

MAE0219 – Lista de Exercícios 08

Departamento de Estatística

1o semestre de 2025

Exercício 1. Supor que a função de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y seja dada pela tabela abaixo:

$y \backslash x$	1	2	3
1	9/50	2/50	6/50
2	7/50	6/50	8/50
3	4/50	6/50	2/50

(a) Obter as distribuições marginais de X e Y .

Resposta.

x	1	2	3
$P(X = x)$	20/50	14/50	16/50

y	1	2	3
$P(Y = y)$	0,3400	21/50	12/50

(b) Calcular $E[X]$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$ e $\text{Var}(Y)$.

Resposta.

$E(X)$	$E(Y)$	$\text{Var}(X)$	$\text{Var}(Y)$
1,920	1,900	0,7136	0,5700

(c) Obter $\rho(X, Y)$.

Resposta. 0,0188

(d) Seja $Z = X + Y$, obter $E(Z)$ e $\text{Var}(Z)$ usando apenas os números obtidos em (b) e (c).

Resposta. 3,820 e 1,3076

(e) Obtenha $E(Y|X=1)$ e $\text{Var}(Y|X=1)$.

Resposta. 1,750 e 0,5875

Exercício 2. A tabela abaixo descreve a distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y para um grupo de 100 alunos, em que X e Y denotam, respectivamente, o número de vezes que o aluno foi ao teatro nos meses de janeiro e fevereiro de 2016.

$y \setminus x$	0	1	2	3
0	20/100	13/100	5/100	2/100
1	15/100	10/100	4/100	1/100
2	5/100	10/100	3/100	2/100
3	4/100	3/100	2/100	1/100

(a) Obtenha as distribuições marginais de X e Y .

Resposta.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	44/100	36/100	14/100	6/100

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	40/100	30/100	20/100	10/100

(b) Obtenha e $\rho(X, Y)$ e comente.

Resposta. 0,1465. Existe uma correlação linear positiva porém pequena.

(c) Se um aluno foi ao teatro em fevereiro qual a probabilidade de não ter ido em janeiro?

Resposta. $\frac{2}{5}$

(d) Qual a interpretação de $X + Y$? Obtenha $E(X + Y)$ e $\text{Var}(X + Y)$.

Resposta. Seja $Z = X + Y$. A variável Z indica o número de vezes que o aluno foi ao teatro entre os meses de janeiro e fevereiro de 2016. $E(X + Y) = 1,82$, $\text{Var}(X + Y) = 2,0476$.

Exercício 3. A distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y é dada abaixo:

$y \backslash x$	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

(a) Verifique se X e Y são independentes

Solução.

$$p_X(-1) = \frac{3}{8}, \quad p_X(0) = \frac{1}{4}, \quad p_X(1) = \frac{3}{8}, \quad p_Y(-1) = \frac{3}{8}, \quad p_Y(0) = \frac{1}{4}, \quad p_Y(1) = \frac{3}{8}.$$

$$p(0,0) = 0, \quad p_X(0)p_Y(0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad X \text{ e } Y \text{ não são independentes.}$$

(b) Obtenha $\rho(X,Y)$ e comente

Solução.

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = (-1) \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} = 0, \quad E[Y] = 0.$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \sum_{x,y} x y p(x,y) = (-1 \cdot -1) \frac{1}{8} + (-1 \cdot 0) \frac{1}{8} + (-1 \cdot 1) \frac{1}{8} + (0 \cdot -1) \frac{1}{8} + (0 \cdot 0) \mathbf{0} + (0 \cdot 1) \frac{1}{8} + (1 \cdot -1) \frac{1}{8} + (1 \cdot 0) \frac{1}{8} + (1 \cdot 1) \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + 0 + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} = 0. \end{aligned}$$

$$E[X^2] = (-1)^2 \frac{3}{8} + 0^2 \frac{1}{4} + 1^2 \frac{3}{8} = \frac{3}{4}, \quad \text{Var}(X) = \frac{3}{4}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{3}{4}.$$

$$\rho(X,Y) = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{0 - 0}{\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}} = 0.$$

$\rho(X,Y) = 0$, apesar de que X e Y não são independentes.

Exercício 4. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias com

$$\text{Var}(X) = 1, \quad \text{Var}(Y) = 4 \quad \text{e} \quad \rho(X,Y) = 1/2.$$

Determine $\text{Var}(X + Y)$.

Solução.

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X,Y)$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \rho(X,Y) \sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)} = \frac{1}{2} \sqrt{1 \cdot 4} = 1$$

$$\text{Var}(X + Y) = 1 + 4 + 2 \cdot 1 = 7$$

Exercício 5. Considere a distribuição conjunta de X e Y , parcialmente conhecida, dado na tabela abaixo:

$y \setminus x$	-1	0	1	$P(Y = y)$
-1	1/12			
0				1/3
1	1/4		1/4	
$P(X = x)$		0		1

(a) Complete a tabela, considerando X e Y independentes.

Resposta.

$y \setminus x$	-1	0	1	$P(Y = y)$
-1	1/12	0	1/12	1/6
0	1/6	0	1/6	1/3
1	1/4	0	1/4	1/2
$P(X = x)$	1/2	0	1/2	1

(b) Calcule as médias e variâncias de X e Y

Resposta. Médias: 0; 1/3; Variâncias: 1; 5/9

(c) Obtenha as distribuições condicionais de X dado que $Y = 0$, e de Y dado que $X = 1$.

Resposta.

x	-1	1
$P(X = x Y = 0)$	1/2	1/2

y	-1	0	1
$P(Y = y X = 1)$	1/6	2/6	3/6

Exercício 6. Considere a distribuição conjunta de X e Y abaixo:

$y \backslash x$	1	2	3
1	$5/27$	$1/27$	$3/27$
2	$4/27$	$3/27$	$4/27$
3	$2/27$	$3/27$	$2/27$

Determine a média e a variância de:

(a) $X+Y$

Resposta. $E(X+Y) = 3,8519$; $\text{Var}(X+Y) = 1,4599$

(b) XY

Resposta. $E(XY) = 3,7778$; $\text{Var}(XY) = 5,4319$