

Taxas de Variação nas Ciências Naturais e Sociais – Aplicações de Derivadas

Disciplina: Cálculo I LOB1003

Profa. responsável: Diovana A. S. Napoleão

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais – EEL-USP

Sabemos que se $y = f(x)$, então a derivada $\frac{dy}{dx}$ pode ser interpretada como a **taxa de variação de y em relação a x** . Neste tópico, será analisado algumas das aplicações dessa ideia na física, química, biologia, economia e em outras ciências.

. Se x variar de x_1 a x_2 , então a variação em x será:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será,

$$\Delta y = (f x_2) - (f x_1)$$

O quociente da diferença,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(f x_2) - (f x_1)}{x_2 - x_1}$$

é a taxa média de variação de y em relação a x sobre o intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretada como a inclinação da reta tangente PQ na Figura 1.

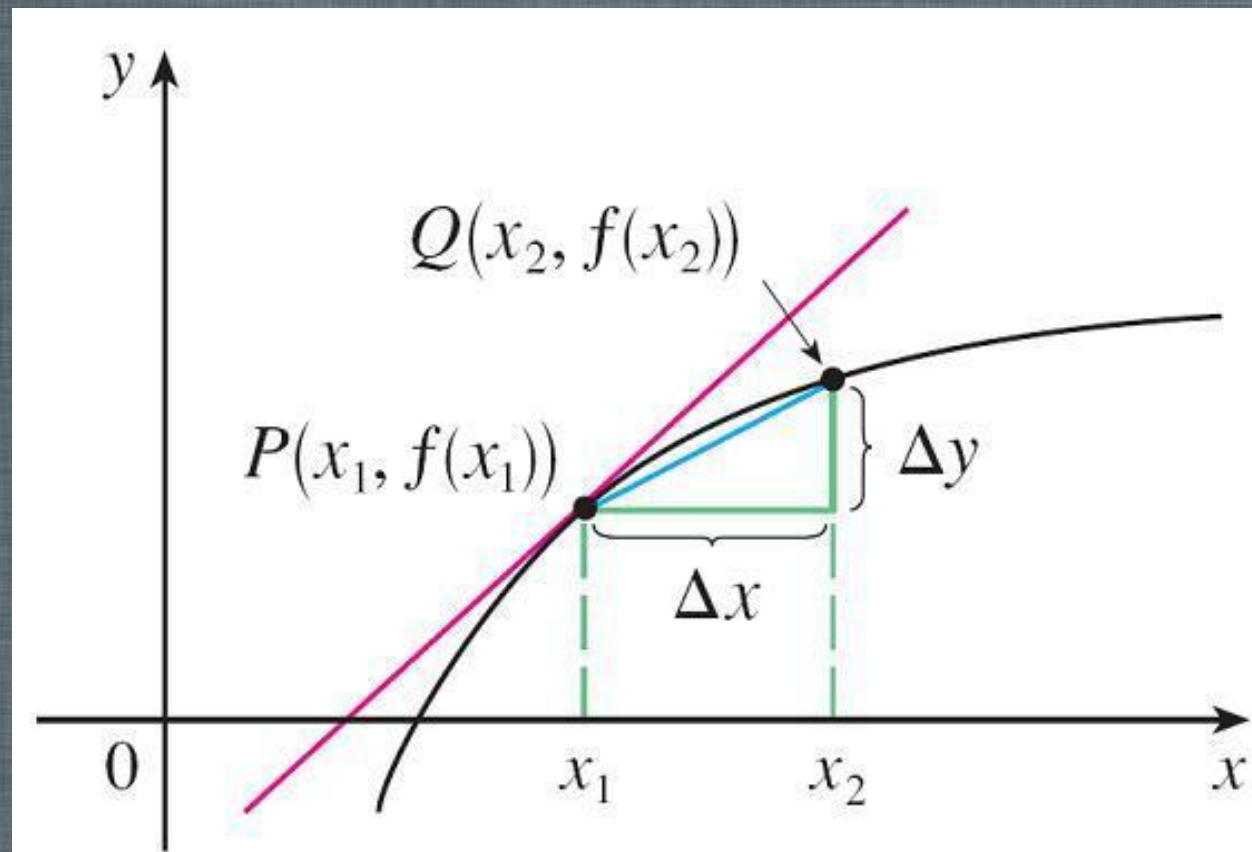


Figura 1 - m_{PQ} = a taxa de variação média,
 $m = f'(x_1)$ = taxa instantânea de variação

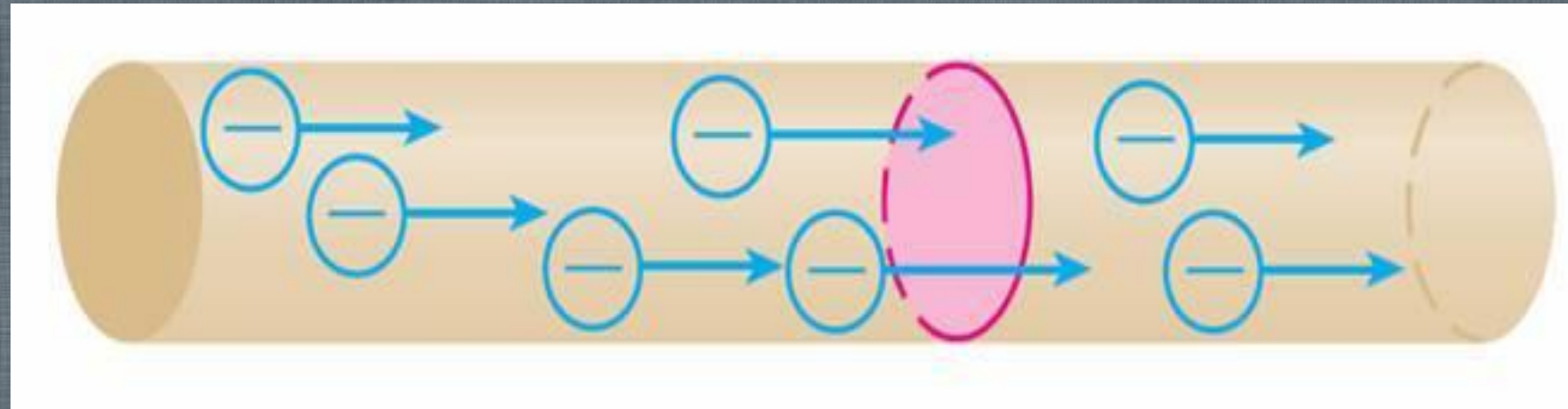
Seu limite quando $\Delta x \rightarrow 0$ é a derivada $f'(x_1)$, podendo ser interpretada como a **taxa instantânea de variação de y em relação a x** ou a **inclinação da reta tangente** em $P(x_1, f(x_1))$. Usando a notação de Leibniz, escrevemos o processo na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Taxas de Variação nas Ciências Naturais e Sociais – Aplicações de Derivadas

EXEMPLOS

1- Uma corrente existe sempre que cargas elétricas se movem. A Figura 2 ilustra parte de um fio e elétrons movimentando-se através de uma superfície plana sombreada em vermelho.



FÍSICA

Figura 2- Movimento dos elétrons

Se ΔQ é a quantidade de carga líquida que passa através dessa superfície durante um período de tempo t , então a corrente média durante esse intervalo de tempo é definida como:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Se fizermos o limite dessa corrente média sobre intervalos de tempo cada vez menores, obteremos a corrente I em um dado instante t_1 :

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

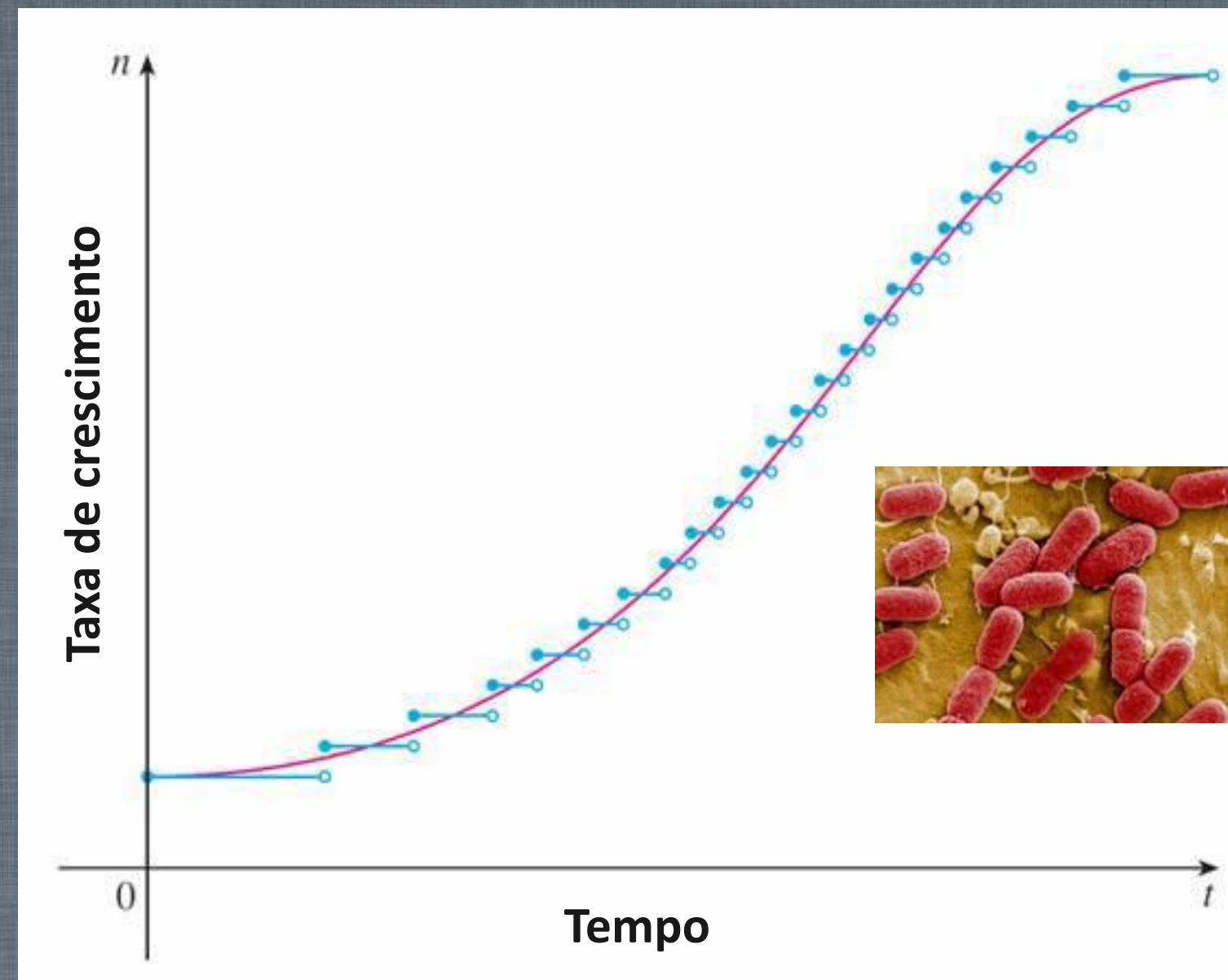
Assim, a corrente é a taxa na qual a carga flui através de uma superfície. É medida em unidades de carga por unidade de tempo (Coulombs por segundo, ou seja, Ampéres).

2- Se $n = f(t)$ o número de indivíduos numa população animal ou de plantas num tempo t . A variação no tamanho da população entre os tempos $t = t_1$ e $t = t_2$ é $n = f(t_2) - f(t_1)$, e então a taxa média de crescimento durante o período de tempo $t_1 \leq t \leq t_2$ é

$$\text{taxa média de crescimento} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

A taxa de crescimento instantâneo é obtida dessa taxa média de crescimento fazendo-se o período de tempo t tender a 0:

$$\text{taxa de crescimento} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}.$$



BIOLOGIA

Figura 3 - Curva da função crescimento

Considere uma população de bactérias em um meio de um nutriente homogêneo. Suponha que tomando amostras da população em certos intervalos, determina-se que a mesma duplica a cada hora. Se a população inicial for n_0 e o tempo for medido em horas, então:

$$\begin{aligned}f(1) &= 2f(0) = 2n_0, \\f(2) &= 2f(1) = 2^2n_0, \\f(3) &= 2f(2) = 2^3n_0,\end{aligned}$$

$$f(t) = 2^t n_0$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$



$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(2^t n_0) = n_0 2^t \ln 2$$

Suponha que comecemos com uma população inicial de $n_0 = 100$ bactérias. Então, a taxa de crescimento depois de 4 horas é,

$$\frac{dn}{dt} = 100 \cdot 2^4 \ln 2 = 1600 \cdot \ln 2 \approx 1,109$$

Depois de 4 horas, a população de bactérias está crescendo a uma taxa de cerca de 1,109 bactérias por hora.

Uma única ideia, muitas interpretações

A velocidade, a densidade, a corrente, a potência e o gradiente da temperatura na física, a taxa de reação e a compressibilidade na química, a taxa de crescimento e o gradiente da velocidade do sangue na biologia, o custo e o lucro marginal na economia, a taxa do fluxo do calor na geologia, a taxa de desenvolvimento do desempenho na psicologia – todos esses são casos especiais de um único conceito matemático, a derivada.

Quando desenvolvemos as propriedades do conceito matemático de uma vez por todas, podemos voltar e aplicar esses resultados em todas as ciências. Isso é muito mais eficiente do que desenvolver as propriedades de conceitos especiais para cada ciência separada.