MAE0219 – Lista de Exercícios 09

Departamento de Estatística

1o semestre de 2025

Exercício 1. A temperatura T de destilação do petróleo numa refinaria é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo de 150° a 300°.

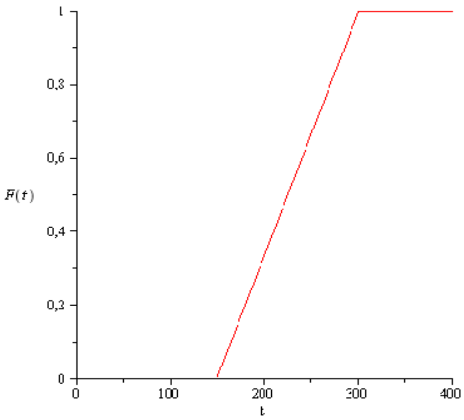
(a) Encontre f(t) e F(t);

Resposta.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{150}, & \text{se } 150 \leq t \leq 300 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 0 & t < 150 \\ \frac{t-150}{150}, & \text{se } 150 \leq t \leq 300 \\ 1, & t > 300. \end{cases}$$

(b) construa o gráfico de F(t);

Resposta.



(c) encontre E(T) e Var(T);

Solução.

$$E(T) = \int_{150}^{300} t \cdot \frac{1}{150}\, dt = \frac{t^2}{300}\bigg|_{150}^{300} = \frac{300^2 - 150^2}{300} = \frac{90000 - 22500}{300} = \frac{67500}{300} = 225$$

$$E(T^2) = \int_{150}^{300} t^2 \cdot \frac{1}{150}\, dt = \frac{t^3}{450}\bigg|_{150}^{300} = \frac{300^3 - 150^3}{450} = 52500$$

$$\text{Var}(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = 52500 - 225^2 = 52500 - 50625 = 1875$$

Resposta. 225,0 e 1875

(d) se o óleo é destilado a uma temperatura inferior a 200º, o custo do galão fica em 0,40 USD, e se o petróleo é destilado numa temperatura superior o custo sobe para 0,50 USD. Qual o custo esperado para produzir um galão de petróleo?

Solução. Seja C = Custo para produzir um galão.

$$E(C) = 0{,}40 \cdot P(T \leq 200) + 0{,}50 \cdot P(T > 200)$$

$$P(T \leq 200) = \int_{-\infty}^{200} \frac{1}{150}\,dt = \left.\frac{t}{150}\right|_{150}^{200} = \frac{200-150}{150} = \frac{1}{3}$$

$$P(T > 200) = 1 - P(T \leq 200) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Logo:

$$E(C) = 0{,}40 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}50 \cdot \frac{2}{3} \approx 0{,}4667$$

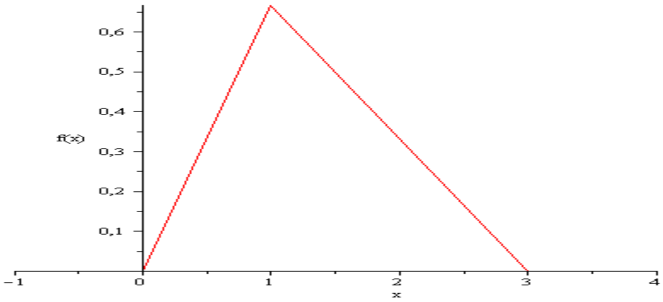
Resposta. 0,4667 USD

Exercício 2. Seja X a demanda diária (em centenas de quilos) de um determinado produto. A função densidade de probabilidade de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3}, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{x}{3}, & \text{se } \ 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{se } \ 0 > x \text{ ou } x > 3. \end{cases}$$

(a) Construa o gráfico de f(x);

Resposta.



(b) Encontre E(X) e Var(X);

Solução.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot \frac{2x}{3}\, dx + \int_1^3 x\left(1 - \frac{x}{3}\right)\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 x^2\, dx + \int_1^3 x\, dx - \frac{1}{3}\int_1^3 x^2\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + \frac{x^2}{2}\bigg|_1^3 - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3}\bigg|_1^3$$

$$= \frac{2}{9} + \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{27}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{9} + 4 - \frac{26}{9} \approx 1{,}3333$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{2x}{3}\, dx + \int_1^3 x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 x^3\, dx + \int_1^3 x^2\, dx - \frac{1}{3}\int_1^3 x^3\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 + \frac{x^3}{3}\bigg|_1^3 - \frac{1}{3}\,\frac{x^4}{4}\bigg|_1^3$$

$$= \frac{2}{12} + \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{81}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6} + \frac{26}{3} - \frac{80}{12} \approx 2{,}1667$$

Logo:

$$\text{Var}(X) = 2{,}1667 - (1{,}3333)^2 \approx 0{,}3889$$

Resposta. 1,333 e 0,3889

(c) qual a probabilidade que, em um dado dia, se venda mais de 100 kg? E menos de 50kg?

Solução.

$$P(X > 1) = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right)\,dx = x\Big|_1^3 - \frac{1}{3}\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^3$$
$$= (3-1) - \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}6667$$

$$P(X < 0{,}5) = \int_{-\infty}^{0{,}5} f(x)\,dx = \int_0^{0{,}5} \frac{2x}{3}\,dx = \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}5} = \frac{1}{3}(0{,}25 - 0) = \frac{1}{12} \approx 0{,}0833$$

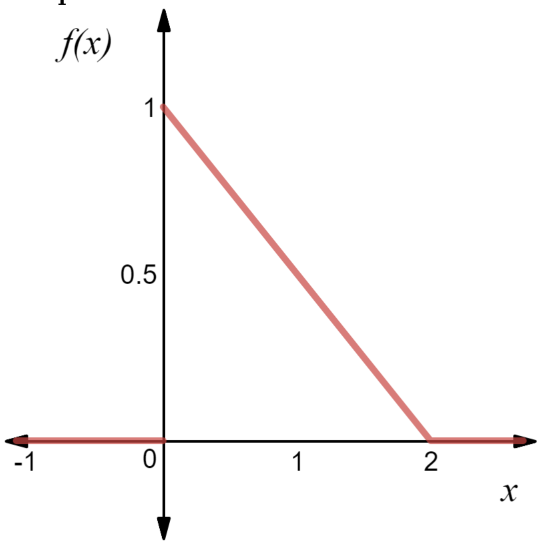
Resposta. 0,6667 e 0,08333

Exercício 3. Seja a função densidade

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{em caso contrario} \end{cases}$$

(a) Esboce $f(x)$ graficamente.

Resposta.



(b) Mostre que $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.

Resposta. [Omitida. Verificar que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$]

(c) Obtenha $E(X)$ e $Var(X)$.

Resposta. 0,6667 e 0,2222

(d) Calcule $P(0 \leq X \leq 1/2)$.

Resposta. 0,4375

(e) Obtenha $F(x)$.

Resposta.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 0 \\ x - \dfrac{x^2}{4}, & se \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & se \quad x > 2. \end{cases}$$

Exercício 4. Suponha que uma pane pode ocorrer em qualquer parte de uma rede elétrica de 10 km, com mesma probabilidade.

(a) Qual é a probabilidade da pane ocorrer nos primeiros 800 metros? E de ocorrer nos 2 km centrais da rede?

Resposta. 0,08000 e 0,2000

(b) O custo de reparo da rede depende da distância do centro do serviço ao local da pane. Considere que o centro de serviço está localizado na origem da rede e que o custo é de R$ 100 para distâncias até 3 km, de R$ 400 entre 3 e 8 km, e de R$ 1.000 para as distâncias acima de 8 km. Qual é o custo médio do conserto?

Resposta. 430,00

Exercício 5. O tempo, em minutos, de utilização de um caixa eletrônico por clientes de um certo banco, foi modelado por uma variável T com distribuição Exp(4). Determine

(a) $P(T < 1)$.

Solução.

$$P(T < 1) = 1 - e^{-4 \cdot 1} \approx 0{,}9817$$

Resposta. 0,9817

(b) $P(T > 1 \mid T \leq 2)$.

Solução.

$$P(T > 1 \mid T \leq 2) = \frac{P(1 < T \leq 2)}{P(T \leq 2)}$$

$$P(1 < T \leq 2) = e^{-4 \cdot 1} - e^{-4 \cdot 2} \approx 0{,}01798$$

$$P(T \leq 2) = 1 - e^{-4 \cdot 2} \approx 0{,}9997$$

Logo:

$$P(T > 1 \mid T \leq 2) = \frac{0{,}01798}{0{,}9997} \approx 0{,}01798$$

Resposta. 0,01798

(c) O valor da constante a tal que $P(T \leq a) = 0{,}4000$.

Solução.

$$P(T < a) = 1 - e^{-4a} = 0{,}4$$

$$e^{-4a} = 0{,}6$$

$$-4a = \ln(0{,}6)$$

$$a = \frac{-\ln(0{,}6)}{4} \approx 0{,}1277$$

Resposta. 0,1277

Exercício 6. Suponha que uma variável aleatória contínua tenha densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} + k, & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(a) Qual é o valor de k?

Resposta. 0,08333

(b) Quanto vale b tal que $P(X > b) = 5/9$?

Resposta. 1,863

Exercício 7. Dois amigos planejam um encontro entre 20 e 21 horas. Um deles é pontual e pretende chegar às 20:30 horas e esperar por exatos 15 minutos. O outro é mais imprevisível e pode chegar em qualquer momento do intervalo inicialmente previsto, saindo imediatamente se não encontrar o amigo.

(a) Qual é a probabilidade de eles se encontrarem?

Resposta. 0,2500

(b) Qual é a probabilidade de eles não se encontrarem devido a um lapso de menor que 5 minutos?

Resposta. 0,1667