[\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j}\right]} \quad (0,2)$$

$$\alpha_2 = -\frac{5v^2}{576r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_2 = -\frac{5v^2}{576r^2}\vec{k}} \quad (0,2)$$



**Questão 2 – Resolução**

a) Uma vez que ABCD é um paralelogramo, o segmento BC deve permanecer paralelo à base fixa AD, o que implica que o corpo 4 descreve uma translação. Assim,  $\vec{v}_P = \vec{v}_B$  e  $\vec{a}_P = \vec{a}_B$ . (0,2)

Dos campos de velocidades e acelerações da barra AB (corpo 1), temos:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge (B - A) = \vec{0} + \omega \vec{k} \wedge (b\vec{j}) = -\omega b\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_B = -\omega b\vec{i}} \quad (0,2)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \wedge (B - A) + \vec{\omega}_1 \wedge [\vec{\omega}_1 \wedge (B - A)] = \vec{0} + \vec{0} + \omega \vec{k} \wedge [\omega \vec{k} \wedge (b\vec{j})] = -\omega^2 b\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_B = -\omega^2 b\vec{j}} \quad (0,2)$$

b) Identificando os versores do triedro de Frenet para o ponto P:

$$\vec{t}_P = \frac{\vec{v}_P}{|\vec{v}_P|} = -\vec{i}, \quad \vec{b}_P = \frac{\vec{v}_P \wedge \vec{a}_P}{|\vec{v}_P \wedge \vec{a}_P|} = \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{n}_P = \vec{b}_P \wedge \vec{t}_P = -\vec{j}$$

temos:

$$\boxed{a_{Pt} = \vec{a}_P \cdot \vec{t}_P = 0} \quad (0,2) \quad \text{e} \quad \boxed{a_{Pn} = \vec{a}_P \cdot \vec{n}_P = \omega^2 b} \quad (0,2)$$

c) O movimento relativo do ponto P corresponde ao movimento retilíneo que P pode descrever relativamente à guia do corpo 3, ou seja:

$$\vec{v}_{P,rel} = v\vec{j}$$

Para o movimento de arrastamento temos  $\vec{\omega}_{arr} = \vec{\omega}_3 = \omega_3 \vec{k}$ . Assim:

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_{O,arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O) = \vec{0} + \omega_3 \vec{k} \wedge (2b\vec{j}) = -2\omega_3 b\vec{i}$$

Da composição de movimentos, temos:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P,arr} + \vec{v}_{P,rel} \Rightarrow -\omega b\vec{i} = -2\omega_3 b\vec{i} + v\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} -\omega b = -2\omega_3 b \\ 0 = v \end{cases} \quad (0,2)$$

de onde obtemos:

$$\omega_3 = \frac{\omega}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_3 = \frac{\omega}{2} \vec{k}} \quad (0,2), \quad \boxed{\vec{v}_{P,arr} = -\omega b\vec{i}} \quad (0,2) \quad \text{e} \quad v = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,rel} = \vec{0}} \quad (0,2)$$

d) Novamente, considerando que o movimento relativo de P é retilíneo na direção do eixo y, temos:

$$\vec{a}_{P,rel} = a\vec{j}$$

Para o movimento de arrastamento temos  $\vec{\alpha}_{arr} = \vec{\alpha}_3 = \alpha_3 \vec{k}$ . Assim:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{P,arr} &= \vec{a}_{O,arr} + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)] \\ &= \vec{0} + \alpha_3 \vec{k} \wedge (2b\vec{j}) + \left(\frac{\omega}{2} \vec{k}\right) \wedge \left[\left(\frac{\omega}{2} \vec{k}\right) \wedge (2b\vec{j})\right] = -2\alpha_3 b\vec{i} - \frac{\omega^2 b}{2} \vec{j} \end{aligned}$$

Da composição de movimentos, temos:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,rel} + 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} \Rightarrow -\omega^2 b\vec{j} = -2\alpha_3 b\vec{i} - \frac{\omega^2 b}{2} \vec{j} + a\vec{j} + \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -2\alpha_3 b \\ -\omega^2 b = -\frac{\omega^2 b}{2} + a \end{cases} \quad (0,3)$$

de onde obtemos:

$$\alpha_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_3 = \vec{0}} \quad (0,3), \quad \boxed{\vec{a}_{P,arr} = -\frac{\omega^2 b}{2} \vec{j}} \quad (0,3) \quad \text{e} \quad a = -\frac{\omega^2 b}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\frac{\omega^2 b}{2} \vec{j}} \quad (0,3)$$



**Questão 3 – Resolução**

a) Pela geometria da figura temos simplesmente:

$$\vec{\omega}_p = \omega_p \vec{Z} = \omega_p (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_p = -\omega_p \sin \theta \vec{i} + \omega_p \cos \theta \vec{k}} \quad (0,5)$$

b) Como o sistema móvel é solidário a haste, a velocidade angular de arrastamento é justamente  $\vec{\omega}_p$ , de forma que:

$$\vec{\omega}_{arr} = \vec{\omega}_p \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{arr} = -\omega_p \sin \theta \vec{i} + \omega_p \cos \theta \vec{k}} \quad (0,2)$$

Para a velocidade angular relativa temos simplesmente:

$$\vec{\omega}_{rel} = \vec{\omega}_s \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{rel} = \omega_s \vec{k}} \quad (0,2)$$

Por fim, a velocidade angular absoluta é a soma das duas de forma que:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = -\omega_p \sin \theta \vec{i} + (\omega_p \cos \theta + \omega_s) \vec{k}} \quad (0,2)$$

c) Como todas as velocidades angulares são constantes e a configuração se mantém pois  $\theta$  também é constante, temos para a aceleração angular de arrastamento:

$$\boxed{\vec{\alpha}_{arr} = \vec{0}} \quad (0,1)$$

Analogamente, para a aceleração angular relativa:

$$\boxed{\vec{\alpha}_{rel} = \vec{0}} \quad (0,1)$$

Por sua vez, a aceleração angular absoluta fica:

$$\vec{\alpha} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = (-\omega_p \sin \theta \vec{i} + \omega_p \cos \theta \vec{k}) \wedge \omega_s \vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = \omega_p \omega_s \sin \theta \vec{j}} \quad (0,2)$$

d) A velocidade de arrastamento do ponto P para o caso solicitado fica:

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O) = (-\omega_p \vec{i}) \wedge (R\vec{i} + 4R\vec{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,arr} = 4\omega_p R \vec{j}} \quad (0,3)$$

Já para a velocidade relativa:

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{\omega}_{rel} \wedge (R\vec{i}) = \omega_s \vec{k} \wedge R\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,rel} = \omega_s R \vec{j}} \quad (0,3)$$

Por fim, a velocidade absoluta do ponto P fica:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P,arr} + \vec{v}_{P,rel} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P = (\omega_s + 4\omega_p) R \vec{j}} \quad (0,2)$$

e) A aceleração de arrastamento do ponto P para o caso solicitado fica:

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{\omega}_{arr} \wedge (\vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)) = (-\omega_p \vec{i}) \wedge (4\omega_p R \vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,arr} = -4\omega_p^2 R \vec{k}} \quad (0,3)$$

Já para a aceleração relativa:

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{\omega}_{rel} \wedge (\vec{\omega}_{rel} \wedge (R\vec{i})) = \omega_s \vec{k} \wedge \omega_s R \vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\omega_s^2 R \vec{i}} \quad (0,3)$$

A parcela complementar da aceleração fica:

$$\vec{a}_{P,C} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2(-\omega_p \vec{i}) \wedge \omega_s R \vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,C} = -2\omega_p \omega_s R \vec{k}} \quad (0,3)$$

Por fim, a aceleração absoluta do ponto P fica:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,C} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_P = -\omega_s^2 R \vec{i} + (-4\omega_p^2 - 2\omega_p \omega_s) R \vec{k}} \quad (0,3)$$