

Aula 17: Física Quântica

Bárbara Amaral
Instituto de Física da USP

Os postulados da Física Quântica

Bibliografia

- ► B. Amaral, A. Baraviera, M. Terra Cunha. Mecânica Quântica pra Matemáticos em Formação. Caps. 6 e 7. *lit quântico*
dimensão finita
- Nielsen e Chuang. Quantum Information and Quantum Computation. Cap. 2 até 2.2.5.

Postulado 1

Todo sistema quântico está associado a um espaço vetorial $\mathcal{H}$ chamado seu **espaço de estados**.

↳ Espaço de Hilbert

Postulado 1

vetor de norma 1
 $\langle \psi | \psi \rangle = 1$

O **estado** do sistema é um vetor normalizado em seu espaço de estados.

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}^d$$

O bit quântico

$$|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$$

O bit quântico

$$|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Dimensão finita

Base canônica: $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |d-1\rangle$

$$|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$$
$$|\psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle + \dots + \alpha_{d-1} |d-1\rangle$$

Dimensão finita

$$|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

$$|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_{d-1}|^2 = 1$$


Significado do vetor de estado

Significado do vetor de estado

- ▶ A discussão em torno do significado do vetor de estado na física quântica é um dos debates mais fundamentais e persistentes na física.

Significado do vetor de estado

- ▶ Em sua essência, o vetor de estado é uma entidade matemática que descreve o estado quântico de um sistema.

Significado do vetor de estado

Aqui vamos adotar
essa posição

- ▶ Em sua essência, o vetor de estado é uma entidade matemática que descreve o estado quântico de um sistema.
- ▶ Esse vetor nos fornece informações probabilísticas sobre grandezas físicas do sistema.

Significado do vetor de estado

Significado do vetor de estado

- ▶ No entanto, a controvérsia reside no que o vetor de estado *realmente representa* e qual a sua natureza.

Natureza do vetor de estado

Natureza do vetor de estado

A principal questão é se o vetor de estado é:

Natureza do vetor de estado

A principal questão é se o vetor de estado é:

- ▶ **Uma descrição objetiva da realidade física:** o vetor de estado é uma representação real e completa do estado de uma partícula ou sistema quântico.

Natureza do vetor de estado

A principal questão é se o vetor de estado é:

Natureza do vetor de estado

Usaremos
essa posição



A principal questão é se o vetor de estado é:

- ▶ **Uma representação do nosso conhecimento ou informação:** O vetor de estado descreve nosso conhecimento sobre suas propriedades.

Natureza do vetor de estado

A principal questão é se o vetor de estado é:

Natureza do vetor de estado

A principal questão é se o vetor de estado é:

- ▶ **Algo totalmente diferente:** Outras interpretações propõem significados distintos, afastando-se da ideia de ser puramente objetiva ou puramente epistêmica (relacionada ao conhecimento).

Postulado 2

$|v_i\rangle$ tem valor bem
definido para
aquela medição

Uma medição ou teste em um sistema quântico é dada por
uma base ortonormal de $\mathcal{H}$:

$\{|v_1\rangle, \dots, |v_d\rangle\}$
 são os vetores que a medição
distingue

Exemplos

Polarização :



Teste Z

Distingue entre $|H\rangle$ e $|V\rangle$

Teste Z : associado à base

→ $\{|H\rangle, |V\rangle\}$



Teste X

Distingue entre $|+\rangle$ e $|-\rangle$

Teste X : associado à base

→ $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

spin $\frac{1}{2}$



Na direção Z : Distingue entre $|↑\rangle$ e $|↓\rangle$

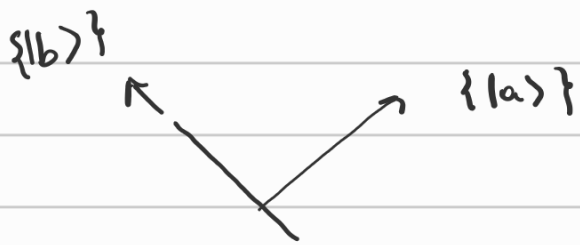
Postulado 2

Uma medição em um sistema quântico é dada por uma decomposição de $\mathcal{H}$ em termos de subespaços ortogonais E_j .

Tomamos E_j como o subespaço gerado pelo vetor $|v_j\rangle$.

Em $\mathbb{R}^2$

$\{|a\rangle, |b\rangle\}$ base orthonormal

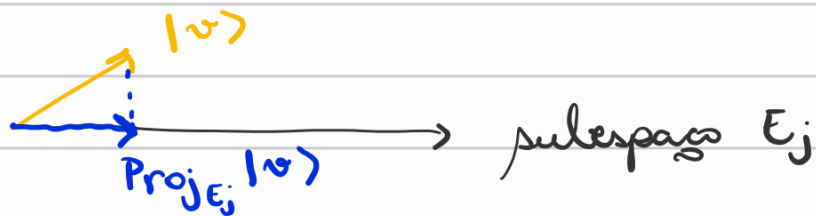


Postulado 2

Uma medição em um sistema quântico é dada por uma partição da identidade em termos de projetores

$$\sum_j P_j = I.$$

P_j é o projetor sobre o subespaço E_j .



Projeção de $|v\rangle$ sobre E_j

Definimos um operador P_j que leva

$|v\rangle$ a $\text{Proj}_{E_j} |v\rangle$

$$|v\rangle \xrightarrow{P_j} \text{Proj}_{E_j} |v\rangle$$

Afirmações:

↗ vetores de norma 1

1) $P_j = |v_j\rangle\langle v_j|$

2) se $\{|v_1\rangle, \dots, |v_d\rangle\}$ é uma base ortogonal então

$$\sum_j P_j = I$$

Postulado 2

Uma medição em um sistema quântico é dada por um operador hermitiano A .

$$A = \sum_j \underline{a_j} P_j.$$

$a_j \in \mathbb{R}$

P_j são os projetores

$|v_j\rangle$ possui valor bem definido para
essa grandeza e esse valor é
igual a a_j

“Colapso” do vetor de estado

Estado inicial $\longrightarrow$

$$|\psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$$

Estado pós medição

$$|H\rangle$$

ou

$$|V\rangle$$

“Colapso” do vetor de estado

- ▶ O ato de medir faz com que o vetor de estado “colapse” de uma superposição de possibilidades para um estado definido, correspondente ao resultado medido.

“Colapso” do vetor de estado

- ▶ O ato de medir faz com que o vetor de estado “colapse” de uma superposição de possibilidades para um estado definido, correspondente ao resultado medido.
- ▶ A natureza desse “colapso” é um ponto central de debate se é um processo físico real ou uma atualização de conhecimento.

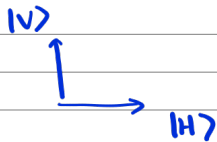
- ▶ **Visão subjetiva/epistêmica:** Argumenta que o vetor de estado não é uma propriedade do sistema quântico em si, mas representa os graus de crença ou conhecimento que um agente (observador) tem sobre os resultados de futuras medições nesse sistema.

- ▶ **Visão subjetiva/epistêmica:** Argumenta que o vetor de estado não é uma propriedade do sistema quântico em si, mas representa os graus de crença ou conhecimento que um agente (observador) tem sobre os resultados de futuras medições nesse sistema.
- ▶ **Colapso como atualização de crença:** O “colapso” é simplesmente o agente atualizando suas crenças com base em um novo resultado de medição.

Exemplos

1) Polarização: teste Z

$$\{|H\rangle, |V\rangle\}$$



$$|H\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |V\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E_1 : reta $y=0$

E_2 : reta $x=0$

$$P_1 = \underbrace{|H\rangle}\langle H| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = |V\rangle\langle V| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 + P_2 = I$$

Dizermos que a resposta associada a $|H\rangle$ é 1
e que a resposta associada a $|V\rangle$ é -1

$$a_1 = 1 \quad \text{e} \quad a_2 = -1$$

O operador associado a essa medição é

$$A = a_1 P_1 + a_2 P_2$$

$$= 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Liste 2:

$$\{|H\rangle, |V\rangle\}$$

$$\{E_1, E_2\}$$

$$\{P_1, P_2\}$$

Äquivalenter

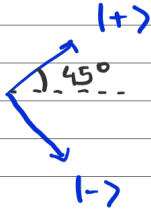
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 1 \text{ und } a_2 = -1$$

2) Teste x

$\{ |+\rangle, |-\rangle \}$ ^{base}

$$|+\rangle = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, |-\rangle = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



$$\left. \begin{array}{l} F_1: \text{reta } x=y \\ F_2: \text{reta } x=-y \end{array} \right\} \text{subespaço}$$

$$S_1 = |+\rangle\langle+| = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}} \right\} \text{projetores}$$

$$S_2 = |-\rangle\langle-| = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$P_1 + P_2 = I$$

Associamos a resposta 1 a $|+\rangle$ e
-1 a $|-\rangle$

$$B = 1 \times |+\rangle\langle +| + (-1) \times |-\rangle\langle -|$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Teste x :

$\left. \begin{array}{l} \{ |+\rangle, |-\rangle \} \\ \{ F_1, F_2 \} \\ \{ S_1, S_2 \} \end{array} \right\}$

Equivalentes

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 1 \quad \text{e} \quad a_2 = -1$$

3) Matrizes associadas à partícula de spin $1/2$

Teste Z: $A = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Teste X: $B = \hbar \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

se salemos quem é a matriz A
como descobrimos os " a_i " e os " i_i "

Afirmção: Os vetores da base $|i_j\rangle$ são autovetores de A com autovalor a_j .

Precisamos diagonalizar (A) . Matriz Hermitiana
 $a_j \in \mathbb{R}$
 $A = A^\dagger$

Postulado 2

Física Quântica é
intrinsecamente
probabilística

Se a medição associada aos projetores P_j é aplicada a um sistema no estado $|\psi\rangle$, a probabilidade de obtermos a resposta j é

$$p(j) = \langle \psi | P_j | \psi \rangle. \quad \leftarrow \text{Probabilidade}$$

Postulado 2

Se a resposta j foi obtida, o estado do sistema após a medição é

$$|\psi_j\rangle = \frac{P_j |\psi\rangle}{\|P_j |\psi\rangle\|}.$$

Diagrama de anotações:

- Uma seta amarela aponta do termo P_j para a palavra "medição" escrita em amarelo.
- Uma seta azul aponta do termo $|\psi\rangle$ para a palavra "estado" escrita em azul.
- Uma seta amarela aponta da expressão inteira para a frase "Estado pós medição" escrita em amarelo.

Exemplos

Polarização:

medidas

Teste Z:

$$\{|H\rangle, |V\rangle\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vetor de estado

$$|\psi\rangle = \alpha |H\rangle + \beta |V\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$P(H) = \langle \psi | P_1 | \psi \rangle = [\bar{\alpha} \quad \bar{\beta}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Probabilidades

$$[\bar{\alpha} \quad \bar{\beta}] \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{\alpha} \alpha = |\alpha|^2$$

$$P(V) = \langle \psi | P_2 | \psi \rangle = [\bar{\alpha} \quad \bar{\beta}] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = [\bar{\alpha} \quad \bar{\beta}] \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \bar{\beta} \beta = |\beta|^2$$

$$P(H) = |\alpha|^2$$

$$P(V) = |\beta|^2$$

Estado pós medição:

se a resposta (H) foi obtida

$$|\psi_f\rangle = \frac{P_1 |\psi\rangle}{\|P_1 |\psi\rangle\|}$$

$$P_1 |\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|\alpha|} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{|\alpha|} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |H\rangle \quad \|P_1 |\psi\rangle\| = |\alpha|$$

se a resposta V foi obtida

$$|\psi_f\rangle = \frac{P_2 |\psi\rangle}{\|P_2 |\psi\rangle\|}$$

$$P_2 |\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

se a resposta ν foi obtida

$$|\psi_f\rangle = \frac{P_2 |\psi\rangle}{\|P_2 |\psi\rangle\|}$$

$$P_2 |\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\|P_2 |\psi\rangle\| = |\beta|$$

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{|\beta|} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{\beta}{|\beta|} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \nu$$







Evolução temporal do vetor de estado

Postulado 3

O vetor de estado deve satisfazer uma equação chamada **equação de Schrödinger**:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \underbrace{H}_{\text{operador matriz}} |\Psi(t)\rangle.$$

hamiltoniano
associada à
energia

H é um operador associado à energia do sistema, chamado **operador Hamiltoniano**.

Para encontrar o vetor de estado que descreve um sistema, temos que resolver a equação de Schrödinger e encontrar a solução que satisfaz as condições iniciais adequadas.

Como encontrar a evolução temporal do vetor de estado?

$$|\Psi(t)\rangle ?$$

- Determinar H ; e as condições iniciais

- ▶ Determinar H ;
- ▶ Resolver a equação de Schrödinger;

- ▶ Determinar H ;
- ▶ Resolver a equação de Schrödinger;
- ▶ Encontrar a solução que satisfaz as condições iniciais adequadas.



$$|\Psi(t)\rangle$$

Resolvendo a equação de Schrödinger

Vamos resolver a equação de Schrödinger para o caso em que H não depende de t .

Método de separação de variáveis

Procuramos inicialmente soluções da forma:

$$|\Psi(t)\rangle = T(t)|\psi\rangle.$$

Resolvendo a equação de Schrödinger

* suposição: H não depende do tempo

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle \quad (1)$$

Método de separação de variáveis

PARTI 1: vamos procurar soluções da forma:

$$|\Psi(t)\rangle = \underbrace{T(t)}_{\text{escalar}} \underbrace{|\Psi\rangle}_{\text{vetor constante em relação a } t} \quad (2) \rightarrow \text{super especial}$$

Vamos substituir (2) em (1)

$$i\hbar \frac{d}{dt} \left[\underbrace{T(t)}_{\substack{\text{constante} \\ \text{em relação} \\ \text{a } t}} \underbrace{|\Psi\rangle}_{\text{escalar}} \right] = H \left[\underbrace{T(t)}_{\substack{\text{escalar} \\ \in \mathbb{C}}} |\Psi\rangle \right]$$

$$i\hbar \left[\frac{d}{dt} T(t) \right] |\psi\rangle = T(t) H |\psi\rangle$$

H não depende de t

E

$$\underbrace{\frac{i\hbar}{T(t)} \left[\frac{d}{dt} T(t) \right]}_{\text{não pode depender de } t!!!} \underbrace{|\psi\rangle}_{\text{não depende de } t} = \underbrace{H |\psi\rangle}_{\text{não depende de } t}$$

→ Equação diferencial apenas para a parte temporal

$$\left(\frac{i\hbar}{T(t)} \right) \left[\frac{d}{dt} T(t) \right] = E \quad \text{é uma constante!!!}$$

Trivial
É a mesma p/ todos os sistemas

→ $H |\psi\rangle = E |\psi\rangle$

Equação apenas para a parte retorial

← DIFÍCIL de resolver

Vamos resolver a parte temporal

$$\left(\frac{i\hbar}{T(t)} \right) \left[\frac{d}{dt} T(t) \right] = E$$

$$\frac{d}{dt} T(t) = \frac{E}{i\hbar} T(t)$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$\frac{d}{dt} T(t) = -\frac{iE}{\hbar} T(t)$$

constante

$$\Rightarrow T(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

i sempre
igual

Método de separação de variáveis

Com essa suposição temos:

$$|\Psi(t)\rangle = \underbrace{e^{\frac{-iEt}{\hbar}}}_{T(t)} |\psi\rangle. \quad ???$$

$|\psi\rangle$ é solução da **equação de Schrödinger independente do tempo**:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad \leftarrow$$

$|\psi\rangle$ é autovetor de H com autovvalor E

Estados estacionários

$$|\Psi(t)|^2 = |\psi|$$

não depende do tempo.

Em geral o estado do sistema é uma **superposição** dos estados estacionários.