Distribuição Normal

Ciências Contábeis - FEA - Noturno

1º Semestre 2025

Profs. Leonardo T. Rolla e Nikolai Kolev

Sumário

Sumário

Objetivo de aprendizagem

Compreender a distribuição normal e aplicar a tabela da normal padrão para calcular probabilidades e interpretar fenômenos probabilísticos com base em variáveis aleatórias contínuas.

Conteúdo abordado

1. Distribuição Normal: definição, propriedades e curva
2. Distribuição Normal Padrão e a tabela da normal
3. Padronização de variáveis: cálculo do escore-z
4. Uso da tabela da normal padrão para encontrar probabilidades
5. Cálculo de probabilidades com base na distribuição normal

Competências adquiridas

Depois desta unidade, o aluno será capaz de:

1. Identificar situações em que a distribuição normal é aplicável.
2. Padronizar variáveis e calcular escores-z.
3. Utilizar a tabela da normal padrão para encontrar probabilidades.
4. Calcular e interpretar probabilidades associadas à distribuição normal.
5. Resolver problemas práticos usando a distribuição normal.

Autoavaliação e reflexão

O aluno pode fazer os exercícios postados no Moodle e posteriormente comparar suas respostas com as soluções apresentadas, identificando possíveis erros, e eventualmente refazer os exercícios.

Além disso, é recomendável refletir sobre as dificuldades encontradas e revisar os conceitos conforme necessário.

Sumário

Distribuição Normal

Se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média μ e variância σ^2, a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2},$$

para $-\infty < x, \mu < +\infty$ e $\sigma > 0$. Notação: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Gráfico de $f(x)$

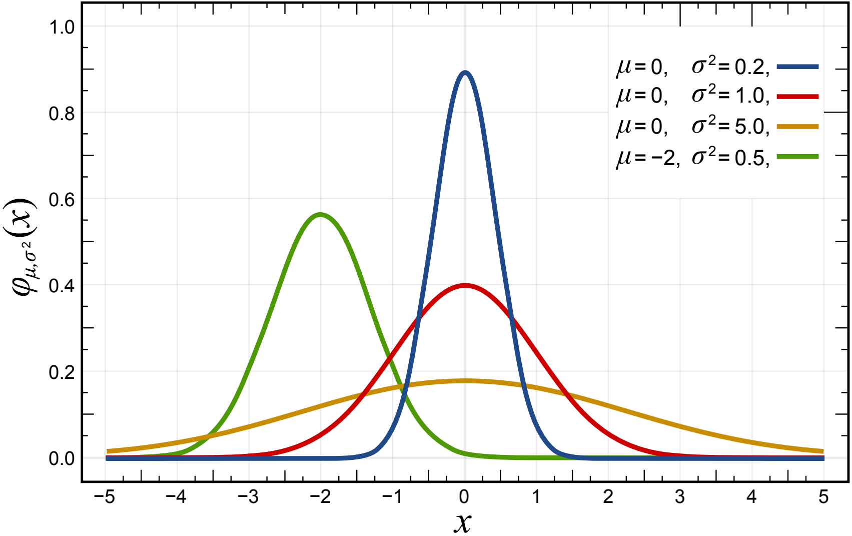
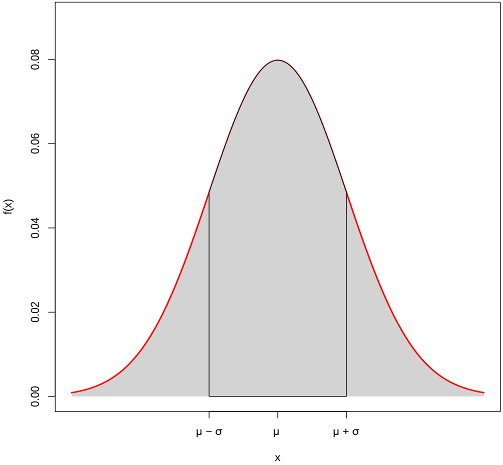
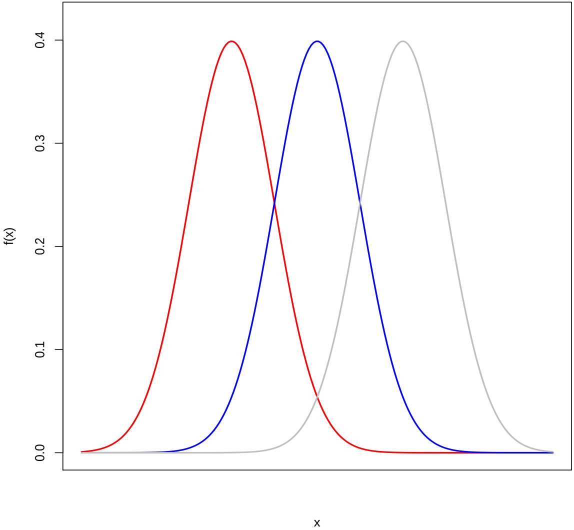


Gráfico de $f(x)$ de uma N(μ,σ^2)



Distribuições Normais de médias diferentes



Distribuições Normais de variâncias diferentes

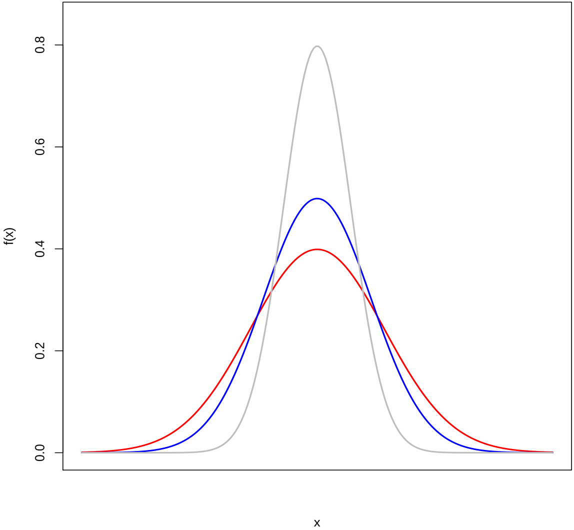


Gráfico de $f(x)$ para uma N(0,1)

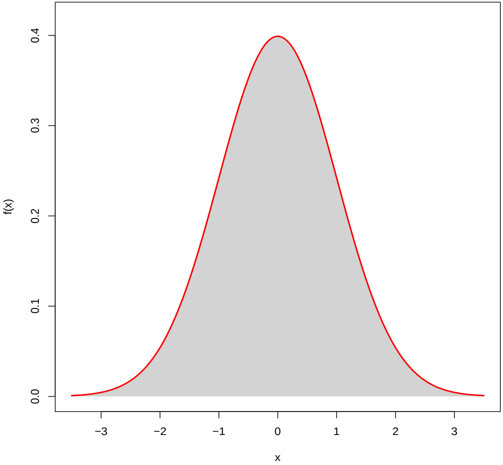
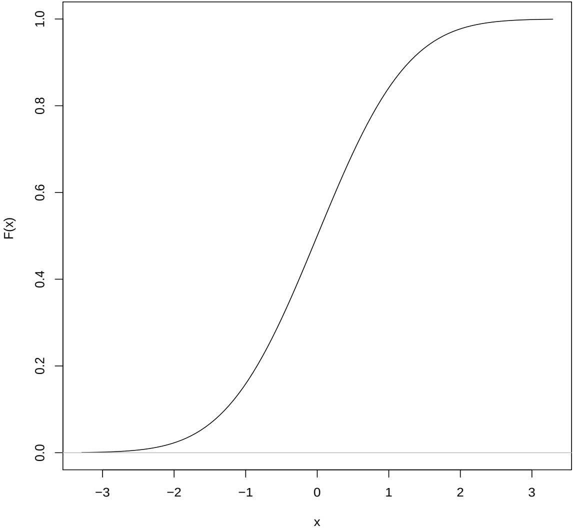


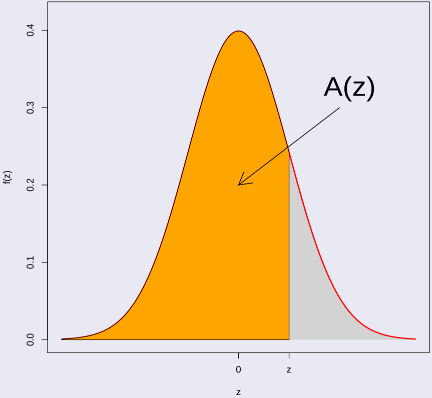
Gráfico de $F(x)$ para N(0,1)



Sumário

Função de Distribuição Acumulada da Normal Padrão

Descrição de $A(z) = P(Z \leq z)$



Distribuição Normal Padrão: Valores de $A(z) = P(Z \leq z)$

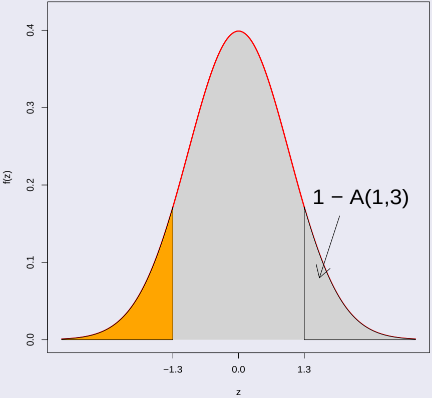
	Segunda Decimal de z									
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817

Distribuição Normal Padrão: Valores de $A(z) = P(Z \leq z)$

	Segunda Decimal de z									
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Valores de $A(z)$ para $z < 0$

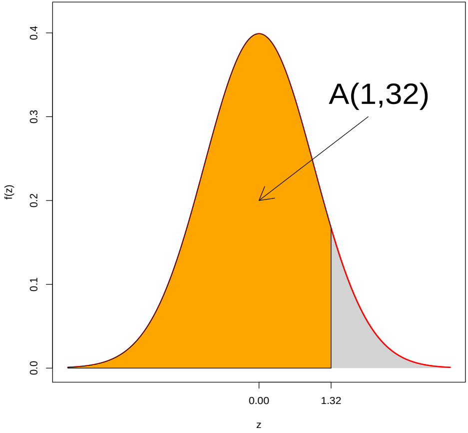
$A(-z) = 1 - A(z)$



Sumário

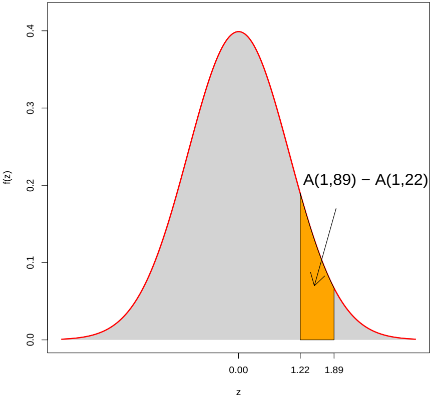
Cálculo de probabilidades

$P(Z \leq 1{,}32) = A(1{,}32) = 0{,}9066.$



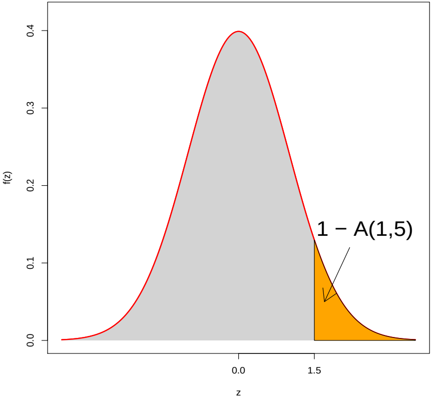
Cálculo de probabilidades

$$P(1{,}22 \leq Z \leq 1{,}89) = P(Z \leq 1{,}89) - P(Z \leq 1{,}22) =$$
$$= A(1{,}89) - A(1{,}22) = 0{,}9706 - 0{,}8888 = 0{,}0818.$$



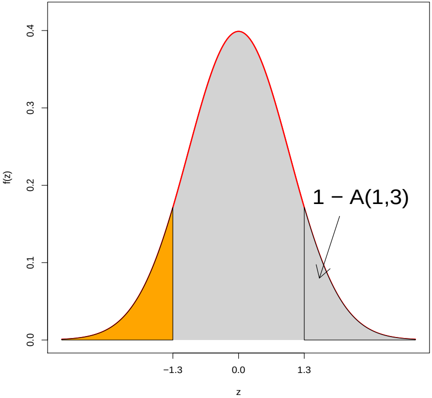
Cálculo de probabilidades

$$P(Z \geq 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5) = 1 - A(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668.$$



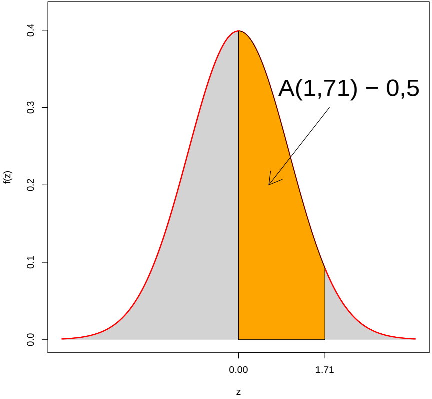
Cálculo de probabilidades

$P(Z \leq -1{,}3) = A(-1{,}3) = 1 - A(1{,}3) = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968.$



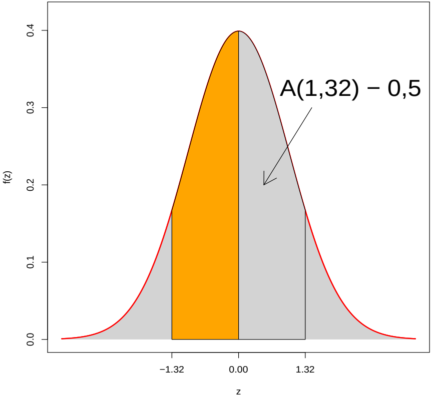
Cálculo de probabilidades

$P(0 \leq Z \leq 1{,}71) = A(1{,}71) - A(0) = 0{,}9564 - \frac{1}{2} = 0{,}4564.$



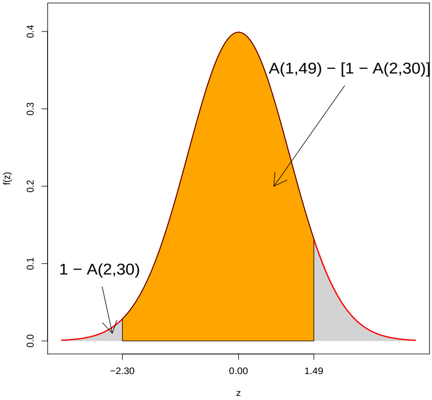
Cálculo de probabilidades

$$P(-1{,}32 \leq Z \leq 0) =$$
$$= P(0 \leq Z \leq 1{,}32) = A(1{,}32) - \frac{1}{2} = 0{,}9066 - \frac{1}{2} = 0{,}4066.$$



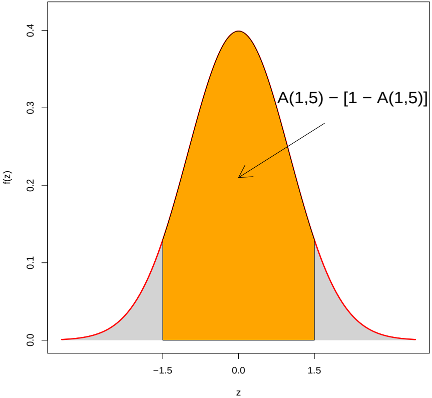
Cálculo de probabilidades

$$P(-2{,}30 \leq Z \leq 1{,}49) = P(-2{,}30 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1{,}49) =$$
$$= A(2{,}30) - \tfrac{1}{2} + A(1{,}49) - \tfrac{1}{2} = 0{,}4319 + 0{,}4893 = 0{,}9212.$$



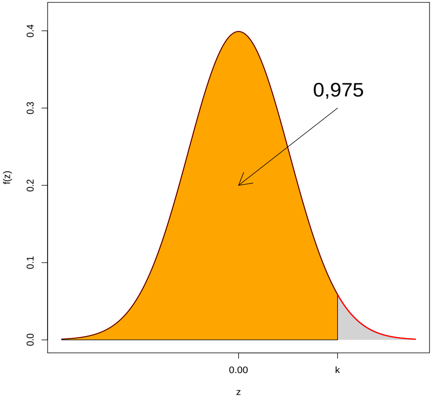
Cálculo de probabilidades

$$P(-1{,}5 \leq Z \leq 1{,}5) =$$
$$2 \cdot P(0 \leq Z \leq 1{,}5) = 2 \cdot (A(1{,}5) - \tfrac{1}{2}) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664.$$



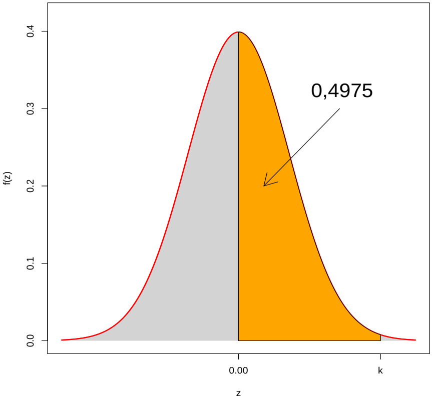
Cálculo de quantis

Qual é z tal que $P(Z \leq z) = 0{,}975$?
Devemos resolver $A(z) = 0{,}975$. Pela tabela obtemos $z = 1{,}96$.



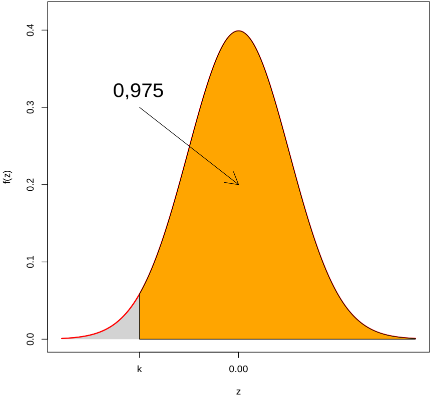
Cálculo de probabilidades

Qual é z tal que $P(0 \leq Z \leq z) = 0{,}4975$?
Assim z é tal que $A(z) = 0{,}5 + 0{,}4975 = 0{,}9975$. Obtemos $z = 2{,}81$.



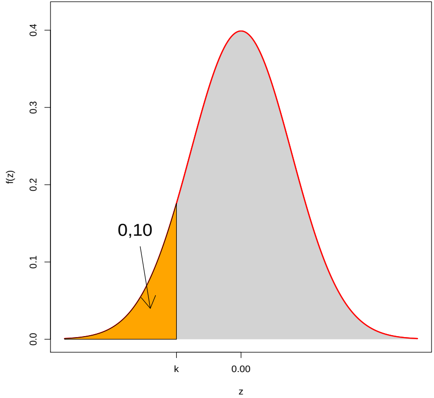
Cálculo de probabilidades

Qual é z tal que $P(Z \geq z) = 0{,}975$? Por simetria, z é tal que $A(-z) = 0{,}975$. Obtemos $-z = 1{,}96$ e assim $z = -1{,}96$.



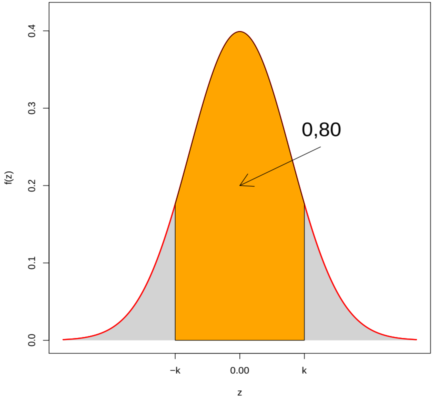
Cálculo de probabilidades

Qual é z tal que $P(Z \leq z) = 0{,}10$? Por simetria, $A(-z) = 0{,}90$.
Obtemos $-z = 1{,}28$ e assim $z = -1{,}28$.



Cálculo de probabilidades

Qual é z tal que $P(-z \leq Z \leq z) = 0{,}80$? Temos que $A(z) = 0{,}80 + 0{,}10 = 0{,}90$. Pela tabela obtemos $z = 1{,}28$.



Sumário

Padronização

Se $X \sim$ N(μ, σ^2), então $X = \mu + \sigma \cdot Z$, onde $Z \sim$ N$(0,1)$.

Em particular,

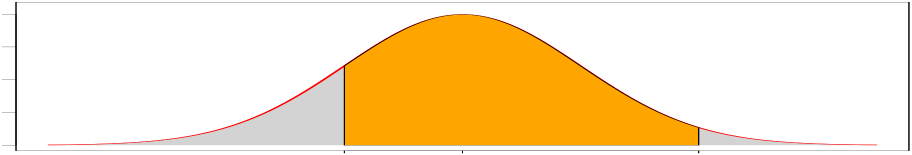
$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

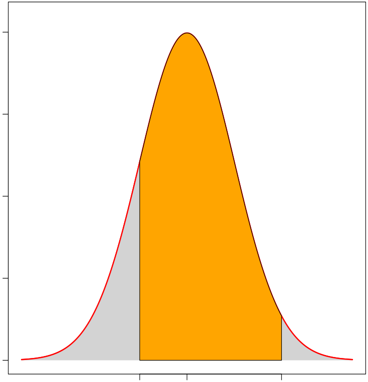
ou seja, todos os cálculos podem ser feitos pela normal padrão.

Relações entre normal qualquer e normal padrão:

$$x = \mu + \sigma\, z \qquad z = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

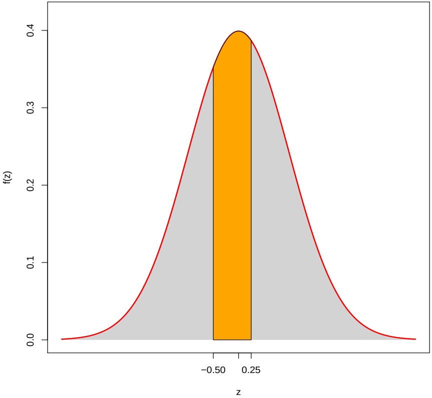
Padronização





Cálculo de probabilidades

Se $\mu = 10$ e $\sigma = 8$, então
$P(6 \leq X \leq 12) = P(-0{,}5 \leq Z \leq 0{,}25) = 0{,}2902$.



Cálculo de probabilidades

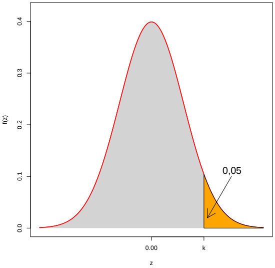
Dados $\mu = 10$ e $\sigma = 8$.

Vamos encontrar x tal que $P(X \geq x) = 0{,}05$.

Primeiro buscamos z tal que $P(Z \geq z) = 0{,}05$.

Como $A(z) = 0{,}95$, pela tabela obtemos $z = 1{,}64$.

Finalmente, $x = 10 + 8 \times 1{,}64 = 23{,}1$.



Cálculo de probabilidades

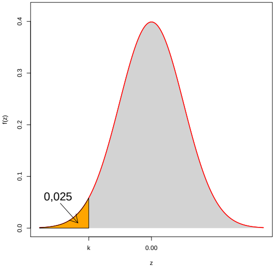
Dados $\mu = 10$ e $\sigma = 8$.

Vamos encontrar x tal que $P(X \leq x) = 0{,}025$.

Primeiro buscamos z tal que $P(Z \leq z) = 0{,}025$.

Como $A(-z) = 0{,}975$, pela tabela obtemos $z = -1{,}96$.

Finalmente, $x = 10 - 8 \times 1{,}96 = -5{,}7$.

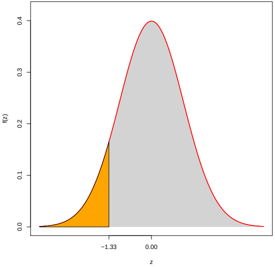


Descrição

Sabe-se que o tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição aproximadamente normal, com média 120 min e desvio padrão de 15 min.

Sorteando-se um aluno ao acaso, qual é a probabilidade dele terminar o exame antes de 100 minutos? Seja $X =$ tempo gasto no exame vestibular pelo aluno selecionado. Suposição: $X \sim$ N$(120, 15^2)$.

$P(X < 100) = P(Z < -1{,}33) = 1 - A(1{,}33) = 0{,}0918$.



Exemplo

Cálculo de probabilidades

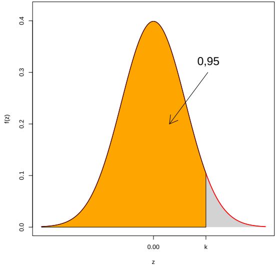
Qual deve ser o tempo de prova, de modo a permitir que 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?

Queremos encontrar x tal que $P(X \leq x) = 0{,}95$.

Buscamos z tal que $P(Z \leq z) = 0{,}95$.

Como $A(z) = 0{,}95$, pela tabela obtemos $z = 1{,}64$.

Finalmente, $x = 120 + 15 \times 1{,}64 = 144$ min.



Exemplo

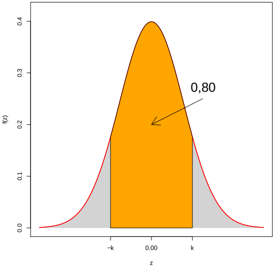
Cálculo de probabilidades

Qual é o intervalo de tempo, simétrico em torno da média tal que 80% dos estudantes gastam para completar o exame nesse intervalo?

Buscamos z tal que $P(-z \leq Z \leq z) = 0{,}80$.

Como $A(z) = 0{,}80 + 0{,}10$, pela tabela obtemos $z = 1{,}28$.

Finalmente, $x = 120 \pm 15 \times 1{,}28 = 101$ e 139 min.



Sumário

Exercício

Sabe-se que a quantidade de açúcar nas barras de cereal de uma determinada marca segue uma distribuição normal com média 27 g e desvio padrão 3,9 g.

a) Escolhida uma barra de cereal, ao acaso, da marca em questão, qual é a probabilidade de que ela contenha entre 24 e 28 g de açúcar?

b) Durante o processo de controle de qualidade da empresa, se uma barra de cereal apresentar mais de 34,8 g de açúcar, ela será descartada. Se cinco barras de cereais são selecionadas, aleatoriamente, qual é a probabilidade de que nenhuma seja descartada?

c) Sabendo-se que a quantidade de açúcar de uma determinada barra é maior que 27 g, qual é a probabilidade dessa barra de cereal ser descartada?

Respostas

0,380 ; 0,89 ; 0,0455

Exercício

Durante o processo de admissão para uma determinada universidade, é realizado um teste preliminar de conhecimentos gerais. Na segunda fase, são realizadas entrevistas com os 25% dos candidatos que obtiveram as pontuações mais altas no teste preliminar. Considere que as notas deste teste preliminar são normalmente distribuídas com uma média de 14,5 pontos e um desvio padrão de 1,6 pontos.

a) Escolhido ao acaso um aluno que fez o teste preliminar, qual é a probabilidade de que sua nota seja maior do que 16,1? E menor do que 13,8?

b) Encontre um intervalo simétrico em torno da média que contenha 90% das possíveis notas obtidas no teste preliminar de conhecimentos gerais.

Respostas

0,159 e 0,331 ; [11,87–17,13]

Durante o processo de admissão para uma determinada universidade, é realizado um teste preliminar de conhecimentos gerais. Na segunda fase, são realizadas entrevistas com os 25% dos candidatos que obtiveram as pontuações mais altas no teste preliminar. Considere que as notas deste teste preliminar são normalmente distribuídas com uma média de 4,5 pontos e um desvio padrão de 1,6 pontos.

a) Uma aluna fez o teste de conhecimentos gerais e obteve uma nota de 5,8. Ela participaria da segunda fase? Justifique

b) Sabe-se que os 10% dos alunos que tiveram as menores notas não poderão se candidatar no próximo ano. A partir de qual pontuação não se aplica essa punição?

Respostas

$5{,}8 > 5{,}58$ ou $F(5{,}8) > 0{,}75$; $2{,}45$

Exercício

Considere $X \sim \mathcal{N}(90, 100)$, isto é, média 90 e variância 100 (desvio padrão 10).

Calcular:

a) $P(X \leq 115)$
b) $P(X \geq 80 \mid X < 100)$
c) O valor de c tal que $P(90 - c \leq X \leq 90 + c) = 0{,}99$
d) O número d tal que $P(X < d) = 0{,}975$
e) O número e tal que $P(X > e) = 0{,}95$

Respostas

a) $P(X \leq 115) = 0{,}9938$

b) $P(X \geq 80 \mid X < 100) = 0{,}8114$

c) $c = 25{,}8$

d) $d = 109{,}60$

e) $e = 73{,}60$

Exercício

As notas de uma prova final de Estatística distribuem-se segundo uma variável aleatória normal com média 6,5 e desvio padrão 1,6.

O professor deseja dividir a classe em 3 categorias:

- Os 30% com as melhores notas serão aprovados;
- Os 50% com notas intermediárias ficarão de exame;
- Os 20% com as piores notas serão reprovados.

a) Quais os limites de nota entre cada uma das categorias?

b) Caso a nota para aprovação (sem ir para exame) fosse igual a 7,0 e uma turma tivesse 50 alunos, em média, quantos desses seriam aprovados sem ir para o exame?

Respostas

a) Limites de corte:

- Reprovados: nota $< 5{,}16$
- Exame: nota entre $5{,}16$ e $7{,}33$
- Aprovados: nota $> 7{,}33$

b) $P(X \geq 7{,}0) = 0{,}3783 \Rightarrow$ Aprovados em média: $50 \times 0{,}3783 \approx 19$ alunos