

## Lista 6: Dinâmica Estocástica e Fokker-Planck

SFI5704 - Mecânica Estatística (1/2025)

Prof. Victor L. Quito

17 de junho de 2025

Em algumas das questões, se preferir usar softwares algébricos (como o Mathematica), pode fazê-lo desde que a solução seja acompanhada do .pdf do código.

(1,\*) Três pessoas, A, B e C, estão em círculo jogando bola (B está à direita de A). Antes de lançar a bola, cada pessoa joga uma moeda para decidir se joga para a pessoa à sua direita ou à sua esquerda. Se “cara” sair, a pessoa joga a bola para sua direita. Se “coroa” sair, a pessoa joga a bola para sua esquerda. A moeda da pessoa A é “justa” (50% caras e 50% coroas), a moeda da pessoa B tem caras nos dois lados, e a moeda da pessoa C é enviesada (75% caras e 25% coroas).

- Calcule a matriz de transição, seus autovalores e seus autovetores à esquerda e à direita.
- Se a bola for lançada em intervalos regulares, aproximadamente qual fração do tempo cada pessoa terá a bola (supondo que a bola seja lançada muitas vezes)?
- Se a pessoa A começar com a bola, qual a chance dela ainda estar com a bola após dois lançamentos? Qual a chance dela estar com a bola após  $s$  lançamentos? Grafique a probabilidade como função de  $s$ .

(2,\*) Um rato treinado vive na casa mostrada na Figura 1. Um sino toca em intervalos regulares (curtos em comparação com o tempo de vida do rato). Cada vez que o sino toca, o rato muda de cômodo. Quando ele muda de cômodo, ele tem a mesma probabilidade de passar por qualquer uma das portas do cômodo onde está. Considere a variável estocástica  $Y$  denotando "rato em um cômodo específico". Há três realizações de  $Y$ : “rato no cômodo A”, “rato no cômodo B” e “rato no cômodo C”, que denotamos como  $y(1)$ ,  $y(2)$  e  $y(3)$ , respectivamente.

- Calcule a matriz de transição,  $Q$ , e a matriz de probabilidade condicional,  $P(s_0|s)$ .

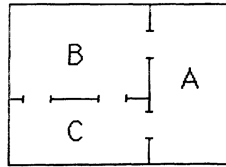


Figura 1: Ratoeira dos problemas 2 e 3.

- (b) Calcule o vetor de probabilidade,  $P(s)$ , no instante  $s$ , dado que o rato começa no cômodo C. Aproximadamente qual fração do tempo ele passa em cada cômodo? Grafique as componentes do vetor probabilidade como função de  $s$ .
- (c) Suponha que a realização,  $y(n)$ , seja igual a  $n$ . Calcule o primeiro momento,  $\langle y(s) \rangle$ , e a função de autocorrelação,  $\langle y(0)y(s) \rangle$ , para as mesmas condições iniciais da parte (b).

3, \* As portas da casa do rato na Figura 1 estão fixadas de modo que periodicamente elas ficam maiores e menores. Isso faz com que a probabilidade de transição do rato entre os cômodos se torne periódica no tempo. Considere que a variável estocástica  $Y$  tem o mesmo significado do problema anterior. As componentes da matriz de transição agora são dadas por:

$$Q_{1,1}(s) = Q_{2,2}(s) = Q_{3,3}(s) = 0, \quad (1)$$

$$Q_{1,2}(s) = \cos^2(\pi s/2), \quad Q_{1,3}(s) = \sin^2(\pi s/2), \quad (2)$$

$$Q_{2,1}(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2(\pi s/2), \quad Q_{2,3}(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos^2(\pi s/2), \quad (3)$$

$$Q_{3,1}(s) = \frac{1}{2} \cos^2(\pi s/2), \quad Q_{3,2}(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2(\pi s/2). \quad (4)$$

- (a) Se inicialmente o rato está no cômodo A, qual é a distribuição de probabilidade de sua localização após  $2s$  transições?
- (b) Se inicialmente o rato está no cômodo B, qual é a probabilidade de encontrá-lo no cômodo A após  $2s$  mudanças de cômodo? No cômodo B?

4, \* No instante  $t$ , uma amostra radioativa contém  $n$  núcleos idênticos não decaídos, cada um com uma probabilidade por unidade de tempo,  $\lambda$ , de decair. A probabilidade de

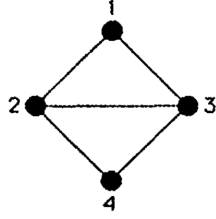


Figura 2: Malha aleatória

um decaimento durante o intervalo de tempo  $t \rightarrow t + \Delta t$  é  $\lambda n \Delta t$ . Suponha que no instante  $t = 0$  há  $n_0$  núcleos não decaídos presentes.

- (a) Escreva e resolva a equação mestra para esse processo e encontre  $P_1(n, t)$ .
- (b) Calcule o número médio de núcleos não decaídos e a variância em função do tempo.
- (c) Qual é o tempo de meia-vida desse processo de decaimento?

(5, \*) Considere uma caminhada aleatória na malha mostrada na Figura 2. As taxas de transição são

$$w_{1,2} = w_{1,3} = \frac{1}{2}, \quad w_{2,1} = w_{2,3} = w_{2,4} = \frac{1}{3}, \quad w_{3,1} = w_{3,2} = w_{3,4} = \frac{1}{3}, \quad (5)$$

$$w_{4,2} = w_{4,3} = \frac{1}{2}, \quad \text{e} \quad w_{4,1} = 0. \quad (6)$$

- (a) Escreva a matriz de transição,  $W$ , e mostre que esse sistema obedece o equilíbrio detalhado.
- (b) Calcule a matriz simétrica,  $V$ , e encontre seus autovalores e autovetores.
- (c) Escreva  $P_1(n, t)$  para o caso  $P_1(n, 0) = \delta_{n,1}$ . Qual é  $P_1(4, t)$ ?

(6,\*) Considere uma caminhada aleatória na malha mostrada na Figura 3. O ponto  $P$  absorve o caminhante. Essa é a versão discreta do problema contínuo de difusão com absorção considerado em aula. As taxas de transição são

$$w_{1,2} = w_{1,3} = \frac{1}{2}, \quad w_{2,1} = w_{2,3} = w_{2,P} = \frac{1}{3}, \quad (7)$$

$$w_{3,1} = w_{3,2} = w_{3,P} = \frac{1}{3}, \quad \text{e} \quad w_{P,1} = w_{P,2} = \frac{1}{2}. \quad (8)$$

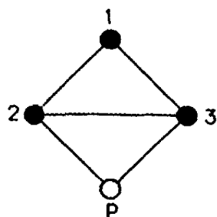


Figura 3: Malha aleatória.

- (a) Escreva a matriz de transição,  $M$ , e calcule seus autovalores e autovetores à esquerda e à direita.
- (b) Se o andarilho começar no ponto  $n = 1$  no instante  $t = 0$ , calcule o tempo médio de primeira passagem.

⑦ Considere um circuito elétrico  $RL$  com resistência  $R$  e indutância  $L$ , conectados em série. Embora não exista uma força eletromotriz (FEM) média através do resistor, devido ao caráter discreto dos elétrons no circuito e ao seu movimento aleatório, existe uma FEM flutuante,  $\xi(t)$ , cuja intensidade é determinada pela temperatura  $T$ . Isso, por sua vez, induz uma corrente flutuante,  $I(t)$ , no circuito. A equação de Langevin para o movimento da corrente é

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = \xi(t), \quad (9)$$

Se a FEM for delta-correlacionada, a média sobre o ruído é

$$\langle \xi(t_2)\xi(t_1) \rangle_\xi = g\delta(t_2 - t_1) \quad \text{e} \quad \langle \xi(t) \rangle_\xi = 0, \quad (10)$$

calcule  $g$  e a função de correlação da corrente,  $\langle \langle I(t_2)I(t_1) \rangle \rangle_\xi$ , onde a média de fora assume que o sistema atinja o equilíbrio térmico. Assuma, então, que a energia magnética média no indutor é

$$\frac{1}{2}L\langle I_0^2 \rangle_T = \frac{1}{2}k_B T \quad \text{e} \quad \langle I_0 \rangle_T = 0, \quad (11)$$

onde  $I(0) = I_0$ .

⑧ Considere uma partícula Browniana de massa  $m$  movendo-se em uma dimensão na presença de uma força constante  $f_0$  (como uma força gravitacional ou elétrica) em um fluido

com constante de força  $\gamma$  e na presença de uma força aleatória delta-correlacionada  $F(t)$  tal que

$$\langle F(t_2)F(t_1) \rangle_F = g\delta(t_2 - t_1) \quad \text{e} \quad \langle F(t) \rangle_F = 0. \quad (12)$$

Assuma que a velocidade e o deslocamento da partícula Browniana no instante  $t = 0$  são  $v_0$  e  $x_0$ , respectivamente.

- (a) Calcule a função de correlação de velocidades  $\langle v(t_2)v(t_1) \rangle_F$ .
- (b) Calcule a variância  $\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle_F$ .

Dica: a conta fica mais simples se identificar  $u = v - f_0/\gamma$ .

9, \* Considere um rotor Browniano com momento de inércia  $I$ , restrito a girar através do ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $z$ . As equações de movimento de Langevin para o rotor são

$$I \frac{d\omega}{dt} = -\Gamma\omega + F(t) \quad (13)$$

e

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad (14)$$

onde  $\omega$  é a velocidade angular do rotor,  $\Gamma$  é o coeficiente de atrito, e  $F(t)$  é um torque de ruído branco Gaussiano. O torque é delta-correlacionado,

$$\langle F(t')F(t) \rangle_F = G\delta(t' - t), \quad (15)$$

onde  $G$  é a intensidade do ruído.

- (a) Para o caso de um coeficiente de atrito grande,  $\Gamma$ , escreva a equação de Fokker–Planck para a densidade de probabilidade  $P(\theta, t)$ , para encontrar o rotor Browniano no intervalo  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  no instante  $t$ .
- (b) Resolva a equação de Fokker–Planck assumindo que no instante  $t = 0$  o rotor está em  $\theta = \theta_0$ .
- (c) Calcule a corrente de probabilidade no instante  $t$ .

10) Uma partícula Browniana de massa  $m$  move-se em uma dimensão na presença de um potencial harmônico

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2, \quad (16)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência natural de oscilação do sistema. As equações de Langevin são dadas por

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -\gamma v(t) - \frac{dV(x)}{dx} + F(t) \quad (17)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{v(t)}{\tau} - \frac{1}{m} \frac{dV(x)}{dx} + A(t) \quad (18)$$

e

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t), \quad (19)$$

onde  $\gamma$  é o coeficiente de atrito, e  $F(t)$  é uma força de ruído branco Gaussiano. O ruído é delta-correlacionado,

$$\langle A(t')A(t) \rangle_\xi = g\delta(t' - t), \quad (20)$$

onde  $g$  é a intensidade do ruído e  $A(t) = F(t)/m$ .

- (a) Escreva a equação de Fokker-Planck para a densidade de probabilidade  $P(x, t)$ , no limite de um coeficiente de atrito grande.
- (b) Resolva a equação de Fokker-Planck e escreva a solução  $P(x, t)$  para tempos arbitrários. Assuma que no instante  $t = 0$ , a partícula Browniana está em  $x = x_0$ .
- (c) Escreva uma expressão aproximada para  $P(x, t)$  para tempos muito longos.

11, \* Considere a equação de Fokker-Planck para a distribuição  $P(v, t)$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = b \frac{\partial}{\partial v} (vP) + b \frac{k_B T}{m} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}, \quad (21)$$

onde  $b$  é a constante de arrasto,  $m$  é a massa da partícula,  $T$  é a temperatura e  $k_B$  é a constante de Boltzmann. A meta desse exercício é encontrar uma solução dessa equação.

- (a) Procuremos uma solução da forma

$$P(v, t) = e^{bt} Q(u, t), \quad (22)$$

sendo  $u = ve^{bt}$ . Mostre  $Q(u, t)$  satisfaz a equação

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(u, t) = Ae^{2bt} \frac{\partial^2 Q}{\partial u^2}(u, t), \quad (23)$$

com  $A$  constante. Qual a expressão para  $A$  em termos das constantes da equação (21)?

(b) Introduzindo a variável  $\theta = \frac{1}{2b} (e^{2bt} - 1)$ , mostre que (23) torna-se

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta}(u, \theta) = C \frac{\partial^2 Q}{\partial u^2}(u, \theta). \quad (24)$$

Determine a constante  $C$ . Essa é a equação da difusão unidimensional explorada em aula e cuja solução é

$$Q(u, \theta) = \frac{1}{(4\pi C\theta)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(u - u_0)^2}{4C\theta}\right]. \quad (25)$$

(c) Dos resultados anteriores e da condição  $v(0) = v_0$ , escreva a solução  $P(v, t)$ . Mostre que a tempos longos ( $t \gg 1/b$ ),  $P(v, t)$  independe de  $t$ , adquirindo uma forma estacionária. Escreva a solução estacionária  $P^S(v)$ , onde o super-índice  $S$  quer dizer “stationary”. Qual a dependência da solução estacionária com a constante de arrasto  $b$ ?