

Aula 16: Física Quântica

Bárbara Amaral
Instituto de Física da USP

Os postulados da Física Quântica

Bibliografia

- ▶ B. Amaral, A. Baraviera, M. Terra Cunha. Mecânica Quântica pra Matemáticos em Formação. Caps. 6 e 7.
- ▶ Nielsen e Chuang. Quantum Information and Quantum Computation. Cap. 2 até 2.2.5.

Álgebra Linear

Números Complexos

Um *número complexo* é uma expressão do tipo:

$$z = \underbrace{x}_{\text{parte real}} + \underbrace{i y}_{\text{parte imaginária}}$$

$x, y \in \mathbb{R}$

i unidade imaginária
 $i^2 = -1$

$$i^2 = -1.$$

A *soma* de dois números complexos

$$z_1 = x_1 + iy_1 \text{ e } z_2 = x_2 + iy_2$$

é dada por

A *soma* de dois números complexos

$$z_1 = x_1 + iy_1 \text{ e } z_2 = x_2 + iy_2$$

é dada por

$$z_1 + z_2 = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{parte real}} + i \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\text{parte imaginária}}.$$

O *produto* de z_1 e z_2 é dado por

$$(x_1 + i\gamma_1) \cdot (x_2 + i\gamma_2) = x_1x_2 + i x_1\gamma_2 + i x_2\gamma_1 + \underbrace{i^2}_{-1} \gamma_1\gamma_2$$

$$= (x_1x_2 - \gamma_1\gamma_2) + i (x_1\gamma_2 + x_2\gamma_1)$$

O *produto* de z_1 e z_2 é dado por

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 =$$

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

O *conjugado* de um número complexo $z = x + iy$ é o número complexo

O *conjugado* de um número complexo $z = x + iy$ é o número complexo

$$\bar{z} = x - iy.$$

$$z^* = x - iy$$

A *norma* de z é definida por

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

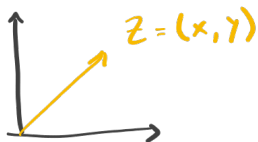
$$z \times \bar{z} = (x + iy) \times (x - iy) = (x^2 + \cancel{i \times y} - \cancel{i \times y} - \textcircled{i^2} y^2)$$
$$(x^2 + y^2)$$

Imaginária



A *norma* de z é definida por

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



norma de z é o
tamanho do vetor

O Espaço $\mathbb{C}^2$



$$\sim \approx \mathbb{R}^4$$

Representamos por $\mathbb{C}^2$ o conjunto de todas as *duplas de números complexos*

$$|u\rangle = (\underline{z}, \underline{w}), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

↳ Ket
vector

$$\hookrightarrow (x, y, s, t) \leftarrow$$

Notação de
Dirac

$\vec{u}$

$$z = x + iy$$

$$w = s + it$$

$$x, y, s, t \in \mathbb{R}$$

Dados

$$|u\rangle = (z_1, w_1) \text{ e } |v\rangle = (z_2, w_2)$$

em $\mathbb{C}^2$, definimos a *soma*

Dados

$$|u\rangle = (z_1, w_1) \text{ e } |v\rangle = (z_2, w_2)$$

em $\mathbb{C}^2$, definimos a *soma*

$$|u\rangle + |v\rangle = (z_1 + z_2, w_1 + w_2).$$

Dado $|u\rangle = (z_1, w_1)$, definimos o *produto* de $|u\rangle$ por um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$

Dado $|u\rangle = (z_1, w_1)$, definimos o *produto* de $|u\rangle$ por um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lambda|u\rangle = (\lambda z_1, \lambda w_1).$$

Dizemos que $|v\rangle$ é uma *combinação linear* de $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ se existem constantes $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tais que

Dizemos que $|v\rangle$ é uma *combinação linear* de $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ se existem constantes $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tais que

$$|v\rangle = a_1|u_1\rangle + a_2|u_2\rangle.$$


$$|v\rangle = a_1|u_1\rangle + a_2|u_2\rangle + \dots + a_n|u_n\rangle$$

Bases de $\mathbb{C}^2$

Uma *base* para $\mathbb{C}^2$ é um conjunto com o número mínimo de vetores necessários para gerar todos os outros vetores de $\mathbb{C}^2$ através de combinações lineares.

Toda base de $\mathbb{C}^2$ é um conjunto com dois vetores em que um não é múltiplo do outro.

São vetores linearmente independentes.

produto escalar

O *produto interno* entre os vetores

$$|u\rangle = (z_1, w_1) \text{ e } |v\rangle = (z_2, w_2)$$

é definido por

$$\langle u|v\rangle = \bar{z}_1 z_2 + \bar{w}_1 w_2.$$

Atenção: o produto interno não é
mais comutativo
 $\langle u|v\rangle \neq \langle v|u\rangle$

Notação de Dirac:

$|u\rangle$ vetor em $\mathbb{C}^2$
Ket

vetor
coluna
 $|u\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ w_1 \end{bmatrix}$

$\langle u| = [\bar{z}_1 \quad \bar{w}_1]$
Bra

transposta
conjugada
vetor linha
com entradas
iguais às conju-
gadas das entradas
de $|u\rangle$

Transposta conjugada[†]: trocar linhas por
colunas e aplicar o
conjugado em todas as
entradas

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 2i & 3i \\ 4 & i \end{bmatrix}$$

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 - 2i & 4 \\ -3i & -i \end{bmatrix}$$

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

$$\langle u| = (|u\rangle)^\dagger = [\bar{z}_1 \quad \bar{w}_1]$$

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

$$|v\rangle = \begin{bmatrix} z_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$\langle u| = [\bar{z}_1 \quad \bar{w}_1]$$


$$\langle u|v\rangle = [\bar{z}_1 \quad \bar{w}_1] \begin{bmatrix} z_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

BRACKET

$$= \bar{z}_1 z_2 + \bar{w}_1 w_2$$

Dizemos que dois vetores $|u\rangle$ e $|v\rangle$ são *ortogonais* se

$$\langle u|v\rangle = 0.$$

Dizemos que um conjunto

$$E = \{ |v_1\rangle, |v_2\rangle \}$$

é *ortogonal* se $|v_1\rangle$ e $|v_2\rangle$ são ortogonais.

A partir do produto interno podemos definir a *norma* de um vetor:

A partir do produto interno podemos definir a *norma* de um vetor:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}.$$

Dizemos que um conjunto

$$E = \{ |v_1\rangle, |v_2\rangle \}$$

é *ortonormal* se é ortogonal e

$$\langle v_j | v_j \rangle = 1$$

para todo j .

Uma base ortonormal para $\mathbb{C}^2$ é um conjunto com dois vetores ortogonais e de norma igual a 1.

Exemplo

$$0 = (0, 0)$$

→ Não é o zero
do espaço
vetorial

$$|0\rangle = (1, 0)$$

$$|1\rangle = (0, 1)$$

Exemplo

$$|+\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$|-\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Exemplo

$$|\underline{\odot}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}} \right)$$

$$|\underline{\odot}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}} \right)$$

O Espaço $\mathbb{C}^d$

Representamos por $\mathbb{C}^d$ o conjunto de todas as *d -uplas de números complexos*

$$|u\rangle = (z_1, z_2, \dots, z_d), \quad z_j \in \mathbb{C}.$$

Postulado 1

Todo sistema quântico está associado a um espaço vetorial $\mathcal{H}$ chamado seu **espaço de estados**.

Postulado 1

O **estado** do sistema é um vetor normalizado em seu espaço de estados.

com norma igual a 1

O bit quântico

$$|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$$

O bit quântico

$$|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Dimensão finita

$$|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$$

Dimensão finita

$$|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

Significado do vetor de estado

Significado do vetor de estado

- ▶ A discussão em torno do significado do vetor de estado na física quântica é um dos debates mais fundamentais e persistentes na física.

Significado do vetor de estado

- ▶ Em sua essência, o vetor de estado é uma entidade matemática que descreve o estado quântico de um sistema.

Significado do vetor de estado

- ▶ Em sua essência, o vetor de estado é uma entidade matemática que descreve o estado quântico de um sistema.
- ▶ Esse vetor nos fornece informações probabilísticas sobre grandezas físicas do sistema.

Significado do vetor de estado

Significado do vetor de estado

- ▶ No entanto, a controvérsia reside no que o vetor de estado *realmente representa* e qual a sua natureza.

Natureza do vetor de estado

Natureza do vetor de estado

A principal questão é se a função de onda é:

Natureza do vetor de estado

A principal questão é se a função de onda é:

- ▶ **Uma descrição objetiva da realidade física:** o vetor de estado é uma representação real e completa do estado de uma partícula ou sistema quântico.

Natureza do vetor de estado

A principal questão é se a função de onda é:

Natureza do vetor de estado

A principal questão é se a função de onda é:

- ▶ **Uma representação do nosso conhecimento ou informação:** O vetor de estado descreve nosso conhecimento sobre suas propriedades.

Natureza do vetor de estado

A principal questão é se a função de onda é:

Natureza do vetor de estado

A principal questão é se a função de onda é:

- ▶ **Algo totalmente diferente:** Outras interpretações propõem significados distintos, afastando-se da ideia de ser puramente objetiva ou puramente epistêmica (relacionada ao conhecimento).

Postulado 2

Uma medição ou teste em um sistema quântico é dada por uma base ortonormal de $\mathcal{H}$:

$$\{ |v_1\rangle, \dots, |v_d\rangle \}$$

Postulado 2

Uma medição em um sistema quântico é dada por uma decomposição de $\mathcal{H}$ em termos de subespaços ortogonais E_j .

Postulado 2

Uma medição em um sistema quântico é dada por uma partição da identidade em termos de projetores

$$\sum_j P_j = I.$$

Postulado 2

Uma medição em um sistema quântico é dada por um operador hermitiano A .

$$A = \sum_j a_j P_j.$$

“Colapso” do vetor de estado

“Colapso” do vetor de estado

- ▶ O ato de medir faz com que o vetor de estado “colapse” de uma superposição de possibilidades para um estado definido, correspondente ao resultado medido.

“Colapso” do vetor de estado

- ▶ O ato de medir faz com que o vetor de estado “colapse” de uma superposição de possibilidades para um estado definido, correspondente ao resultado medido.
- ▶ A natureza desse “colapso” é um ponto central de debate se é um processo físico real ou uma atualização de conhecimento.

- ▶ **Visão subjetiva/epistêmica:** Argumenta que o vetor de estado não é uma propriedade do sistema quântico em si, mas representa os graus de crença ou conhecimento que um agente (observador) tem sobre os resultados de futuras medições nesse sistema.

- ▶ **Visão subjetiva/epistêmica:** Argumenta que o vetor de estado não é uma propriedade do sistema quântico em si, mas representa os graus de crença ou conhecimento que um agente (observador) tem sobre os resultados de futuras medições nesse sistema.
- ▶ **Colapso como atualização de crença:** O “colapso” é simplesmente o agente atualizando suas crenças com base em um novo resultado de medição.

Exemplos











Postulado 2

Se a medição associada aos projetores P_j é aplicada a um sistema no estado $|\psi\rangle$, a probabilidade de obtermos a resposta j é

$$p(j) = \langle \psi | P_j | \psi \rangle.$$

Postulado 2

Se a resposta j foi obtida, o estado do sistema após a medição é

$$|\psi_j\rangle = \frac{P_j|\psi\rangle}{\|P_j|\psi\rangle\|}.$$

Exemplos











