

Vamos traçar agora um eixo  $BB'$  paralelo a  $AA'$  passando pelo centróide  $C$ ; esse eixo é denominado *eixo centroidal*. Representando por  $y'$  a

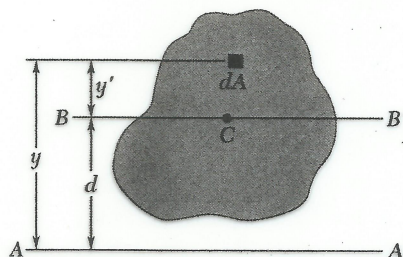


Fig. 9.9

distância entre o elemento  $dA$  e  $BB'$ , escrevemos  $y = y' + d$ , sendo  $d$  a distância entre os eixos  $AA'$  e  $BB'$ . Eliminado  $y$  na integral acima, escrevemos

$$\begin{aligned} I &= \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA \\ &= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA \end{aligned}$$

A primeira integral representa o momento de inércia  $\bar{I}$  da superfície em relação ao eixo centroidal  $BB'$ . A segunda integral representa o momento de primeira ordem da superfície em relação a  $BB'$ ; como o centróide  $C$  da superfície está localizado sobre esse eixo, a segunda integral deve ser nula. Finalmente, observamos que a última integral é igual à área total  $A$  da superfície. Logo, temos

$$I = \bar{I} + Ad^2 \quad (9.9)$$

Essa fórmula expressa que o momento de inércia  $I$  de uma superfície em relação a um dado eixo  $AA'$  é igual ao momento de inércia  $\bar{I}$  da superfície em relação ao eixo centroidal  $BB'$  paralelo a  $AA'$  mais o produto da área  $A$  da superfície e do quadrado da distância  $d$  entre os dois eixos. Esse teorema é conhecido como *teorema dos eixos paralelos*. Substituindo  $I$  por  $k^2 A$  e  $\bar{I}$  por  $\bar{k}^2 A$ , o teorema também pode ser expresso como

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad (9.10)$$

Um teorema semelhante pode ser enunciado para relacionar o momento de inércia polar  $J_O$  de uma superfície em relação ao ponto  $O$  ao momento de inércia  $\bar{J}_C$  da mesma superfície em relação ao seu centróide  $C$ . Representando por  $d$  a distância entre  $O$  e  $C$ , escrevemos

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \quad \text{ou} \quad k_O^2 = \bar{k}_C^2 + d^2 \quad (9.11)$$

**Exemplo 1.** Como aplicação do teorema dos eixos paralelos, vamos determinar o momento de inércia  $I_T$  de uma superfície circular em relação a uma linha tangente ao círculo (Fig. 9.10). No Problema Resolvido 9.2, concluímos que o momento de inércia de uma superfície circular em relação a um eixo centroidal é  $\bar{I} = \frac{1}{4} \pi r^4$ . Logo, podemos escrever que

$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \frac{1}{4} \pi r^4 + (\pi r^2) r^2 = \frac{5}{4} \pi r^4$$

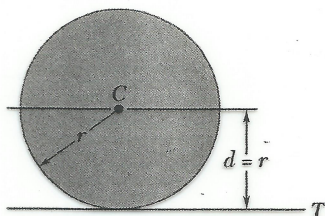


Fig. 9.10