Variáveis Aleatórias Contínuas

Ciências Contábeis - FEA - Noturno

1º Semestre 2025

Profs. Leonardo T. Rolla e Nikolai Kolev

Sumário

Sumário

Objetivo de aprendizagem

Compreender os conceitos e propriedades das variáveis aleatórias contínuas, incluindo funções de distribuição, esperança, variância e algumas distribuições importantes, tais como: a uniforme, exponencial e normal, para modelar e interpretar fenômenos contínuos.

Conteúdo abordado

1. Definição e características de variáveis aleatórias contínuas
2. Cálculo da esperança e variância para variáveis contínuas
3. Função de distribuição acumulada (FDA): conceito e interpretação
4. Distribuição Uniforme contínua: propriedades e aplicações
5. Distribuição Exponencial: propriedades e aplicações
6. Distribuição Normal: propriedades e aplicações

Competências adquiridas

Depois desta unidade, o aluno será capaz de:

1. Identificar e modelar variáveis aleatórias contínuas.
2. Calcular e interpretar esperança e variância no contexto contínuo.
3. Compreender e utilizar a função de distribuição acumulada.
4. Reconhecer e aplicar as distribuições Uniforme, Exponencial e Normal.
5. Interpretar fenômenos naturais e experimentais usando distribuições contínuas.

O aluno pode fazer os exercícios postados no Moodle e posteriormente comparar suas respostas com as soluções apresentadas, identificando possíveis erros, e eventualmente refazer os exercícios.

Além disso, é recomendável refletir sobre as dificuldades encontradas e revisar os conceitos conforme necessário.

Sumário

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua.

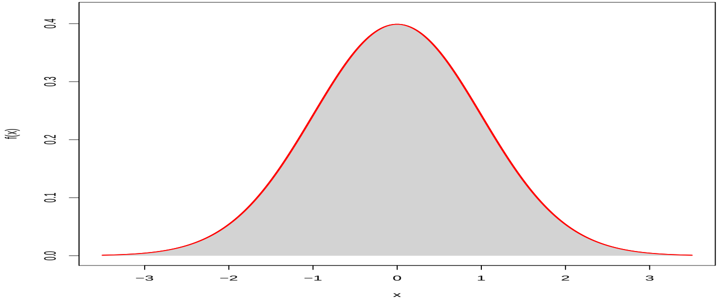
Exemplos

- altura de um adulto
- custo do sinistro de um carro
- temperatura mínima diária
- saldo em aplicações financeiras
- ganho de peso após dieta
- distância percorrida

Função densidade de probabilidade

A função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma variável aleatória X é uma função $f(x) \geq 0$ cuja área total sob a curva seja igual à unidade. Em termos matemáticos

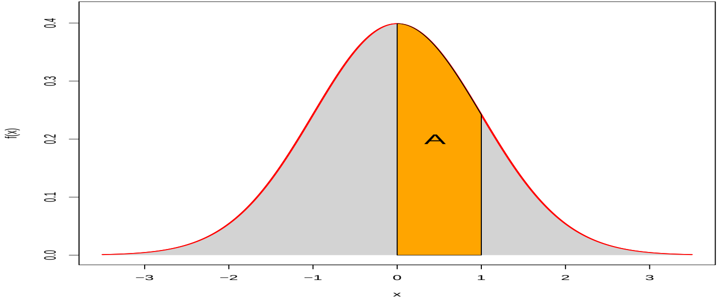
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$



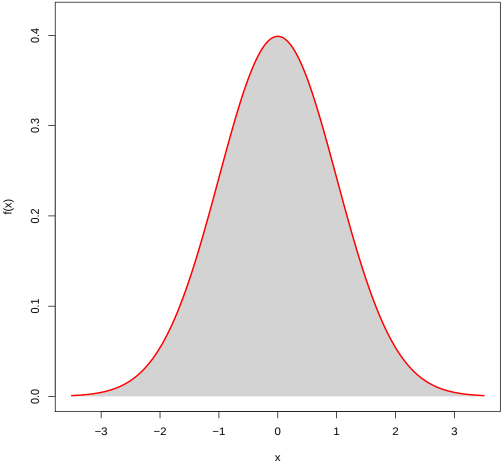
Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(a \leq X \leq b)$ corresponde à área sob a curva no intervalo $[a,b]$. Em termos matemáticos

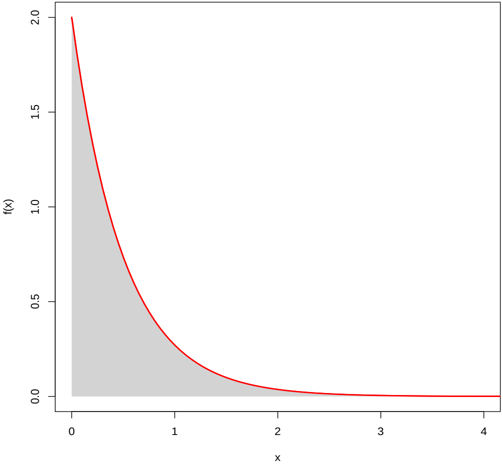
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$



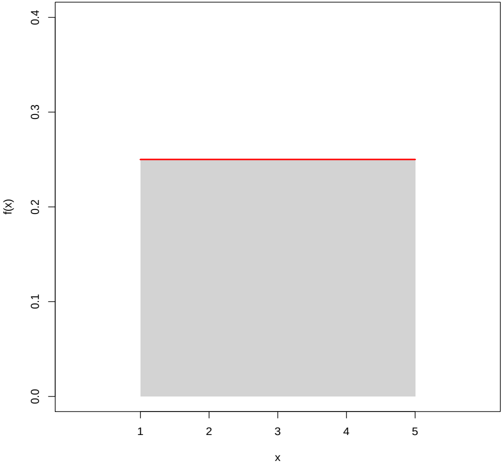
Distribuição Normal



Distribuição Exponencial



Distribuição Uniforme



Sumário

Definição

A esperança matemática de uma variável aleatória contínua X fica dada por

$$\mu = \mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Variância

Definição

A variância de uma variável aleatória X contínua é definida por

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Var}(X) &= \mathsf{E}[X-\mu]^2 \\
&= \mathsf{E}(X^2)-\mu^2,
\end{aligned}
$$

em que

$$\mathsf{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Propriedades

$$\mathsf{E}(aX + bY) = a\,\mathsf{E}(X) + b\,\mathsf{E}(Y)$$

$$\mathsf{E}(a) = a$$

$$\mathsf{Var}(aX + b) = a^2\,\mathsf{Var}(X)$$

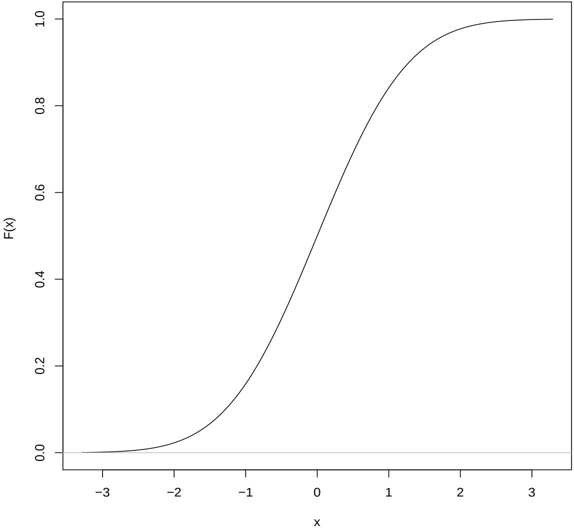
Sumário

Definição

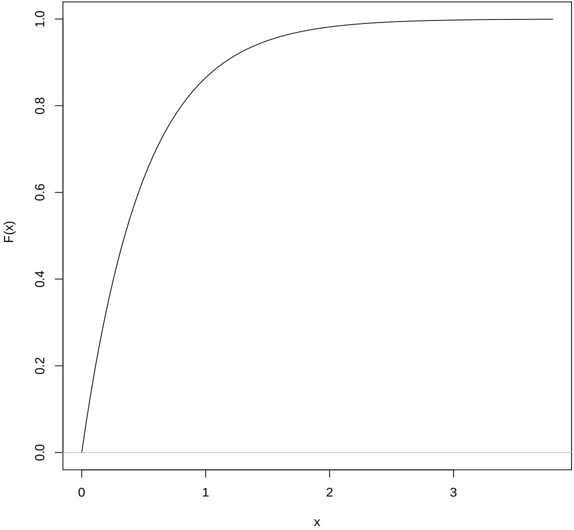
A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória T contínua é definida por

$$F(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

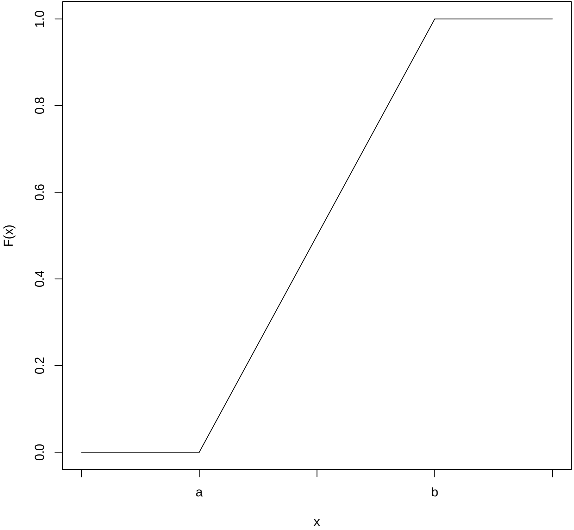
Distribuição Normal



Distribuição Exponencial



Distribuição Uniforme



Propriedades

F_X é “crescente” (não-decrescente)

F_X “vai de 0 a 1”
(tende a 0 para x grande negativo e tende a 1 para x grande positivo)

$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

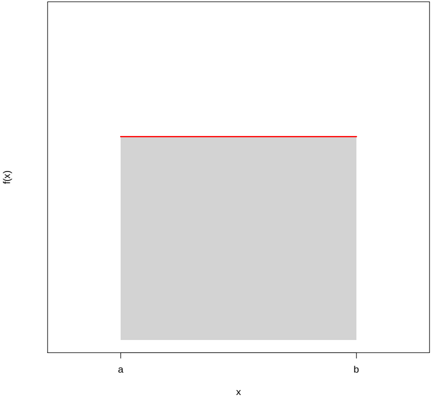
Cálculo da densidade a partir da distribuição acumulada

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x)$$

Sumário

Definição

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [a,b], notação $X \sim U[a,b]$, então $f(x) = \frac{1}{(b-a)}$ para $a \leq x \leq b$ e $f(x) = 0$ em caso contrário.



Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória $T \sim U[a,b]$ é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b, \\ 1 & x \geq b. \end{cases}$$

Esperança e variância

Vamos supor que X é uma variável aleatória tal que $X \sim U[a,b]$.

Esperança

A esperança de X fica dada por

$$\mathsf{E}(X) = \int_a^b \frac{x}{(b-a)} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Variância

A variância de X fica dada por

$$\mathsf{Var}(X) = \underbrace{\int_a^b \frac{x^2}{(b-a)} dx}_{\mathsf{E}(X^2)} - [\mathsf{E}(X)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

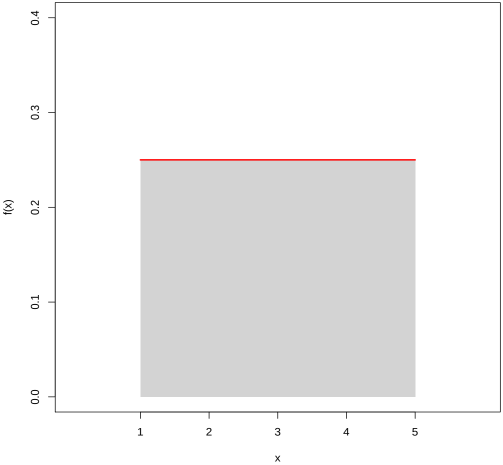
Exemplo

Densidade

Se X é uma variável aleatória uniforme no intervalo $[1,5]$, notação $X \sim U[1,5]$, então a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 \leq x \leq 5, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

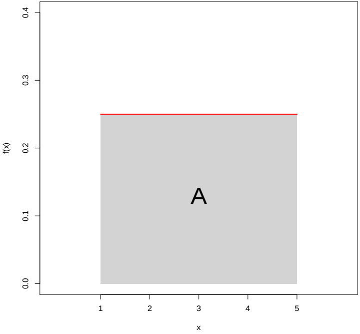
Gráfico de $f(x)$



Área total

A área total sob a curva corresponde à área de um retângulo de base $\Delta = 4$ e altura $h = \frac{1}{4}$. Logo, a área total fica dada por

$$A = \Delta \times h = 4 \times \frac{1}{4} = 1.$$



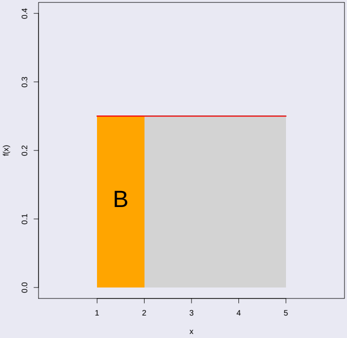
Exemplo

Área total

A área total sob a curva pode ser calculada diretamente pela solução da integral

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{1}{4} dx &= \frac{1}{4}\int_1^5 dx \\ &= \frac{1}{4} x\Big|_1^5 \\ &= \frac{1}{4}(5-1) \\ &= \frac{4}{4} = 1.\end{aligned}$$

Probabilidade de eventos



A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ corresponde à área do retângulo de base $\Delta = 1$ e altura $h = \frac{1}{4}$.
Essa área fica dada por

$$B = \Delta \times h = 1 \times \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Exemplo

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ pode ser calculada diretamente pela solução da integral

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{4} dx &= \frac{1}{4} \int_1^2 dx \\ &= \frac{1}{4} x \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{4}(2-1) \\ &= \frac{1}{4} = 0{,}25. \end{aligned}$$

Função de Distribuição Acumulada

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{4}, & 1 \leq x \leq 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

Exemplo

Cálculo da densidade a partir da distribuição acumulada

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 \leq x \leq 5, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Exemplo

Esperança e variância

$$\mathsf{E}(X) = 3$$

$$\mathsf{Var}(X) = 4/3$$

Exemplo

Probabilidade condicional

$$P(X < 3|X > 2) = 1/3$$

Sumário

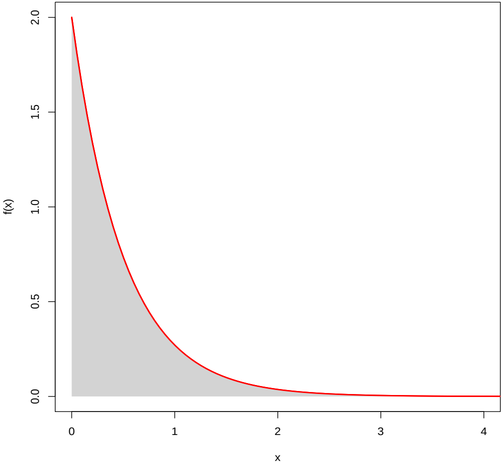
Distribuição Exponencial

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ ($X \sim$ Exp(λ)), a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

para $x > 0$, e $f(x) = 0$ para $x < 0$.

Gráfico de $f(x)$ para $\lambda = 3$



Área total

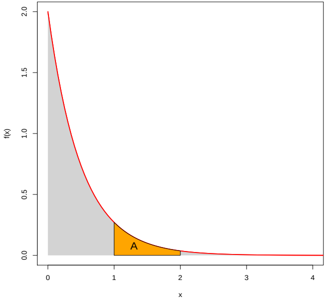
A área total sob a curva é calculada através da integral

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = 1.$$

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ corresponde à área na figura abaixo e pode ser calculada pela integral

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}. \end{aligned}$$



Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$.

Esperança

A esperança de X fica dada por

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Variância

A variância de X fica dada por

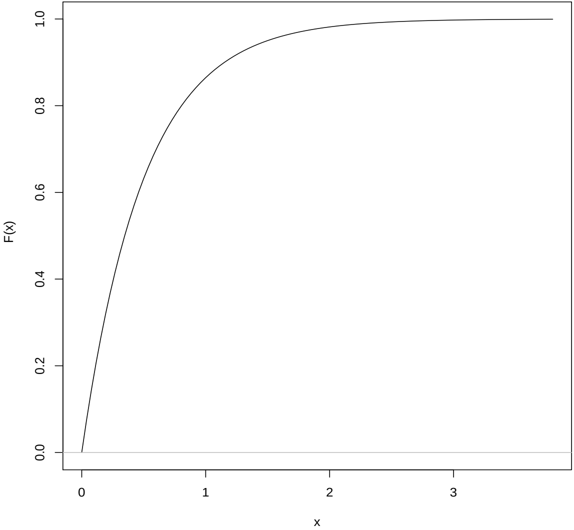
$$\mathsf{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Função de distribuição acumulada

A Função de Distribuição Acumulada de uma variável aleatória $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ fica dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases}$$

Gráfico de $F(x)$ para $\lambda = 1$



Sumário

Distribuição Normal

Se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média μ e variância σ^2, a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2},$$

para $-\infty < x, \mu < +\infty$ e $\sigma > 0$. Notação: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

A normal-padrão é quando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Gráfico de $f(x)$

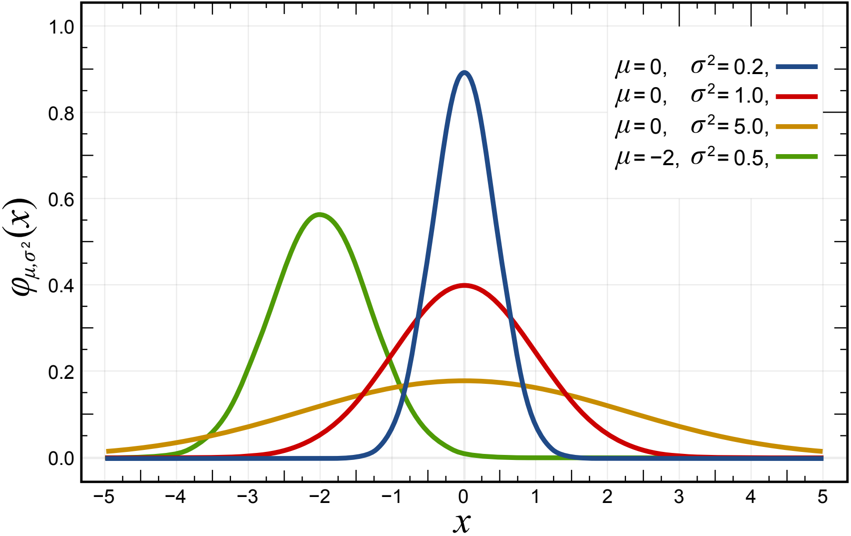
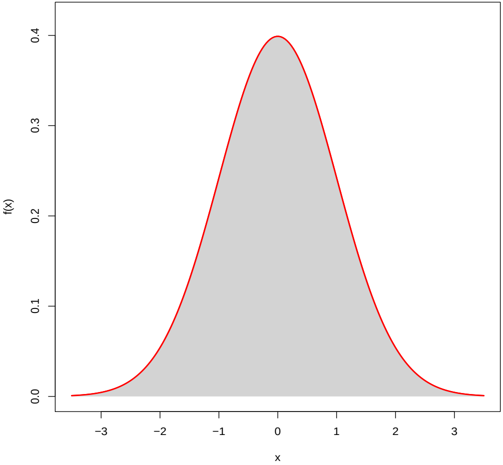


Gráfico de $f(x)$ para uma N(0,1)



Cálculo de probabilidades

Por exemplo, a probabilidade $A = P(0 \leq X \leq 1)$ pode ser calculada subtraindo os valores de uma tabela normal-padrão

$$P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = 0{,}841 - 0{,}5 = 0{,}341.$$

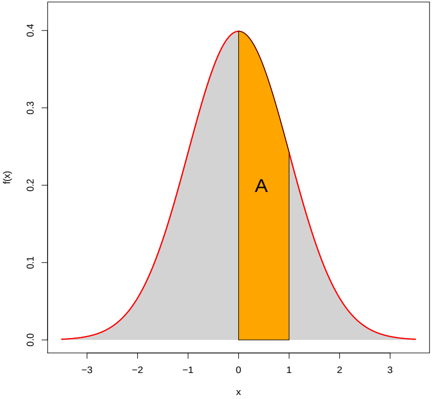
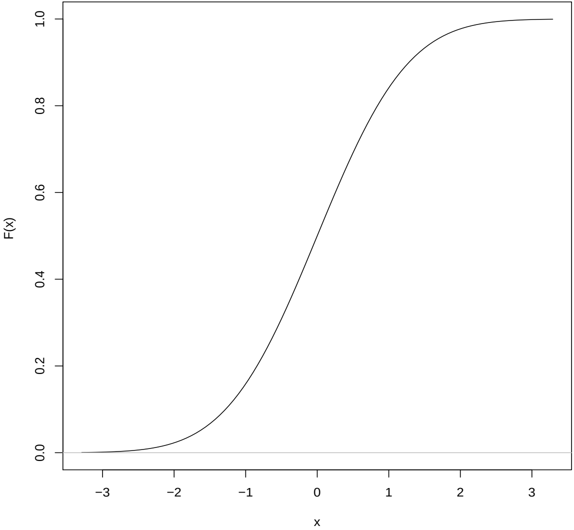


Gráfico de $F(x)$ para N(0,1)



Sumário

Exercício

O tempo de vida de uma lâmpada segue distribuição exponencial com média de 14 meses. Suponha que o custo de fabricação da lâmpada seja de R$3,00 e que o preço de venda R$8,00. O fabricante oferece uma garantia que cobre 10% das lâmpadas fabricadas. Responde às questões abaixo:

(a) Calcule a probabilidade de uma lâmpada durar menos que 10 meses.

(b) Qual o tempo que delimita a garantia? Ou seja, qual é o tempo até o qual 10% das lâmpadas estarão queimadas?

(c) Se sabemos que a lâmpada durou mais do que o tempo de garantia, qual a probabilidade de superar o tempo médio?

(d) Se a lâmpada falha no período de garantia, o fabricante devolve integralmente o valor da venda. Qual o lucro esperado por lâmpada?

Respostas

0,510

1,475

0,409

R$4,20

Exercício

Suponha que

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,x^2, & x \in [-1{,}2] \\ 0, & x \notin [-1{,}2] \end{cases}$$

Calcule c

Calcule F_X

Calcule E(X) e Var(X)

Calcule $P(X > 1|X > 0)$

Calcule f_X a partir de F_X

Respostas

$1/3$

$(x^3 + 1)/9$

$5/4$

$51/80$

$7/8$

$x^2/3$

Exercício

Os rendimentos de uma aplicação financeira são representados por uma v.a. contínua X, que pode variar entre 0 e 2. A função densidade de probabilidades abaixo descreve seu comportamento:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Qual a probabilidade do rendimento ser no máximo 1,5? E de ser inferior a 0,5?

b) Qual a probabilidade do rendimento estar entre 0,5 e 1,5?

c) Qual a probabilidade do rendimento ser no máximo um valor k, considerando:
   - $k \in]0;\ 2[$?
   - $k \in]-\infty;\ 0[$?
   - $k \in]2;\ \infty[$?

d) Qual rendimento médio e qual sua variância?

Respostas

a) $P(X \leq 1{,}5) = 0{,}4219$ e $P(X < 0{,}5) = 0{,}0156$

b) $P(0{,}5 < X \leq 1{,}5) = 0{,}4063$

c)
- $P(X \leq k) = \int_0^k \frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{k^3}{8}$, para $0 \leq k \leq 2$
- $P(X \leq k) = 0$, para $k \in\,]-\infty;\ 0[$
- $P(X \leq k) = 1$, para $k \in\,]2;\ \infty[$

d) Esperança $\mathbb{E}(X) = 1{,}5$, Variância Var$(X) = 0{,}15$

Exercício

O tempo entre a realização de duas vendas pode ser representado por uma v.a. com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x}, \quad x > 0$$

a) Encontre a função distribuição acumulada.
b) Determine $P(2 < X \leq 4)$

Repostas

O tempo entre a realização de duas vendas pode ser representado por uma v.a. com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x}, \quad x > 0$$

a) $P(X \leq x) = 1 - e^{-0{,}2x}$

b) $P(2 < X \leq 4) = 0{,}221$

Exercício

Assuma que deseja analisar a nota que um aluno tira na prova de uma determinada disciplina.

Essa nota pode variar de 0 a 10.

Admita que seja a mesma probabilidade de ocorrência em qualquer intervalo de tamanho 1, por exemplo.

Determine a probabilidade de encontrar um aluno com nota:

a) de no máximo 1 ponto;
b) entre 8 e 9 pontos;
c) exatamente 9 pontos.

Respostas

a) $P(X \leq 1) = 0{,}1$

b) $P(8 \leq X \leq 9) = 0{,}1$

c) $P(X = 9) = 0$

Exercício

O tempo, em minutos, até que uma venda seja realizada em uma loja segue uma distribuição com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} e^{-x/12}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Qual é a probabilidade de uma venda demorar mais de vinte minutos para ser feita?
b) Qual a probabilidade de uma venda demorar entre 20 e 30 minutos para ocorrer?
c) Qual é o tempo mediano de venda?

Respostas

a) $P(X > 20) = 0{,}189$

b) $P(20 \leq X \leq 30) = 0{,}107$

c) Tempo mediano: $x_{0{,}5} = 8{,}32$ minutos

Exercício

Uma montadora diz que um modelo de caminhão por ela produzido apresenta algum tipo de problema no motor após, em média, rodar 100 mil km, com um desvio padrão de 35 mil km.

Acredita-se que a distribuição da distância percorrida antes de apresentar algum tipo de problema no motor (X) é bem aproximada por uma normal.

a) Sabendo que a garantia de um caminhão é dada apenas até completar 90 mil km, qual a probabilidade de algum tipo de problema no motor acontecer após perder a garantia de fábrica?
b) Qual deve ser a garantia para que apenas 8% dos caminhões tenha direito a ela?

Respostas

a) $P(X > 90) = 0{,}6141$

b) Garantia para 8% dos caminhões: $x = 50{,}65$ mil km