

*Prova.* Consideremos um elemento  $dA$  da superfície  $A$  que é girado em relação ao eixo  $x$  (Fig. 5.16). O volume  $dV$  gerado pelo elemento  $dA$  é igual a  $2\pi y dA$ . Por conseguinte, o volume total gerado por  $A$  é  $V = \int 2\pi y dA$ . Mas, como a integral  $\int y dA$  é igual a  $\bar{y}A$  (Seção 5.3), temos

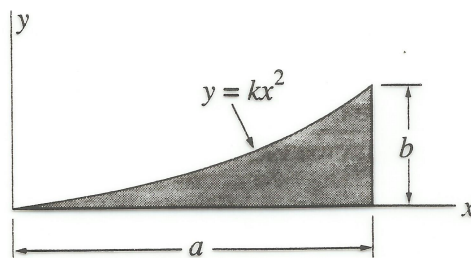
$$V = 2\pi \bar{y} A \quad (5.11)$$

onde  $2\pi\bar{y}$  é a distância percorrida pelo centróide de  $A$ . Novamente, deve-se observar que o teorema não se aplica se o eixo de rotação é secante à superfície geratriz.

Os teoremas de Pappus-Guldin oferecem um modo simples de calcular a área de superfícies de revolução e o volume de corpos de revolução. Também podem ser utilizados, reciprocamente, para determinar o centróide de uma curva plana quando a área da superfície gerada pela curva é conhecida ou para determinar o centróide de uma superfície plana quando o volume do corpo gerado pela superfície é conhecido (ver Prob. Resolvido 5.8).

### Problema Resolvido 5.4

*Determinar, por integração direta, o centróide da superfície sob a parábola.*



**Solução.** O valor de  $k$  é determinado pela substituição de  $x = a$  e  $y = b$  na equação dada. Temos  $b = ka^2$  e, portanto,  $k = b/a^2$ . A equação da curva é, por conseguinte,

$$y = \frac{b}{a^2} x^2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{b^{1/2}} y^{1/2} *$$

\* Essa equação vale somente para o semi-eixo  $x > 0$ , sobre o qual a figura do problema está contida, o que explica o fato de ter sido desprezado o ramo da parábola correspondente a  $x < 0$ . (N. do R. T.)