

Aproximação da Binomial pela Normal

Ciências Contábeis - FEA - Noturno

1º Semestre 2025

Profs. Leonardo T. Rolla e Nikolai Kolev

(baseado em material previamente desenvolvido
pelo Prof. Gilberto Alvarenga Paula – CC BY-SA 4.0)

- 1 Informações sobre esta unidade
- 2 Distribuição Binomial
- 3 Histogramas Distribuição Binomial
- 4 Aproximação pela Normal
- 5 Exemplos
- 6 Exercícios

- 1 Informações sobre esta unidade
- 2 Distribuição Binomial
- 3 Histogramas Distribuição Binomial
- 4 Aproximação pela Normal
- 5 Exemplos
- 6 Exercícios

Compreender a distribuição binomial, suas propriedades e representação gráfica, além de utilizar a aproximação pela distribuição normal para facilitar o cálculo de probabilidades em experimentos binomiais com grande número de ensaios.

- 1 Definição da distribuição binomial e suas aplicações
- 2 Parâmetros da distribuição binomial: n e p
- 3 Histograma da distribuição binomial e interpretação
- 4 Comportamento da distribuição binomial com diferentes valores de n e p
- 5 Aproximação da distribuição binomial pela normal
- 6 Correção de continuidade e condições para a aproximação

Depois desta unidade, o aluno será capaz de:

- 1 Reconhecer situações modeladas pela distribuição binomial.
- 2 Calcular probabilidades usando a fórmula da distribuição binomial.
- 3 Construir e interpretar histogramas de distribuições binomiais.
- 4 Aplicar a distribuição normal como aproximação da binomial.
- 5 Utilizar a correção de continuidade e identificar quando a aproximação é apropriada.

O aluno pode fazer os exercícios postados no Moodle e posteriormente comparar suas respostas com as soluções apresentadas, identificando possíveis erros, e eventualmente refazer os exercícios.

Além disso, é recomendável refletir sobre as dificuldades encontradas e revisar os conceitos conforme necessário.

- 1 Informações sobre esta unidade
- 2 Distribuição Binomial**
- 3 Histogramas Distribuição Binomial
- 4 Aproximação pela Normal
- 5 Exemplos
- 6 Exercícios

Definição

A variável aleatória X correspondente ao número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes e com mesma probabilidade p de sucesso, tem distribuição binomial com parâmetros n e p .

Função de probabilidade

A função de probabilidades de X fica dada por

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)},$$

em que $x = 0, 1, \dots, n$. Denotamos $X \sim B(n, p)$.

Esperança

Se $X \sim \mathbf{B}(n, p)$ podemos escrever $X = X_1 + \cdots + X_n$, em que $X_i \sim \mathbf{Be}(p)$ para $i = 1, \dots, n$. Assim, obtemos

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X_1) + \cdots + \mathbf{E}(X_n) = np.$$

Variância

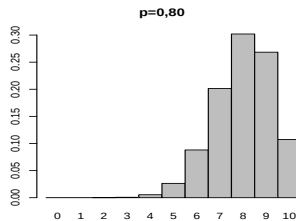
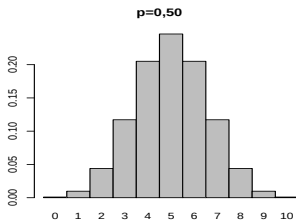
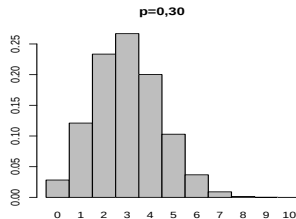
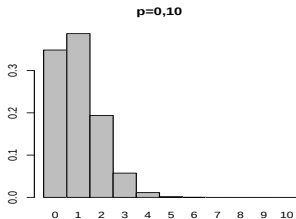
Similarmente como temos n ensaios independentes, então

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{Var}(X_1) + \cdots + \mathbf{Var}(X_n) = np(1 - p).$$

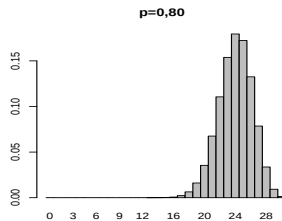
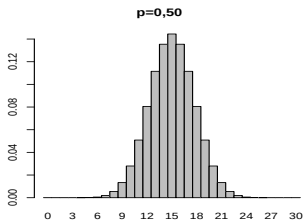
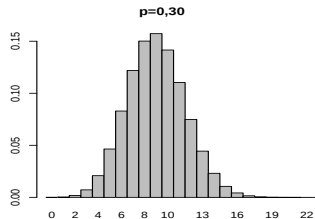
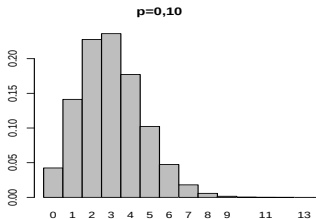
E daí segue que $\mathbf{DP}(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

- 1 Informações sobre esta unidade
- 2 Distribuição Binomial
- 3 Histogramas Distribuição Binomial**
- 4 Aproximação pela Normal
- 5 Exemplos
- 6 Exercícios

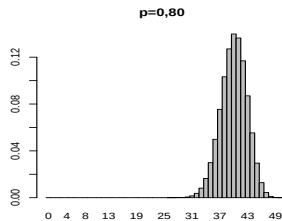
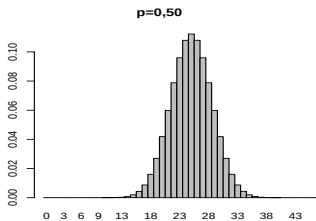
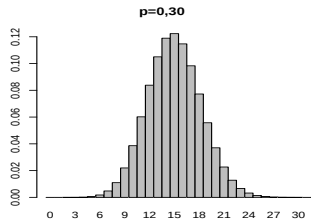
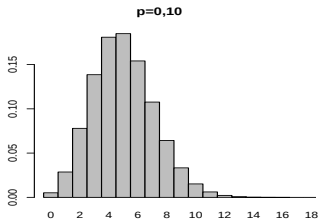
Histogramas $B(n,p)$ para $n = 10$



Histogramas $B(n,p)$ para $n = 30$

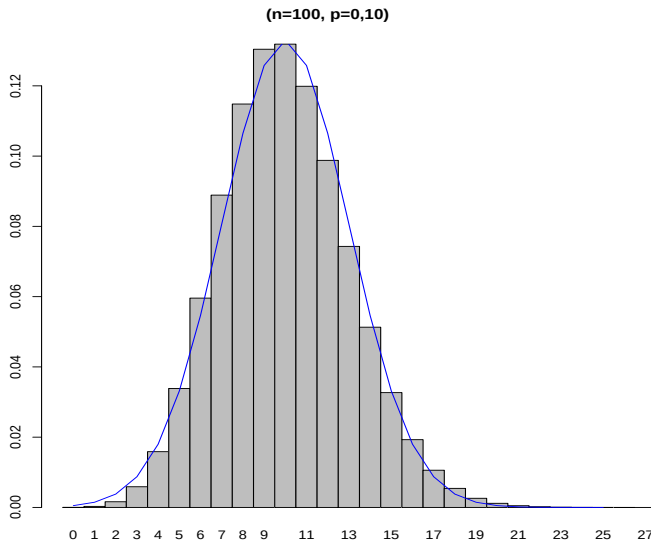


Histogramas $B(n,p)$ para $n = 50$

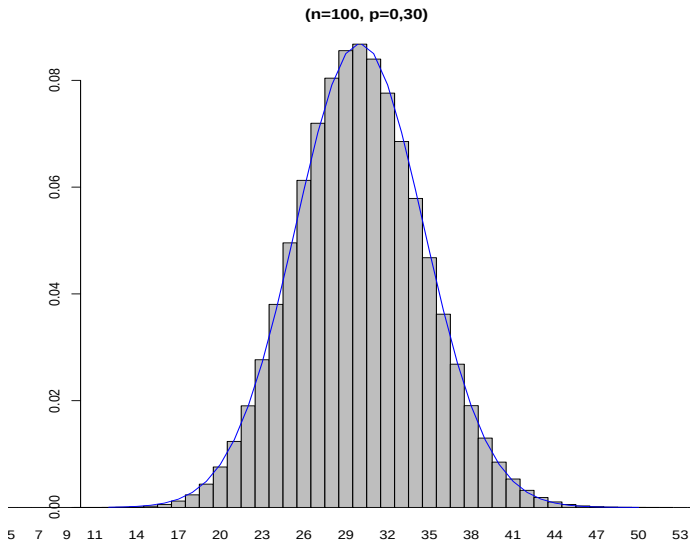


- 1 Informações sobre esta unidade
- 2 Distribuição Binomial
- 3 Histogramas Distribuição Binomial
- 4 Aproximação pela Normal**
- 5 Exemplos
- 6 Exercícios

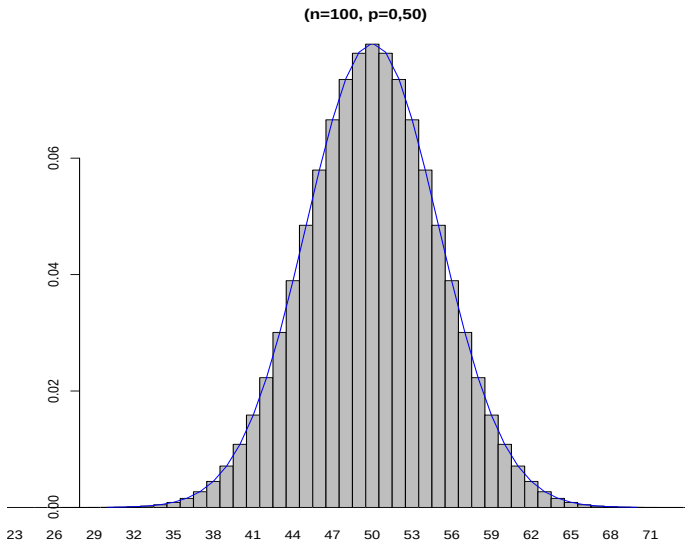
Aproximação da $B(n,p)$ pela $N(np, np(1-p))$



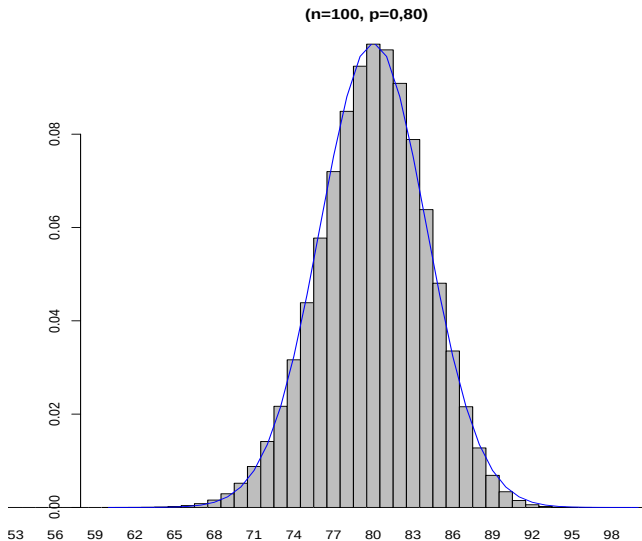
Aproximação da $B(n,p)$ pela $N(np, np(1-p))$



Aproximação da $B(n,p)$ pela $N(np, np(1-p))$



Aproximação da $B(n,p)$ pela $N(np, np(1-p))$



Cálculo da Probabilidade

Se $np(1 - p)$ é grande, então

$$P(a \leq X \leq b) \approx P(a \leq Y \leq b)$$

em que $X \sim B(n, p)$, $Y \sim N(np, np(1 - p))$.

Correção de Continuidade

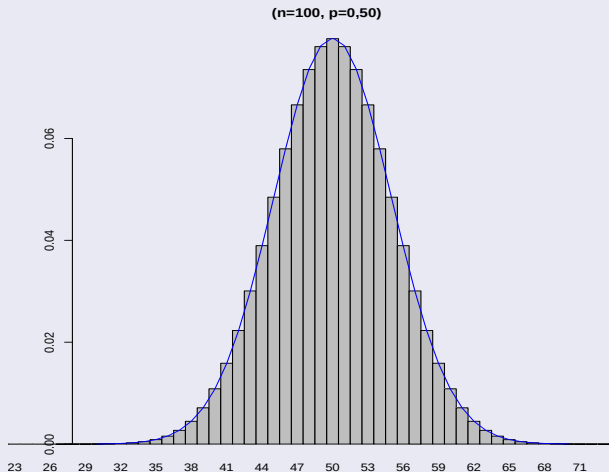
A **correção de continuidade** é um procedimento aplicado para melhorar a aproximação de distribuições discretas através de distribuições contínuas.

Na aproximação da distribuição binomial pela normal, temos o seguinte:

$$P(a \leq X \leq b) \approx P(a - 0,5 \leq Y \leq b + 0,5)$$

em que $X \sim B(n, p)$, $Y \sim N(np, np(1 - p))$.

Aproximação da $B(n,p)$ pela $N(np, np(1-p))$



- 1 Informações sobre esta unidade
- 2 Distribuição Binomial
- 3 Histogramas Distribuição Binomial
- 4 Aproximação pela Normal
- 5 Exemplos**
- 6 Exercícios

Exemplo 1

Supor $X \sim B(225; 0,2)$. Então,

- $E(X) = np = 225 \times 0,2 = 45$
- $\text{Var}(X) = np(1 - p) = 225 \times 0,2 \times 0,8 = 36$
- $DP(X) = \sqrt{36} = 6$

Assim, a distribuição de X pode ser aproximada por $Y \sim N(45, 6^2)$.

Exemplo 1

Cálculo da Probabilidade

$$\begin{aligned}P(39 \leq X \leq 48) &\approx P(38,5 \leq Y \leq 48,5) \\&= P\left(\frac{38,5 - 45}{6} \leq Z \leq \frac{48,5 - 45}{6}\right) \\&= P(-1,08 \leq Z \leq 0,58) \\&= P(Z \leq 0,58) - P(Z \leq -1,08) \\&= P(Z \leq 0,58) - [1 - P(Z \leq 1,08)] \\&= A(0,58) - [1 - A(1,08)] \\&= 0,7190 - 0,1401 \\&= 0,5789.\end{aligned}$$

Usando a tabela binomial obtém-se $P(39 \leq X \leq 48) = 0,5853$.

Sem correção de continuidade (ilustrativo)

$$\begin{aligned}P(39 \leq X \leq 48) &\approx P(39 \leq Y \leq 48) \\&= 0,5328.\end{aligned}$$

Usando a tabela binomial obtém-se $P(39 \leq X \leq 48) = 0,5853$.

Cálculo da Probabilidade

$$\begin{aligned}P(X \geq 42) &\approx P(Y \geq 41,5) \\&= P\left(Z \geq \frac{41,5 - 45}{6}\right) \\&= P(Z \geq -0,58) \\&= P(Z \leq 0,58) \\&= A(0,58) \\&= 0,7190.\end{aligned}$$

Usando a tabela binomial obtém-se $P(X \geq 42) = 0,7164$.

Sem correção de continuidade (ilustrativo)

$$\begin{aligned}P(X \geq 42) &\approx P(Y \geq 42) \\ &= 0,6915.\end{aligned}$$

Usando a tabela binomial obtém-se $P(X \geq 42) = 0,7164$.

Cálculo da Probabilidade

$$\begin{aligned}P(41 < X < 52) &= P(42 \leq X \leq 51) \\&\approx P(41,5 \leq Y \leq 51,5) \\&= P\left(\frac{41,5 - 45}{6} \leq Z \leq \frac{51,5 - 45}{6}\right) \\&= P(-0,58 \leq Z \leq 1,08) \\&= A(1,08) - [1 - A(0,58)] \\&= 0,5789.\end{aligned}$$

Usando a tabela binomial obtém-se $P(42 \leq X \leq 51) = 0,5765$.

Sem correção de continuidade (ilustrativo)

$$\begin{aligned}P(41 < X < 52) &= P(42 \leq X \leq 51) \\&\approx P(42 \leq Y \leq 51) \\&= 0,5328.\end{aligned}$$

Usando a tabela binomial obtém-se $P(42 \leq X \leq 51) = 0,5765$.

Exemplo 2

Um sistema é formado por 100 componentes, cada um dos quais com confiabilidade (probabilidade de funcionar adequadamente num certo período) igual a 0,9. Esses componentes funcionam de forma independente e para o sistema funcionar é preciso que **pelo menos 87** desses componentes estejam funcionando. **Qual é a confiabilidade do sistema?**

Exemplo 2

Seja X = número de componentes que funcionam adequadamente.
Suposição $X \sim B(100; 0,9)$. Então,

- $E(X) = np = 100 \times 0,9 = 90$
- $\text{Var}(X) = np(1 - p) = 100 \times 0,9 \times 0,1 = 9$
- $\text{DP}(X) = \sqrt{9} = 3$

Assim, a distribuição de X pode ser aproximada por $Y \sim N(90, 3^2)$.

Cálculo da Confiabilidade do Sistema

$$\begin{aligned}P(X \geq 87) &\approx P(Y \geq 86,5) \\&= P\left(Z \geq \frac{86,5 - 90}{3}\right) \\&= P(Z \geq -1,17) \\&= P(Z \leq 1,17) \\&= A(1,17) \\&= 0,879.\end{aligned}$$

A confiabilidade do sistema é 0,879.

- 1 Informações sobre esta unidade
- 2 Distribuição Binomial
- 3 Histogramas Distribuição Binomial
- 4 Aproximação pela Normal
- 5 Exemplos
- 6 Exercícios**

Exercício 1

Um exame é constituído de 120 questões de múltipla escolha sendo que cada questão tem 4 alternativas. Calcule aproximadamente a probabilidade de um candidato que escolhe as alternativas ao acaso acertar mais do que $1/3$ das questões.

$$R = 0,014$$

Exercício 2

Num ambulatório médico sabe-se que 60% das receitas de analgésico prescrevem aspirina e 40% prescrevem dipirona sódica. Num determinado dia há em estoque 70 comprimidos de aspirina e 50 comprimidos de dipirona sódica. Se nesse dia são prescritas 100 receitas, calcule aproximadamente a probabilidade de todas as receitas serem atendidas.

$$R = 0,968$$

- 1 Um teste tem probabilidade de acerto de 0,7 por questão. Em 100 questões, qual a probabilidade de o aluno acertar mais de 75 questões?
- 2 Uma fábrica produz peças com 2% de defeito. Em um lote de 200 peças, qual a probabilidade de haver no máximo 3 defeituosas?
- 3 Em uma urna, a chance de sortear uma bola azul é 0,4. Se forem feitos 80 sorteios com reposição, qual a probabilidade de sair entre 30 e 40 bolas azuis, inclusive?
- 4 Um medicamento tem eficácia em 90% dos casos. Em uma amostra de 150 pacientes, qual a probabilidade de pelo menos 140 responderem ao tratamento?

- 1 $X \sim B(100, 0,7) \Rightarrow \mu = 70, \sigma \approx 4,58$ Correção:
 $P(X > 75) = P(X \geq 76) \approx P(Y > 75,5) \approx 0,1151$
- 2 $X \sim B(200, 0,02) \Rightarrow \mu = 4, \sigma \approx 1,98$ Correção:
 $P(X \leq 3) \approx P(Y \leq 3,5) \approx 0,4013$
- 3 $X \sim B(80, 0,4) \Rightarrow \mu = 32, \sigma \approx 4,38$ Correção:
 $P(30 \leq X \leq 40) \approx P(29,5 \leq Y \leq 40,5) \approx 0,6895$
- 4 $X \sim B(150, 0,9) \Rightarrow \mu = 135, \sigma \approx 3,67$ Correção:
 $P(X \geq 140) \approx P(Y \geq 139,5) \approx 0,1093$