Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

PRG0039 -Fundamentos da Matemática Elementar

Apostila

Sumário

Equações de 1º grau 4
- Frações 4
- Racionalização 5
- Resolução de Exercícios 6
- Exercícios 6

Inequações 8
- Intervalos 8
- Resolução de Exercícios 9
- Exercícios 10

Equações de 2º grau 11
- Fórmula de Bhaskara 11
- Soma e Produto 11
- Equações de 2º Grau Incompletas 11
- Resolução de Exercícios 12
- Exercícios 12

Polinômios 14
- Soma, subtração e multiplicação por escalar 14
- Multiplicação e Produtos Notáveis 14

Matrizes 15
- Adição e Multiplicação 15
- Matrizes Características 16
- Resolução de Exercícios 18
- Exercícios 18

Determinante 20
- Diagonal Principal e Diagonal Secundária 20
- Determinante de Sarrus 20
- Determinante de Laplace 21
- Propriedades dos determinantes 21
- Resolução de Exercícios 22
- Exercícios 22

Sistemas Lineares 23
- Classificação 23
- Substituição 23
- Adição 24
- Resolução de Exercícios 24
- Exercícios 25

Trigonometria 26
- Classificação 26
- Teorema de Pitágoras 26
- Semelhança de triângulos 27
- Funções Trigonométricas 27
- Círculo Trigonométrico 28
- Ângulos Notáveis 28
- Relações 29
- Resolução de exercício 29
- Exercícios 29

Números Complexos 30
- Definição 30
- Operações 30
- Resolução de Exercícios 30
- Exercícios 30

Funções 30
Plano Cartesiano, Domínio e Imagem: 30
Função Afim 31
Função Quadrática 32
Funções Trigonométricas 33
Função Exponencial e Logarítmica 34
Gabarito 35

Equações de 1° grau

Uma equação de 1º grau é definida como uma relação de igualdade de uma única variável com expoente 1. Casos que fogem desta definição serão trabalhados futuramente em Inequações, Equações de 2º grau e Sistemas Lineares.

A variável é representada por uma letra, usualmente x, porém pode ser representada por outros símbolos, como y, t, α, β, etc. Já as constantes da equação são usualmente números ou símbolos que já representem valores constantes, como é o caso do π. O objetivo em uma equação é isolar a variável de todas as constantes, obtendo assim seu valor. Para tal processo, é preciso realizar operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

Existem dois raciocínios possíveis para resolver equações, o primeiro é passar os sinais e expressões pela igualdade, invertendo soma por subtração, multiplicação por divisão e vice-versa. Por facilidade nas operações é usual começar isolando por somas e subtrações, e então por multiplicações e divisões. A seguir um exemplo:

$$2 + 2x = 8 - x$$

Os valores que possuem a variável serão isolados na esquerda e as constantes na direita, invertendo o sinal de todos que mudarem de lado da igualdade:

$$2x - (-x) = 8 - (2) \quad \rightarrow \quad 3x = 6$$

Agora o valor que multiplica a variável deve ser levado à direita como divisor.

$$3x = 6 \quad \rightarrow \quad x = \frac{6}{3} \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad S = \{2\}$$

Atente-se que, após encontrar o valor da variável, deve-se escrever no formato do conjunto solução, representado por $S = \{x\}$.

O outro método para resolver uma equação é através da soma, subtração, divisão e multiplicação aplicada aos dois lados da equação em simultâneo. As operações feitas são representadas isoladas à direita ou aplicadas aos dois lados.

$$2 + 2x = 8 - x \qquad + (-2 + x)$$

$$2 - 2 + 2x + x = 8 - 2 - x + x$$

$$3x = 6 \qquad \div (3)$$

$$x = 2 \quad \rightarrow \quad S = \{2\}$$

Um cuidado necessário ao realizar multiplicações e divisões é garantir que não se esteja multiplicando ou dividindo por zero, para garantir que se mantenha a relação de igualdade.

Uma característica importante das equações é que, após encontrar o conjunto solução, é possível verificar se o resultado está correto, basta substituir a variável pelo valor encontrado:

$$2 + 2 \times 2 = 8 - 2 \quad \rightarrow \quad 6 = 6$$

Frações

Uma fração é definida no formato $\frac{n}{d}$, sendo n, o numerador, e d, o denominador, e representa a operação de divisão $n \div d$. É muito utilizada, inclusive nas equações, exatamente por permitir simplificar operações sucessivas que, no formato decimal, seriam muito complexas de realizar.

Nas somas e subtrações, primeiro igualam-se os denominadores e depois se somam (ou se subtraem) os numeradores. Para igualar os denominadores, encontra-se o mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores (ou seja, o menor valor que seja divisível por todos os denominadores da operação), quando os valores dos denominadores são primos entre si (ou seja, não possuem nenhum divisor comum diferente de 1), o MMC é simplesmente a multiplicação entre os denominadores.

Para ajustar os numeradores ao novo denominador, divide-se o novo denominador pelo antigo denominador e então multiplica-se ao antigo numerador, obtendo assim o novo numerador. Abaixo um exemplo:

$$x = \frac{5}{6} - \frac{4}{3} + \frac{1}{1}$$

Como MMC (6,3,1) é 6, então:

$$x = \frac{5(6 \div 6) - 4(6 \div 3) + 1(6 \div 1)}{6} = \frac{5 - 8 + 6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

A multiplicação e divisão de frações é mais simples, basta na primeira multiplicar numeradores e denominadores, e na segunda inverter a segunda fração e então realizar a multiplicação. No momento antes da multiplicação é possível simplicar numerador e denominador que possuam divisores comuns.

$$x = \frac{-14}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{-6}{7} \div \frac{-3}{5} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-14}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{-6}{7} \times \frac{-5}{3}$$

O 14 no numerador pode ser simplicado com o 7, o 6 com o 3 e o 5 com o 5, resultando em:

$$x = \frac{-2}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{-2}{1} \times \frac{-1}{3} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{8}{3} \quad \rightarrow \quad S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$$

Na representação fracionária, é importante também ter atenção à posição dos sinais, um sinal negativo aplicado a toda a fração inverte o sinal de todo o numerador:

$$-\frac{2x - 5}{3} = \frac{-(2x - 5)}{3} = \frac{-2x + 5}{3}$$

Racionalização

Quando o valor encontrado no denominador de uma fração for um valor com raiz quadrada, faz-se a racionalização com o propósito de possibilitar a soma com outras frações. Caso o denominador seja apenas uma raiz, basta multiplicar numerador e denominador por essa mesma raiz. Caso se trate de uma soma ou subtração de dois valores, multiplica-se numerador e denominador pela mesma expressão, porém com o sinal entre os dois valores invertido.

$$\frac{6}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{6\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad 3\sqrt{2}$$

$$\frac{5}{3 - \sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{3 - \sqrt{2}} \times \frac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{5(3 + \sqrt{2})}{9 - \sqrt{2}^2} \quad \rightarrow \quad \frac{15 + 5\sqrt{2}}{7}$$

Resolução de Exercícios

1. Com o objetivo de descobrir a massa de seis moedas idênticas, foi usada uma balança de prato até que os dois pratos apresentassem a mesma massa. Em um dos pratos, foram colocados 4 pesos de $\frac{2}{3}$ gramas e 3 moedas, no outro prato foram colocadas as outras 2 moedas e 3 pesos de $\frac{9}{5}$ gramas. Qual o peso de uma única moeda em gramas?

A partir do descrito, temos a seguinte equação:

$$4 \times \frac{2}{3} + 4x = 2x + 3 \times \frac{9}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{8}{3} + 4x = 2x + \frac{27}{5}$$

Agora, isolando as componentes variáveis das constantes:

$$4x - 2x = \frac{-8}{3} + \frac{27}{5}$$

Como 3 e 5 não possuem divisores em comum, o mínimo divisor comum (MMC) resulta em sua multiplicação $3 \times 5 = 15$. Assim:

$$2x = \frac{5 \times (-8) + 3 \times 27}{15} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \times \left(\frac{-40 + 81}{15}\right)$$

$$x = \frac{41}{30} \quad \rightarrow \quad S = \left\{\frac{41}{30}\right\} \quad \rightarrow \quad 1{,}367\ g$$

2. Dado a equação $2x \times \left(1 - \sqrt{3}\right) = \left(2 + \sqrt{2}\right)$, encontre o valor de x na forma racionalizada.

$$2x = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\left(1 - \sqrt{3}\right)}$$

Para racionalizar a expressão $1 - \sqrt{3}$, é preciso multiplicar numerador e denominador por $1 + \sqrt{3}$.

$$x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\left(1 - \sqrt{3}\right)} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad x = \frac{2 + 2\sqrt{3} + 1\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2(1 - \sqrt{3}^2)}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{-4} \quad \rightarrow \quad S = \left\{-\frac{2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right\}$$

Exercícios

3. Dado as seguintes equações, escreva o conjunto solução de cada uma:

a) $3x + 8 = 2x + 3$

b) $\frac{2x}{3} - 2 = 4$

c) $5x + 11 = 2x + \frac{1}{2}$

d) $\frac{x}{5} - 2 = \frac{3}{7} - \frac{7}{3}$

e) $2 = \frac{3x+5}{2} - 3$

f) $2x = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3}$

g) $x + 5 = \frac{9}{4+\sqrt{7}} + 1$

4. Considere para as seguintes equações os conjuntos soluções encontrados, verifique se as soluções encontradas estão corretas, caso contrário, encontre o conjunto solução correto.

a) $5x + 2(x + 2) = -7 + \frac{3x}{2}; S = \{-2\}$

b) $\frac{x}{1+\sqrt{2}} = -3 + 3\sqrt{2}; S = \{1 + \sqrt{2}\}$

5. Foram colocados 3 quilogramas de arroz, 5 sacos de meio quilo de farinha de trigo e 3 sacos de x quilogramas de feijão em uma caixa de $\frac{21}{6}$ kg. Sabendo que, após cheia, a caixa pesava 10,5 kg, escreva a equação e encontre o conjunto solução para x.

Inequações

Uma inequação é dada no mesmo formato que uma equação, no entanto, ao invés do símbolo de igualdade, usa-se os símbolos de desigualdade $\neq, <, \leq, >, \geq$ lidos respectivamente como diferente, menor que, menor ou igual a, maior que, maior ou igual a.

O método de resolução é exatamente o mesmo da equação, em que a única exceção é: ao dividir ou multiplicar por valores negativos, o símbolo da desigualdade inverte, como no exemplo a seguir:

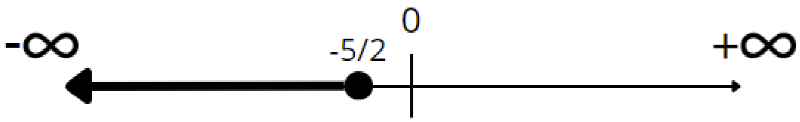
$$3x - 2 \geq 3 + 5x \quad \rightarrow \quad 3x - 5x \geq 3 + 2 \quad \rightarrow \quad -2x \geq 5 \quad \rightarrow \quad 2x \leq -5$$

Além disso, outra característica distinta da equação é a representação do conjunto solução, que não mais representa um único valor, mas sim um intervalo. Na inequação trabalhada anteriormente:

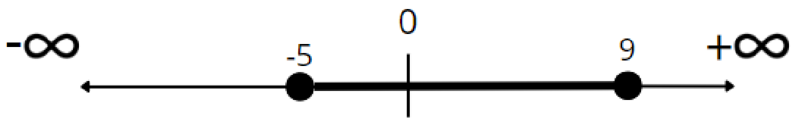
$$x \leq \frac{-5}{2} \quad \rightarrow \quad S = \left]-\infty, \frac{-5}{2}\right] \; ou \; S = \left\{x \in R / x \leq \frac{-5}{2}\right\}$$

Intervalos

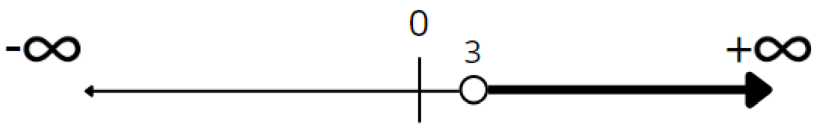
Os números reais podem ser caracterizados como uma reta que vai de $-\infty$ a $+\infty$ e um intervalo é uma semirreta que percorre parte dessa reta.



Intervalo $S = \left]-\infty, \frac{-5}{2}\right]$ *ou* $S = \left\{x \in R / x \leq \frac{-5}{2}\right\}$



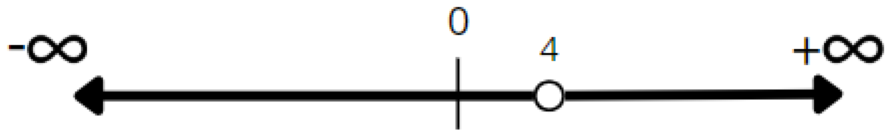
Intervalo $S = [-5,9]$ *ou* $S = \{x \in R / -5 \leq x \leq 9\}$



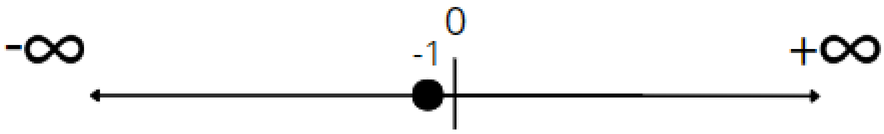
Intervalo $S =]3, +\infty[$ *ou* $S = \{x \in R / x > 3\}$

Os intervalos podem ser fechados, quando representarem as relações de maior ou igual ($\geq$) e de menor ou igual ($\leq$), ou abertos, quando representam as relações de maior ($>$) e menor ($<$).

Na representação da reta, intervalos fechados são representados por círculos preenchidos, já intervalos abertos, por círculos vazados. Quando os intervalos vão ao infinito, são também considerados abertos. Além disso, igualdade ($=$) é representada como fechada e diferença ($\neq$) como aberta.



$$S = R - \{4\} \text{ } ou \text{ } S = \{x \in R / x \neq 4\}$$



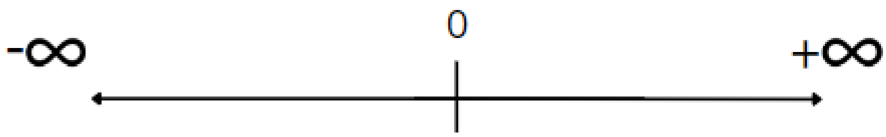
$$S = \{-1\} \text{ } ou \text{ } S = \{x \in R / x = -1\}$$

Resolução de Exercícios

6. Resolva as duas inequações a seguir, escrevendo seu conjunto solução e o representando na reta dos reais.

a) $-3x + 4 > \frac{2}{3}x + 5$

b) $\frac{5-x}{2} \leq x + \frac{4}{5}$



Para a primeira inequação, inicialmente se pode isolar o x na esquerda e em seguida fazer as operações, lembrando que, ao mudar o sinal, deve-se também inverter a inequação.

$$-3x - \frac{2}{3}x > 5 - 4$$

$$\frac{-9-2}{3}x > 1 \qquad \times (-1)$$

$$\frac{11}{3}x < 1 \qquad \times \left(\frac{3}{11}\right)$$

$$x < \frac{3}{11} \qquad \rightarrow \qquad S = \left]-\infty, \frac{3}{11}\right[$$

Já na segunda inequação:

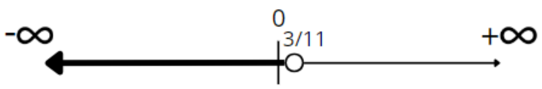
$$\frac{-x}{2} - x \leq \frac{-5}{2} + \frac{4}{5}$$

$$\frac{-x-2x}{2} \leq \frac{-5 \times (10 \div 2) + 4 \times (10 \div 5)}{10} \qquad \times (10)$$

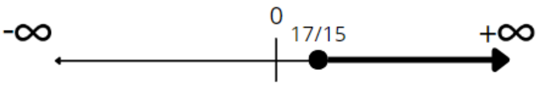
$$-15x \leq -25 + 8 \qquad \div (-15)$$

$$x \geq \frac{17}{15} \qquad \rightarrow \qquad S = \left[\frac{17}{15}, +\infty\right[$$

Colocando intervalo aberto em $\frac{3}{11}$ e fechado em $\frac{17}{15}$, temos:



Reta a



Reta b

Exercícios

7. Resolva as seguintes inequações, escrevendo o conjunto solução

   a) $-\frac{2x}{3} \neq 2 + 3x$

   b) $(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})x \leq \frac{\sqrt{3}+3x}{2} + 2\sqrt{3}$

   c) $5x + 18 < (2x + \sqrt{2}x)(2 + \sqrt{2}) - 5\sqrt{2}x$

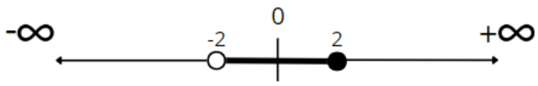
8. Relacione cada conjunto solução com a respectiva reta dos reais

   ( ) $S = \{x \in R/-2 \leq x < 2\}$

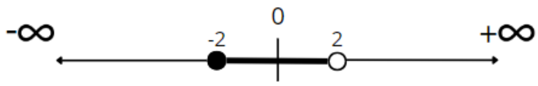
   ( ) $S =]-5,0] - \left\{\frac{-20}{7}\right\}$

   ( ) $S =]-2,2]$

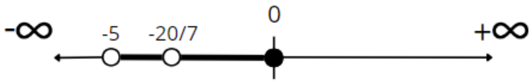
   ( ) $S = \left\{x \in R/-5 < x \leq 0 \;\; ou \;\; x = \frac{20}{7}\right\}$



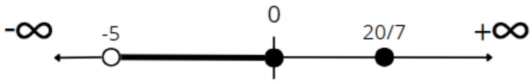
Reta I



Reta II



Reta III



Reta IV

Equações de 2º grau

Uma equação de 2º grau é uma equação que possui como o maior expoente o 2, sendo caracterizada pela expressão $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Assim, para começar a resolução de uma equação de segundo grau, é preciso isolar as expressões com x^2, x e a constante, de modo a encontrar os valores de a, b e c.

Como resolução, uma equação de 2º grau tem de 0 a 2 soluções.

Assim $S = \{\ \}$, $S = \{x\}$ ou $S = \{x_1, x_2\}$.

Fórmula de Bhaskara

O método mais comum de resolução das equações de 2º grau é através da fórmula de Bhaskara. Após encontrar os valores de a, b e c, basta substituir na seguinte solução:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O valor dentro da raiz quadrada $(b^2 - 4ac)$ é denominado *delta* (Δ), a partir dele é possível determinar a quantidade de soluções.

Para $\Delta > 0$, há duas soluções.

Para $\Delta = 0$, há uma única solução.

Para $\Delta < 0$, não há solução dentro dos números reais.

Este método é válido para qualquer caso.

Soma e Produto

O método de soma e produto utiliza de duas relações, considerando x_1 e x_2 como as duas soluções da equação, podendo ser iguais um ao outro, valem as seguintes relações:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

É recomendado encontrar os valores de x possíveis para a multiplicação, pensando nos divisores de $\frac{c}{a}$ e depois analisar o caso que também é solução para a soma.

Este método é válido para qualquer caso, porém como depende de dedução dos valores, é recomendado utilizar em casos com $a = 1$ e b e c valores inteiros.

Equações de 2º Grau Incompletas

Uma equação de 2º grau é considerada incompleta quando $b = 0$ ou $c = 0$. Nestes casos há maneiras mais diretas de resolver a equação:

Para o caso em que $b = 0$, basta isolar $x^2 = \frac{-c}{a}$ e então fazer a raiz quadrada de ambos os lados, porém, por conta dessa operação, a resposta pode ser positiva ou negativa. Assim, para esse caso:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Já no caso em que $c = 0$, basta fazer o fator comum com x:

$$ax^2 + bx = 0 \qquad \rightarrow \qquad x(ax + b) = 0$$

Assim, as soluções são obtidas por $x_1 = 0$ e $ax_2 + b = 0$.

Resolução de Exercícios

9. Encontre o conjunto solução de $-3(x - x^2) = -4x + 2$

Primeiramente se isolam os valores à esquerda:

$$-3x + 3x^2 - 2 + 4x = 0 \qquad \rightarrow \qquad 3x^2 + x - 2 = 0$$

Usando Bhaskara:

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

$$x_1 = \frac{-1 - 5}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Assim:

$$S = \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$$

Exercícios

10. Dada as equações de 2º grau $ax^2 + 5x - 3 = 0$; $\frac{x^2}{2} + bx + 2 = 0$ e $5x^2 - 2x + c = 0$, determine:

    a) O intervalo de a para o qual a primeira equação não possua solução dentro dos números reais.

    b) Os valores de b para os quais a segunda equação possua uma única solução.

    c) O valor de c para o qual a terceira equação possua como soluções $S = \left\{\frac{1}{5}, 3\right\}$, utilize o método da Soma e Produto.

11. Determine o conjunto solução das seguintes equações:

a) $x^2 + 3x - 3 = 2 - x$

b) $(2 + x)(5 - 2x) = 0$

c) $5x^2 = 6$

d) $2x^2 = 3x$

e) $3x^2 - 3x = -1$

f) $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$

Polinômios

Um polinômio é definido como uma expressão $p(x) = k_1x^n + k_2x^{n-1} + k_3x^{n-2} + k_4x^{n-3} + \cdots$, em que k são os coeficientes reais de cada grau da variável x, enquanto $n, n-1, n-2, etc$ são os expoentes e são todos números naturais.

O polinômio é considerado de grau n caso n seja o maior expoente dentro da expressão com coeficiente k diferente de 0.

Equações de 2º grau possuem de 0 a 2 raízes reais, o mesmo ocorre com polinômios de grau superior n, que possuem de 0 a n raízes reais.

Soma, subtração e multiplicação por escalar

As operações de soma, subtração e multiplicação por escalar são bastante intuitivas: a variável e seu expoente se mantem os mesmos, sendo as operações feitas usando unicamente os coeficientes de cada grau de variável. A seguir alguns exemplos para cada caso, respectivamente:

$$5x^3 - x + 2 + (2x^3 + x^2 + x + 2) = (5+2)x^3 + (0+1)x^2 + (-1+1)x + (2+2)$$

$$5x^3 - x + 2 + (2x^3 + x^2 + x - 3) = 7x^3 + x^2 + 4$$

$$5x^3 - x + 2 - (2x^3 + x^2 + x + 2) = (5-2)x^3 + (0-1)x^2 + (-1-1)x + (2-2)$$

$$5x^3 - x + 2 - (2x^3 + x^2 + x - 3) = 3x^3 - x^2 - 2x$$

$$2 \times (5x^3 - x + 2) = (2 \times 5)x^3 + \big(2 \times (-1)\big)x + (2 \times 2) = 10x^3 - 2x + 4$$

Multiplicação e Produtos Notáveis

A multiplicação de polinômios é feita multiplicando todos os elementos de um polinômio com os do outro polinômio, multiplicando os coeficientes e somando os expoentes:

$$(2x^3 - x)(3x^2) = (2x^3)(3x^2) + (-x)(3x^2) = (2 \times 3)x^{3+2} + (-1 \times 3)x^{1+2}$$

$$(2x^3 - x)(3x^2) = 6x^5 - 3x^3$$

Nessas multiplicações há alguns casos notáveis, como os seguintes:

- Fator Comum:

$$ax^2 + bx = x(ax + b)$$

- Quadrado da soma:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

- Quadrado da subtração:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

- Diferença dos quadrados:

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

Matrizes

Uma matriz é uma maneira de organizar valores em linhas e colunas de modo a facilitar operações mais complexas ou com maior número de variáveis.

Cada elemento de uma matriz é localizado pela sua linha e coluna, em que o elemento dado por a_{ij} está na i-ésima linha e na j-ésima coluna. As matrizes podem ter diferentes dimensões m por n, sendo m e n números naturais não nulos. A seguir um exemplo de uma matriz 3x2.

$$A_{3x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Uma matriz pode ser dada já no seu formato ou como uma tabela, assim como por uma lei de formação, dada a partir dos valores i e j. A seguir um exemplo de lei de formação:

$$A_{3x3:} \quad a_{ij} = \begin{cases} (3+j)i & ,se\ i = j \\ j^2 - 2i & ,se\ i \neq j \end{cases}$$

Para $i = j$, vale a expressão $a_{ij} = (3+j)i$, assim:

$$a_{11} = (3+1)1 = 4;\ a_{22} = (3+2)2 = 10;\ a_{33} = (3+3)3 = 18.$$

Para $i \neq j$, vale a expressão $a_{ij} = j^2 - 2i$, assim:

$$a_{12} = 2^2 - 2(1) = 2;\ a_{13} = 3^2 - 2(1) = 7;\ a_{21} = 1^2 - 2(2) = -3;$$

$$a_{23} = 3^2 - 2(2) = 5;\ a_{31} = 1^2 - 2(3) = -5;\ a_{32} = 2^2 - 2(3) = -2.$$

A matriz gerada pela lei de formação é a matriz:

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ -3 & 10 & 5 \\ -5 & -2 & 18 \end{bmatrix}$$

Adição e Multiplicação

A adição de matrizes é feita entre matrizes de mesma dimensão somando os termos que estão na mesma posição. Assim, um exemplo de soma entre matrizes 2x2 é:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

A multiplicação entre matrizes é um processo um pouco mais complexo, como única regra para ser possível, é preciso que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz. O tamanho da nova matriz é encontrado da seguinte maneira:

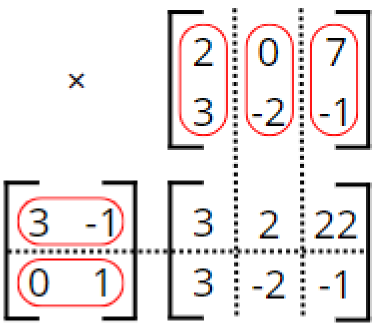
$$[A]_{2X\cancel{2}} \; X \; [B]_{\cancel{2}X3} = [C]_{2X3}$$

Representação da multiplicação A x B

Já a operação, é feita multiplicando os valores de cada linha da primeira matriz com cada coluna da segunda matriz seguindo a ordem em que estão na respectiva linha/coluna e então os somando. A seguir um exemplo de multiplicação, em vermelho a multiplicação da segunda linha pela primeira coluna, gerando o elemento a_{21} da matriz produto.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x2-1x3 & 3x0-1x(-2) & 3x7-1x(-1) \\ 0x2+1x3 & 0x0+1x(-2) & 0x7+1x(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 22 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Uma maneira mais fácil de visualizar a multiplicação é alocando a primeira matriz à esquerda e a segunda matriz acima e então multiplicar os valores conforme as linhas e colunas se cruzam, a multiplicação anterior seria disposta da seguinte maneira:



As propriedades da soma e multiplicação de matrizes, sendo A, B e C matrizes e γ um escalar, são:

$$A + B = B + A$$

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$\gamma \times (A \times B) = A \times (\gamma \times B)$$

No geral, ao contrário de com valores reais, $A \times B \neq B \times A$.

Matrizes Características

Para além das operações de soma e multiplicação, existem algumas operações e matrizes características. Considere para todos os exemplos que a matriz $[A]$ é dada por:

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Transposta:** A transposição de matrizes é a operação em que se invertem os valores de linhas e colunas de cada elemento, com a diagonal principal mantendo-se igual e os demais valores trocando seus valores de *i* pelos de *j*. A transposta da matriz $[A]$ é representada por $[A]^{\,t}$ e o elemento a_{23} transforma-se no elemento a_{32}, por exemplo.

$$A_{3x3}^{t} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Nula:** A matriz nula, representada como $[0]$ é uma matriz em que todos os elementos são iguais a zero, assim vale que $[A] \times [0] = [0]$ e $[A] + [0] = [A]$. A seguir a matriz nula de dimensão 3x3.

$$0_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Identidade:** A matriz identidade é uma matriz quadrada (número de colunas e linhas é igual) em que todos os elementos da diagonal principal – em que $i = j$ – são iguais a 1 e o restante dos elementos são iguais a 0. Assim vale a propriedade $[A] \times [I] = [A]$. A matriz identidade de dimensão 3 é dada por:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Inversa:** Toda matriz com determinante não nulo (propriedade que será trabalhada no próximo capítulo) possui uma única matriz inversa. A matriz inversa de $[A]$ é dada por $[A]^{-1}$ e sua principal propriedade é que $[A] \times [A]^{-1} = [I]$. No caso do $[A]$ dado, temos:

$$A_{3x3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Ao realizar a multiplicação é possível verificar a propriedade.

- **Matriz Simétrica:** A matriz simétrica é uma matriz quadrada em que os valores acima e abaixo da diagonal principal são simétricos, assim vale $[S] = [S]^t$. Os valores na diagonal principal podem ser quaisquer. Um exemplo de matriz simétrica é:

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 20 & -7 \\ 20 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Antissimétrica:** Na matriz antissimétrica vale $[S] = -[S]^t$, sendo os elementos de sua diagonal principal iguais a 0 e os demais seguindo a simetria, porém com sinais invertidos. Um exemplo de matriz antissimétrica é:

$$AS_3 = \begin{bmatrix} 0 & -20 & 7 \\ 20 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolução de Exercícios

12. Determine uma matriz B_{3x3}, tal que $A^t + 2B = C$ seja uma matriz simétrica. A matriz A é a seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinando a matriz B como:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$$

Já que a matriz pode ser simétrica independentemente da diagonal principal, os elementos da diagonal principal de B podem ser qualquer valor, por simplicidade, colocamos como 0.

A matriz transposta de A é dada por:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -7 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, $A^t + 2B$ é igual a:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2a & 1+2b \\ -2+2c & 0 & -7+2d \\ 3+2e & 2f & 1 \end{bmatrix}$$

Resultam da propriedade de simetria as seguintes equações:

$$-2+2c = 2a; \qquad 3+2e = 1+2b; \qquad 2f = -7+2d$$

Quaisquer valores que respeitem tais equações estariam corretos, por simplicidade, consideram-se nulas uma das variáveis em cada equação. Vamos usar $c = e = f = 0$. Então:

$$-2 = 2a; \qquad 3 = 1+2b; \qquad 0 = -7+2d$$

Que resulta em: $a = -1,\ b = 1$ e $d = \frac{7}{2}$. Assim, a matriz B pode ser:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & {}^{7}/_{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O qual resulta na matriz simétrica C:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios

13. Dada a matriz A_{2x2} formada pela lei de formação a seguir:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{ij}{4}c & ,se\ i = j \\ i - j & ,se\ i \neq j \end{cases}$$

Verifique as seguintes afirmações e selecione a alternativa correta:

I. Para $c = 0$, a matriz A é antissimétrica.

II. Para $c = 1$, temos que $A^{-1} = \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

III. Para $c = 4$, temos que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix}$.

a) Somente as afirmações I e III são verdadeiras.

b) Somente as afirmações I e II são verdadeiras.

c) Somente uma afirmação é verdadeira.

d) Todas as afirmações são verdadeiras.

14. Analise as seguintes tabelas de exportação, transforme cada uma em uma matriz e realize a operação necessária para encontrar a matriz cujas linhas são os países que recebem exportação e as colunas os valores totais em milhões de reais resultantes da exportação para cada país.

Países	Exportação de Milho (em Mt)	Exportação de Soja (em Mt)	Exportação de Carne (em Mt)
EUA	1	4	2
China	2	4	3
Argentina	0,5	3	0,5
Índia	0,5	2	0,5

Commodities	Milho	Soja	Carne
Preço da Mt em milhões de R$	3000	2000	5000

Determinante

Uma das principais operações que podem ser feitas com uma matriz quadrada é o determinante, o qual relaciona para cada matriz um valor específico a partir de uma operação entre seus elementos.

A operação de determinante de uma matriz A é representado como $|A|$ ou det(A), ou ainda como a própria matriz com barras ao invés de conchetes em suas laterais.

Existem diversos métodos para o cálculo de determinantes, sendo os principais o Método das Diagonais, o Método de Sarrus e o Método de Laplace, explicados posteriormente.

Vale ressaltar que mesmo usando diferentes métodos, o valor encontrado para o determinante é único para uma mesma matriz.

Diagonal Principal e Diagonal Secundária

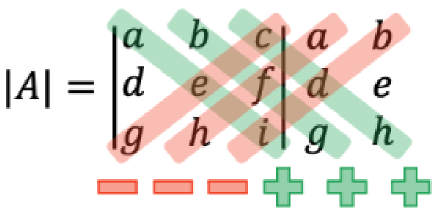
O método da diagonal principal e diagonal secundária, ou método das diagonais, é utilizado para o cálculo do determinante de matrizes 2x2 e é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal subtraídos pelo produto da diagonal secundária da matriz.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (1x(-2)) - (4x3) = -2 - 12 = -14$$

Método das Diagonais

Determinante de Sarrus

O método para o cálculo do determinante de Sarrus é útil para o cálculo de determinantes de uma matriz quadrada 3x3. O método consiste em repetir as duas primeiras colunas à direita da matriz e então somar os produtos das diagonais no sentido principal e subtrair o produto das diagonais no sentido secundário. A seguir uma representação desse método:



$$\det(A) =$$
$$+ a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h$$
$$- c \cdot e \cdot g - a \cdot f \cdot h - b \cdot d \cdot i$$

Método de Sarrus para cálculo de determinante

Determinante de Laplace

O método de Laplace permite calcular o determinate de matrizes maiores, reduzindo-as a determinantes de matrizes menores.

Escolhe-se uma linha ou coluna da matriz, geralmente a que possuir maior número de elementos nulos. Em seguida, para cada elemento da linha ou coluna escolhida, é somado a seguinte expressão:

$$A_{ij} = a_{ij} \times (-1)^{i+j} \times \det(A - linha\ i - coluna\ j)$$

Sendo a_{ij} o elemento e $A - linha\ i - coluna\ j$ a matriz original, após se retirar a linha e coluna do elemento.

A seguir o cálculo do determinante de uma matriz 3x3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \text{ então } A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -28.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \text{ então } A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 53.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \text{ então } A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -23.$$

Propriedades dos determinantes

O determinate possui algumas propriedades que podem facilitar o cálculo de determinates baseado nas características da matriz $A_{n\,x\,n}$.

- $\det(A^t) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(\gamma A) = \gamma^n \det(A)$, sendo A uma matriz n por n.
- $\det(A \times B) = \det(A)\det(B)$
- Caso uma linha/coluna seja toda nula ou uma linha/coluna seja proporcional a outra linha/coluna, respectivamente, $\det(A) = 0$
- Caso duas linhas/colunas de mesma paridade – por exemplo linha i=1 e linha i=3, ou coluna j=2 e coluna j=4 - sejam trocadas entre si, formando a matriz B,então $\det(B) = \det(A)$.
- Caso duas linhas/colunas de paridades opostas – por exemplo linha i=1 e linha i=4, ou coluna j=2 e coluna j=3 - sejam trocadas entre si, formando a matriz B,então $\det(B) = -\det(A)$.

Resolução de Exercícios

15. Dada as seguintes matrizes, encontre $\det(A)$ utilizando o método de Laplace e das diagonais, $\det(B)$ utilizando o método de Sarrus e $\det(2BC)$ utilizando as propriedades dos determinantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

Para o determinante de A, escolhendo a terceira linha, pois possui mais elementos nulos, temos apenas o elemento $a_{32} = 3$:

$$\det(A) = 3 \times (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) \times ((-1 \times 1) - (2 \times 2)) = 15$$

Para o determinante de B, temos:

$$\det(B) = 0 \times 0 \times 0{,}5 + 2 \times (-1) \times (-2) + 1 \times 1 \times 2 \\ - [2 \times 0 \times (-2) + 0 \times 1 \times (-1) + 2 \times 1 \times 0{,}5]$$

$$\det(B) = 0 + 4 + 2 - [0 + 0 + 1] = 6 - 1 = 5$$

Por último, pelo determinante de 2BC, temos:

$$\det(2BC) = 2^3 \times \det(B) \times \det(C)$$

Ao invés de calcular $\det(C)$, pode-se notar que a matriz C é a matriz B com as colunas $j = 2$ e $j = 3$ trocadas de posição, portanto, $\det(C) = -\det(B) = -5$.

Assim:

$$\det(2BC) = 8 \times 5 \times (-5) = -200$$

Exercícios

16. Dado $\det(A) = 2, \det(B) = -3, \det(C) = 1 \ e \ \det(D) = 0$, com A, B, C e D matrizes quadradas de dimensão 3x3, determine se as seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas:

( ) $\det(A^2B) \leq \det(IB^2A)$

( ) $\det(A + C) = 3$

( ) A matriz D possui no mínimo uma linha ou coluna nula

( ) $\det(2\,A^{-1}) < 2$

17.

Sistemas Lineares

Em uma equação é possível encontrar o valor de uma incógnita, porém em casos que dependem de múltiplos fatores, é necessário uma quantidadeigual ou maior de equações, compondo assim um sistema.

Os sistemas lineares são conjuntos de equações de 1º grau com uma ou mais variáveis, que, pela interação dessas equações, permite em alguns casosencontrar os valores de tais variáveis.

Classificação

Os sistemas podem ser classificados quanto a sua solução, sendo dividido em:

- **Sistema possível determinado:** Uma única solução para cada variável.
- **Sistema possível indeterminado:** Uma ou mais variáveis possuem infinitas soluções.
- **Sistema impossível:** Por contradição entre as equações, não há nenhuma solução.

O sistema pode ser representado como a multiplicação de matrizes $AX = C$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ \dfrac{x}{2} - z = 2 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

Os valores que multiplicam as variáveis (os coeficientes) constituem a matriz A, as variáveis constituem a matriz X e as constantes (valores que não multiplicam as variáveis, nesse caso colocados à direita) constituem a matriz C.

Assim, para este sistema teríamos a seguinte representação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ {}^{1}/_{2} & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A partir do cálculo do determinante da matriz A, temos a seguinte informação sobre a classificação do sistema:

- $\det(A) = 0$ → Sistema possível indeterminado ou Sistema impossível.
- $\det(A) \neq 0$ → Sistema possível determinado.

Substituição

Um dos métodos para encontrar a solução de um sistema é o método da substituição, em que se isola uma das variáveis das restante em uma equação e então se substitui ela em outra equação pelo valor encontrado, repetindo o processo até obter o valor de uma das variáveis e e ntão fazer o caminho contrário para encontrar o valor de cada variável. A seguir a solução pelo método da substituição de um sistema de duas variáveis:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x - 3y = 8 \end{cases}$$

Isolando o y da primeira equação:

$$y = 1 - 2x$$

Substituindo na segunda equação:

$$5x - 3(1 - 2x) = 8$$

$$5x - 3 + 6x = 8$$

$$11x = 11$$

$$x = 1$$

Voltando à equação com y isolado:

$$y = 1 - 2(1) = -1$$

Assim, temos a solução:

$$S = (1, -1)$$

Adição

No método da adição, multiplicando equações por valores reais e somando uma equação a outra de modo a anular o coeficiente de uma das variáveis, é possível chegar a equações com uma única variável que pode ser resolvida sozinha. Para o mesmo sistema anterior, a resolução seria da seguinte forma:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x - 3y = 8 \end{cases}$$

Para anular o y, é possível multiplicar a primeira equação por 3 e somá-la à segunda equação:

$$\begin{gathered} 6x + 3y = 3 \\ +(5x - 3y = 8) \end{gathered}$$

$$11x = 11$$

$$x = 1$$

$$2(1) + y = 1$$

$$y = -1$$

$$S = (1, -1)$$

Resolução de Exercícios

18. Dada as seguintes equações defina a classificação de cada sistema com base nas soluções encontradas:

    (1) $2x - \frac{y}{\sqrt{2}} = 5$

    (2) $2x + \frac{y}{\sqrt{2}} = 5$

    (3) $\frac{y}{2} - x\sqrt{2} = 5$

    (4) $3x - 2{,}5 + \frac{3y}{\sqrt{8}} = 5$

a. Classificação do sistema composto por (1) e (2):

b. Classificação do sistema composto por (1) e (3):

c. Classificação do sistema composto por (2) e (4):

d. Classificação do sistema composto por (1), (2) e (4):

e. Solução do sistema possível determinado composto poe (3) e (4):

Exercícios

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Maecenas porttitor congue massa. Fusce posuere, magna sed pulvinar ultricies, purus lectus malesuada libero, sit amet commodo magna eros quis urna.

Nunc viverra imperdiet enim. Fusce est. Vivamus a tellus

Trigonometria

A trigonometria é o ramo da matemática que se ocupa de calcular medidas relacionadas aos elementos que formam triângulos – os lados e os ângulos entre eles. A seguir as principais relações trigonométricas:

Classificação

Os triângulos são classificados conforme a dimensão de seus lados e ângulos internos:

Conforme os lados:

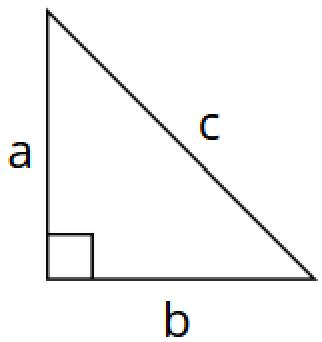
- Equilátero: Todos os lados possuem a mesma dimensão.
- Isósceles: Dois lados possuem a mesma dimensão.
- Escaleno: Todos os lados possuem dimensões distintas.

Conforme os ângulos internos – vale salientar que uma das características comum aos triângulos é que a soma de seus três ângulos internos é de 180°.

- Retângulo: Seu maior ângulo interno é de 90°.
- Acutângulo: Seu maior ângulo interno é menor do que 90° - o triângulo equilátero é um acutângulo, pois seus ângulos internos são todos de 60°.
- Obtusângulo: Seu maior ângulo interno é maior do que 90°.

Teorema de Pitágoras

Em um triângulo retângulo, os lados em contato com o ângulo de 90° (também chamado de ângulo reto), são denominados catetos, enquanto o lado oposto ao ângulo – e por isso, também o de maior dimensão - é denominado hipotenusa.



Representação dos catetos a e b, da hipotenusa c e do ângulo de 90°, representado por um quadrado.

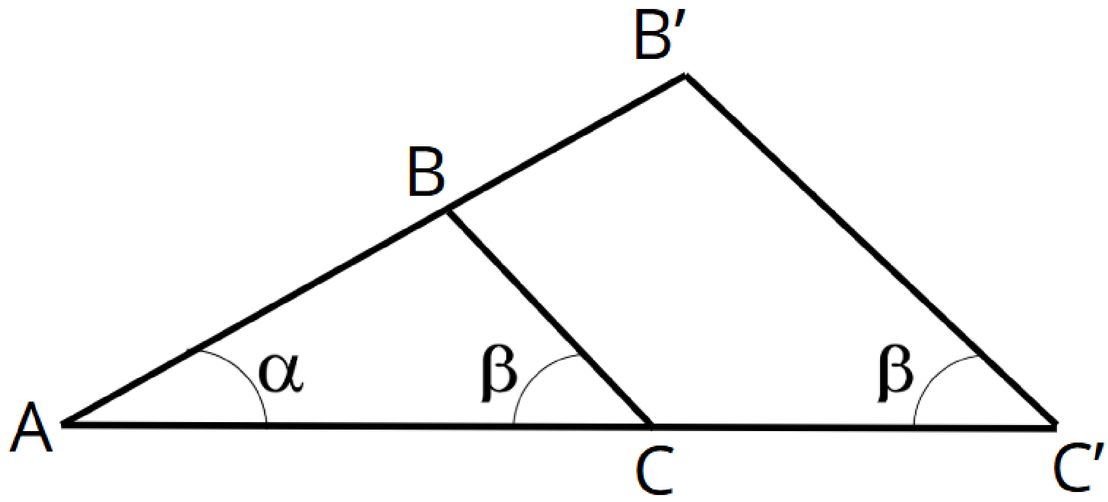
Dado o triângulo, temos que a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, ou seja:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Semelhança de triângulos

Dois triângulos são considerados semelhantes se possuírem os mesmos ângulos internos, nesse caso, seus lados serão proporcionais. Para concluir que dois triângulos são semelhantes, basta que se identifique dois ângulos internos iguais, pela relação da soma dos ângulos internos resultar em 180°, o terceiro ângulo também será igual.

A seguir um exemplo de triângulos semelhantes e a relação de proporção consequente dessa semelhança:



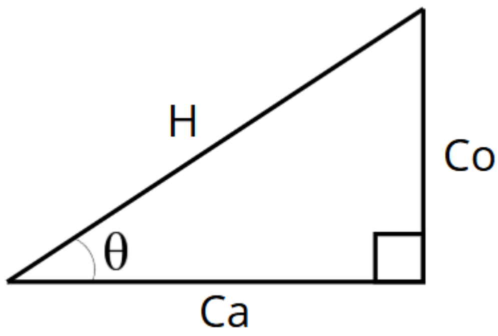
Os triângulos compartilham o ângulo alfa e lados BC e B'C' são paralelos, garantindo que os ângulos em C e C' sejam iguais, sendo assim, os triângulos são semelhantes.

A partir da semelhança, temos a seguinte proporcionalidade:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Funções Trigonométricas

Dado um triângulo retângulo como o seguinte:



Ca é o cateto adjacente ao ângulo θ, enquanto Co é o cateto oposto ao ângulo θ e H a hipotenusa do triângulo retângulo.

Assim, se define as funções trigonométricas seno (senθ), cosseno (cosθ) e tangente (tanθ ou tgθ).

$$sen\theta = \frac{Co}{H}\ , \qquad cos\theta = \frac{Ca}{H}\ , \qquad tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} = \frac{Co}{Ca}$$

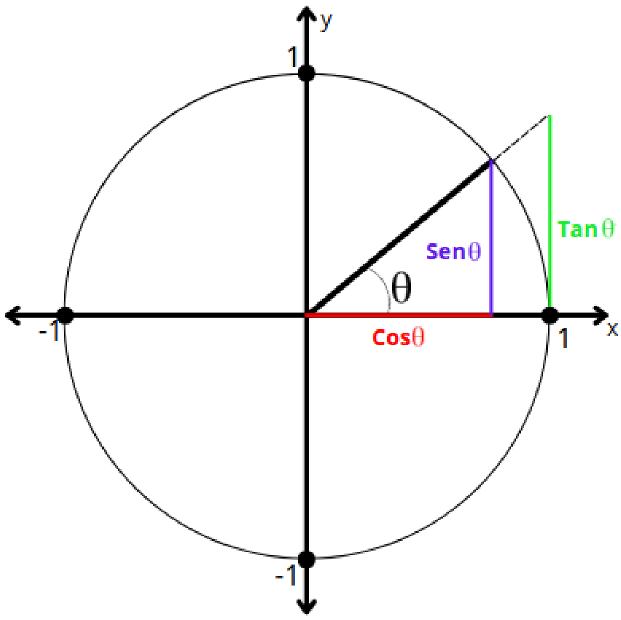
Círculo Trigonométrico

Uma rotação completa de um círculo equivale ao ângulo de 360°.

Vale notar que outra representação de ângulo, além do grau (°) é o radiano (rad), em que 1 rad equivale à dimensão do raio de uma circunferência. Uma volta completa equivale a $2\pi\, rad$, assim $\pi = 180°$ e, para passar uma medida em radianos para graus, basta utilizar a operação:

$$\theta(graus) = \frac{180 \times \theta(radianos)}{\pi}$$

O círculo trigonométrico é um círculo de raio unitário que representa seno, cosseno e tangente para diferentes ângulos, apresentando sua variação periódica conforme o ângulo.



Círculo Trigonométrico – a rotação é em sentido anti-horário

Conforme o ângulo varia, o sinal de seno, cosseno e tangente também, por exemplo, seno é positivo de 0° a 180°, fica negativo de 180° a 360°, então volta a ficar positivo, variando o sinal a cada 180°.

A partir do círculo trigonométrico também se chega à relação fundamental:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

Ângulos Notáveis

Para alguns ângulos mais comuns, vale se atentar aos seguintes valores das funções trigonométricas:

Θ(°)	Θ(rad)	senθ	cosθ	tanθ
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∄
180°	π	0	-1	0

Relações

Algumas relações dos senos e cossenos são bastante úteis para obter valores para além dos ângulos notáveis:

- $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
- $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$
- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)\cos(\beta) + sen(\beta)\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$
- $\tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
- $cossec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}$, sendo $cossec$ a função cossecante
- $\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$, sendo sec a função secante

Outras relações podem ser encontradas a partir da união dessas relações.

Resolução de exercício

19. Aaaaaaa

Exercícios

20. Aaaaaaa

21. Aaaaaaa

Números Complexos

Definição

Operações

A

A

Resolução de Exercícios

22. Aaaaaa

Exercícios

Funções

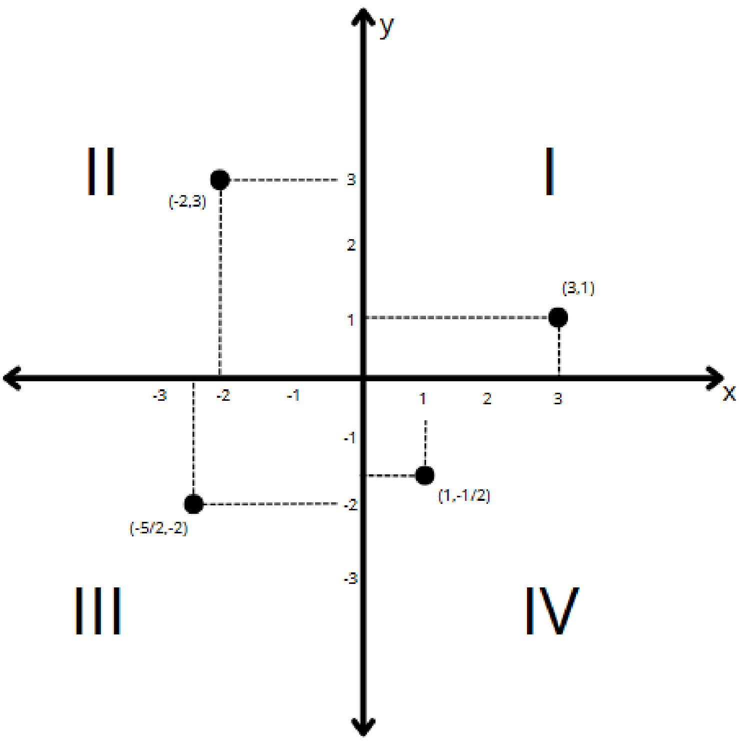
Plano Cartesiano, Domínio e Imagem:

Funções são relações em que se chega a um valor (a variável dependente y) a partir de um outro (a variável independente x). A função pode ser representada no formato $f(x)$, em que $f(x) = y$ e varia conforme x.

O domínio de $f(x)$ é o conjunto dos valores x, geralmente o conjunto dos números reais. Já a imagem de $f(x)$ é o conjunto dos valores y que podem ser obtidos pela função $f(x)$, variando caso a caso.

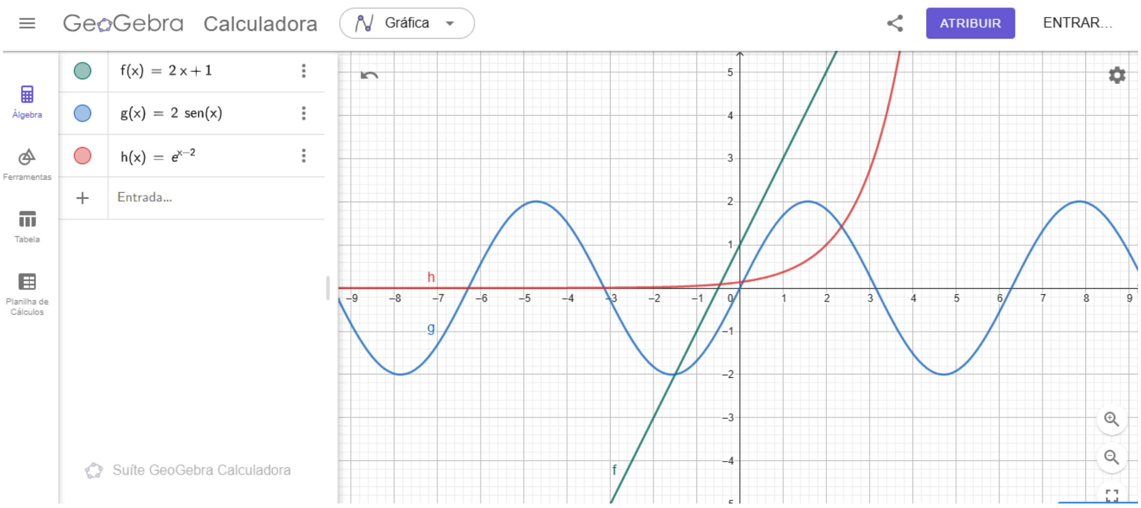
Uma das características da função é que dois diferentes valores de x podem resultar no mesmo y, no entanto, um único valor de x nunca leva a mais de um y.

A representação gráfica de uma função ocorre através do plano cartesiano, um plano de dois eixos perpendiculares, um horizontal: o eixo x (ou eixo das abscissas) e um vertical: o eixo y (ou eixo das coordenadas).



Plano cartesiano com a divisão dos quadrantes e quatro pontos, um em cada quadrante

Para visualizar melhor o plano cartesiano e as funções que serão trabalhadas a seguir, é interessante utilizar a ferramenta Geogebra, disponível publicamente na internet, com o formato 2D, útil a essa disciplina, e o formato 3D, Útil à curiosidade e outras disciplinas da graduação.



Print do software Geogebra 2D com algumas das funções que serão trabalhadas posteriormente

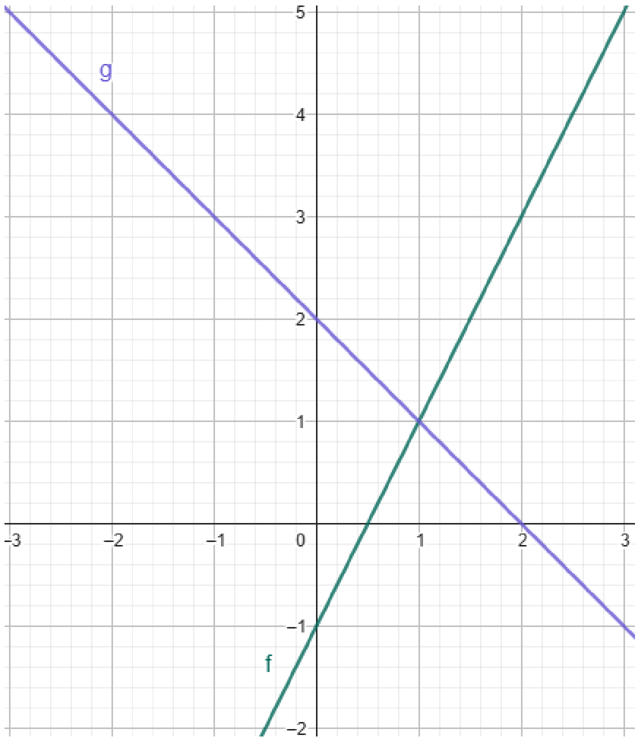
Função Afim

A função afim, ou função linear, é dada no formato $f(x) = ax + b$, sendo a o coeficiente angular e b o coeficiente linear. Essa função resulta numa reta no plano cartesiano, sendo crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$. Caso $a = 0$, trata-se de uma função constante.

Considerando α o ângulo que a reta e a horizontal, a é dado por:

$$a = \tan(\alpha)$$

Já o valor de b pode ser obtido como o valor de y quando a reta cruza o eixo y.

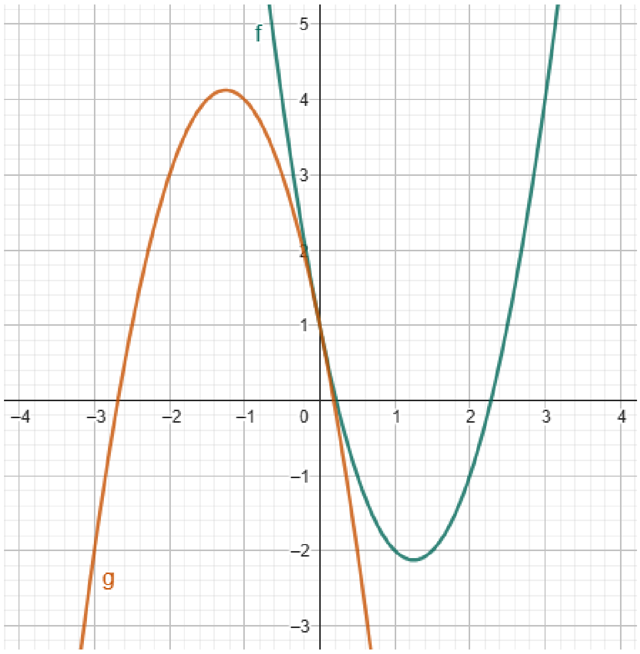


As funções f(x)=2x-1 e g(x)=-x+2, que se cruzam quando 2x-1=-x+2

Função Quadrática

A função quadrática é dada no formato $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo c o valor de y quando a reta cruza o eixo y. Algumas características do gráfico gerado pela função quadrática, chamada de parábola, são:

- Se $a > 0$, a parábola possui sua concavidade para cima
- Se $a < 0$, a parábola possui sua concavidade para baixo



As funções f(x)=2x²-5x+1 e g(x)=-2x²-5x+1, as duas passando por (0,1)

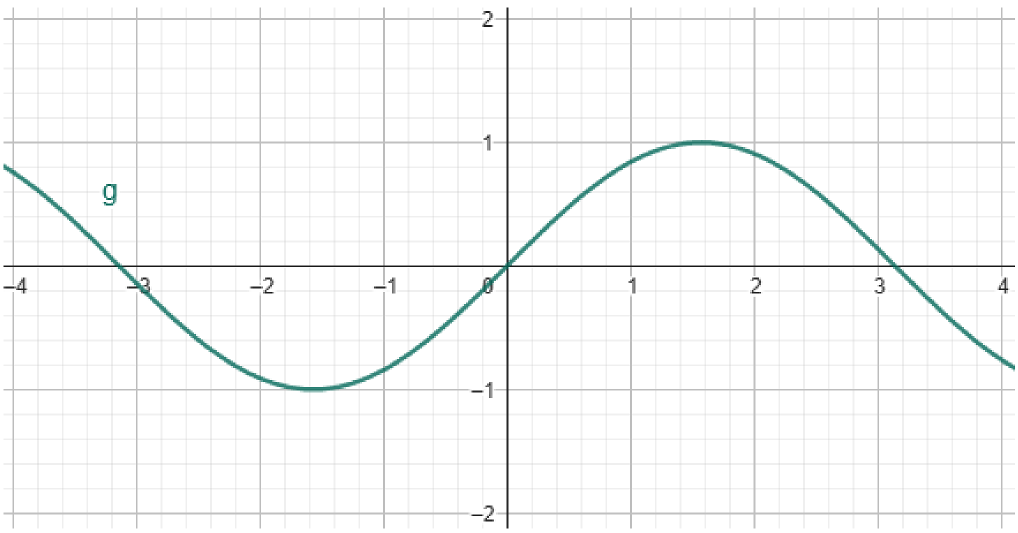
O ponto máximo ou mínimo da parábola é chamado de vértice, cuja localização pode ser encontrada por:

$$x_V = \frac{-b}{2a}$$

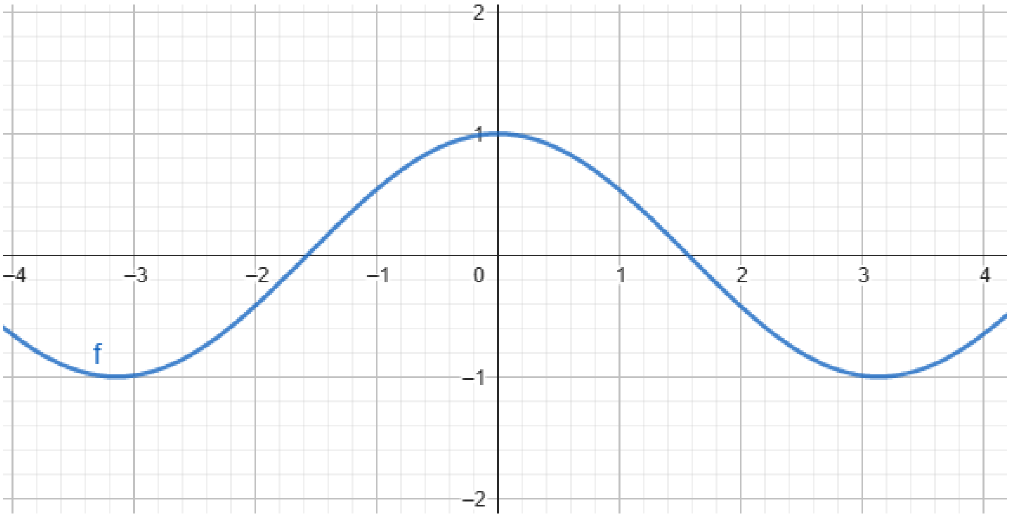
$$y_V = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}$$

Funções Trigonométricas

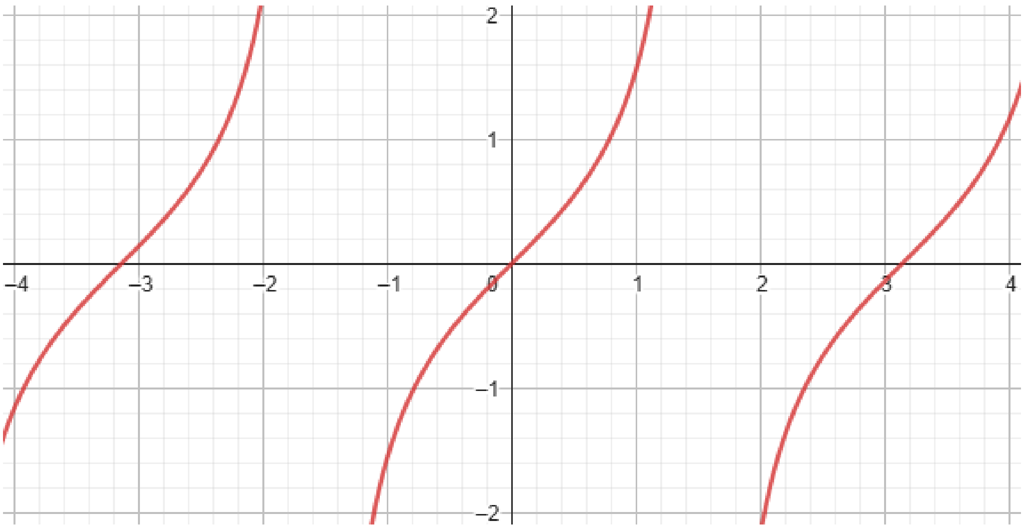
Seno, cosseno e tangente, trabalhados anteriormente, também são funções, sendo x o ângulo em radianos em que se usa o operador e y o resultado obtido. É possível visualizar graficamente a periodicidade dessas funções, assim como os valores dos ângulos característicos.



Função g(x)=sen(x)



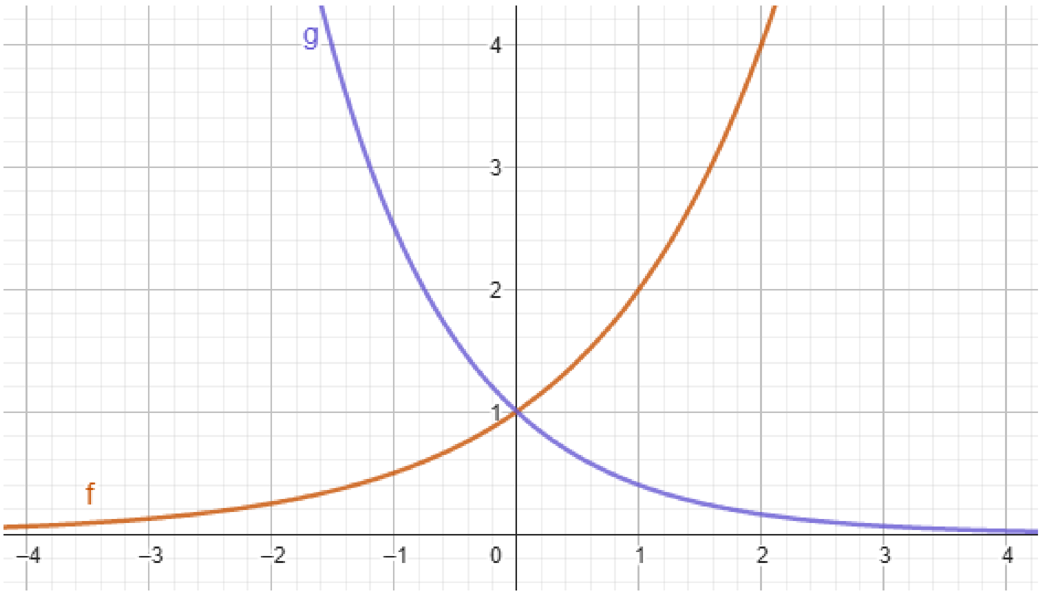
Função f(x)=cos(x)



Função h(x)=tan(x), vale perceber que em $x = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ a função não possui valor, como é esperado.

Função Exponencial e Logarítmica

A operação de exponenciação resulta numa função dada por $f(x) = b^x$, que para $0 < b < 1$ é decrescente e para $b > 1$ é crescente, sempre cruzando o eixo y no ponto (0,1). b não pode ser negativa, pois seria possível apenas determinar o sinal do resultado para x inteiro, não real.



Funções $g(x) = 0{,}4^x$ *e* $f(x) = 2^x$

Gabarito

1. –
2. –
3. a) $S = \{-5\}$
   b) $S = \{9\}$
   c) $S = \left\{\frac{-7}{2}\right\}$
   d) $S = \left\{\frac{10}{21}\right\}$
   e) $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$
   f) $S = \left\{\frac{\sqrt{6}+2}{12}\right\}$
   g) $S = \{-\sqrt{7}\}$
4. a) Conjunto solução está correto
   b) $S = \{3\}$
5. $3 + 5 \times 0{,}5 + 3x + \frac{21}{6} = 10{,}5;$
   $S = \{0{,}5\}\ ou\ S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
6. –
7. a) $S = R - \left\{\frac{-6}{11}\right\}$
   b) $S = \left[-\sqrt{3}, +\infty\right[$
   c) $S = \left]-\infty, \frac{18}{1-\sqrt{2}}\right[$, pois $1 - \sqrt{2} < 0$
8. II – III – I – IV
9. –
10. a) $S = \left]-\infty, \frac{-25}{12}\right[$
    b) $S = \{-2, +2\}$
    c) $S = \{3\}$
11. a) $S = \{-5{,}1\}$
    b) $S = \left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$
    c) $S = \left\{-\sqrt{\frac{6}{5}}, +\sqrt{\frac{6}{5}}\right\}$
    d) $S = \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$
    e) $S = \{\ \}$, pois $x \nexists R$
    f) $S = \{\sqrt{2}\}$
12. -