Variáveis Aleatórias Discretas

Ciências Contábeis - FEA - Noturno

1^{o} Semestre 2025

Profs. Leonardo T. Rolla e Nikolai Kolev

(baseado em material previamente desenvolvido
pelo Prof. Gilberto Alvarenga Paula – CC BY-SA 4.0)

Sumário

Sumário

Objetivo de aprendizagem

Compreender as principais distribuições de probabilidade discreta e suas propriedades, aplicando-as na modelagem e resolução de problemas que envolvem incerteza e contagem de eventos.

Conteúdo abordado

1. Distribuição de Bernoulli: definição e aplicação
2. Distribuição Binomial: definição e aplicação
3. Distribuição Geométrica: definição e aplicação
4. Distribuição de Poisson: definição e aplicação
5. Distribuição Hipergeométrica: definição e aplicação

Competências adquiridas

Depois desta unidade, o aluno será capaz de:

1. Identificar situações que envolvam a distribuição de Bernoulli e utilizá-la corretamente.
2. Modelar experimentos com número fixo de tentativas usando a distribuição Binomial.
3. Aplicar a distribuição Geométrica na contagem de tentativas até o primeiro sucesso.
4. Modelar eventos raros com a distribuição de Poisson.
5. Resolver problemas envolvendo amostragem sem reposição com a distribuição Hipergeométrica.

Autoavaliação e reflexão

O aluno pode fazer os exercícios postados no Moodle e posteriormente comparar suas respostas com as soluções apresentadas, identificando possíveis erros, e eventualmente refazer os exercícios.

Além disso, é recomendável refletir sobre as dificuldades encontradas e revisar os conceitos conforme necessário.

Sumário

Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli.

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência
- assinatura de TV digital, sim ou não
- conclusão de uma corrida para pedestres, sim ou não
- pressão arterial de um paciente, normal ou alterada
- hábito de práticas esportivas, sim ou não

Definição

Uma variável aleatória X tem **distribuição de Bernoulli** com parâmetro p se a função de probabilidade de X é dada por

x	0	1
$P(X = x)$	$1 - p$	p

Denotamos $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Esperança e variância

Se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, então

$$\text{E}(X) = p, \quad \text{Var}(X) = p(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}.$$

Sumário

Motivação

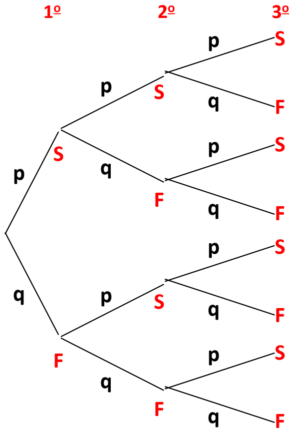
Um dado é lançado 3 vezes de forma independente. Qual a probabilidade de obter a face 5 duas vezes?

Denotando S como sendo sucesso (obter face 5 num lançamento) e F como sendo fracasso, o espaço amostral pode ser representado por

$$\Omega = \{(SSS), (SSF), (SFS), (FSS), (SFF), (FSF), (FFS), (FFF)\}.$$

Vamos considerar a variável aleatória $X =$ número de sucessos nos três lançamentos, sendo $p = P(\text{S})$ e $q = 1 - p = P(\text{F})$ em cada lançamento.

Diagrama de Árvore



Ω	Prob	X
(SSS)	p^3	3
(SSF)	p^2q	2
(SFS)	p^2q	2
(SFF)	pq^2	1
(FSS)	p^2q	2
(FSF)	pq^2	1
(FFS)	pq^2	1
(FFF)	q^3	0

Distribuição de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X = número de sucessos nos três lançamentos fica dada por

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Assim, a função de probabilidade de X pode ser expressa na forma

$$P(X = k) = \binom{3}{k} p^k (1 - p)^{(3-k)},$$

para $k = 0,1,2,3$.

Definição

A variável aleatória X correspondente ao número de sucessos em n **ensaios de Bernoulli independentes** (no sentido probabilístico) e com **mesma probabilidade** p **de sucesso em cada ensaio**, tem distribuição binomial com parâmetros n e p.

A função de probabilidade de X é expressa na forma

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{(n-k)},$$

em que $k = 0{,}1, \ldots, n$. Denotamos $X \sim \text{Bin}(n{,}p)$.

Esperança

Se $X \sim$ Bin(n,p) podemos escrever $X = X_1 + \cdots + X_n$, em que $X_i \sim$ Bernoulli(p) para $i = 1, \ldots, n$. Assim, obtemos

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = np.$$

Variância

Similarmente, como temos n ensaios independentes, então

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = np(1-p).$$

E daí segue que σ = DP$(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Aplicação

Considere uma prova com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha que o aluno escolha a resposta ao acaso.

Qual é a probabilidade de que ele acerte pelo menos 6 questões?

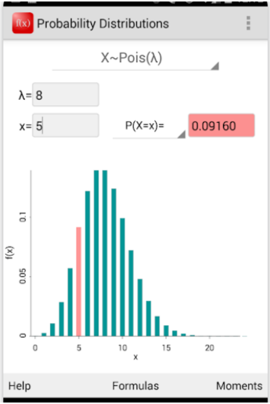
Neste caso, a variável aleatória $X =$ número de questões que o aluno acerta é tal que $X \sim \text{Bin}(n,p)$, com $n = 12$ e $p = 0{,}25$.

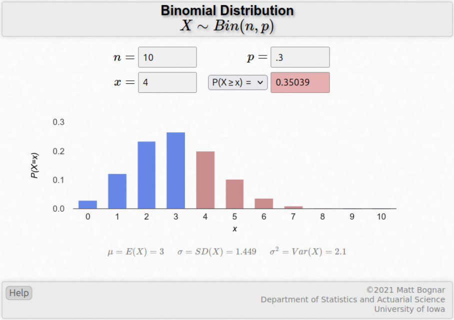
Probability Distributions ®

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.mbognar.probdist

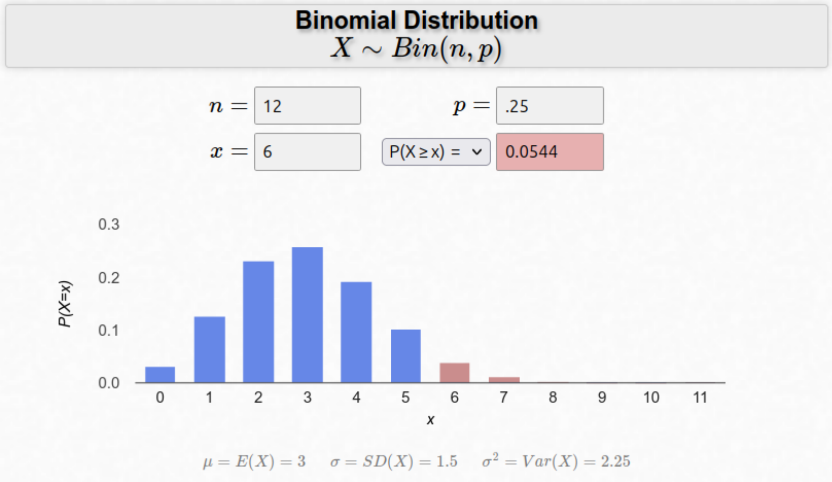
https://apps.apple.com/br/app/probability-distributions/id889106396

https://homepage.divms.uiowa.edu/~mbognar/





Solução do exemplo anterior



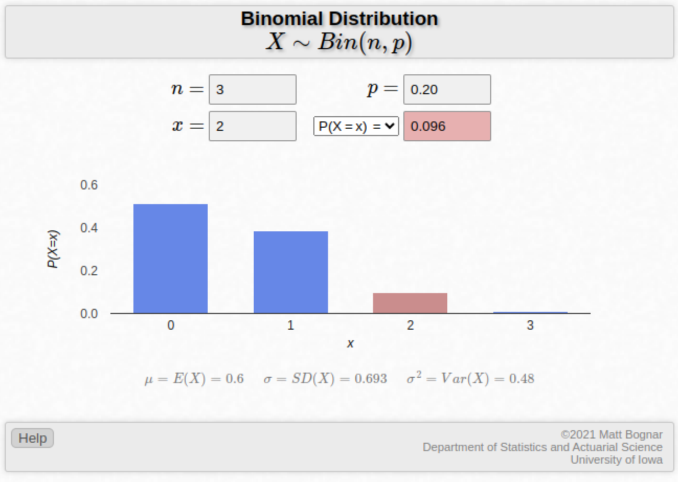
Exemplo

A probabilidade de um determinado perfil de cliente adquirir uma apólice de seguro é 0,20. Suponha que os clientes comportem-se de maneira independente, e que um corretor visitará 3 clientes em um determinado dia.

Seja X o número de negócios fechados após essas 3 visitas.

Qual a probabilidade de exatamente 2 negócios serem fechados? Isto é, $P(X = 2)$?

Solução


Binomial Distribution
$X \sim Bin(n, p)$
$n =$ 3
$p =$ 0.20
$x =$ 2
P(X = x) = 0.096
0.6
0.4
0.2
0.0
P(X=x)
0
1
2
3
x
$\mu = E(X) = 0.6$ $\sigma = SD(X) = 0.693$ $\sigma^2 = Var(X) = 0.48$
Help
©2021 Matt Bognar
Department of Statistics and Actuarial Science
University of Iowa

Sumário

Definição

Uma variável X com distribuição geométrica representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso.

A função de probabilidade de X fica dada por

x	1	2	3	4	$\dots$
$P(X=x)$	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^3$	$\dots$

E pode ser expressa na forma

$$P(X=x) = p(1-p)^{(x-1)},$$

em que $x = 1,2,\dots$. Denotamos $X \sim \text{Geom}(p)$.

Função de distribuição acumulada

Para cálculos de probabilidades, pode ser mais conveniente usar a função de distribuição acumulada, que é dada por

$$P(X \leq x) = 1 - (1-p)^x$$

para $x = 1, 2, 3, \ldots$.

Variância e esperança

- Valor esperado
  $\mu = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$
- Variância
  $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$, logo $\mathrm{DP}(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$

Aplicação

Em um certo jogo, a probabilidade de um jogador ganhar algum prêmio em cada tentativa é de 0,10.

Supondo tentativas independentes, qual a probabilidade do jogador ganhar algum prêmio nas 5 primeiras tentativas?

Seja $X =$ número de jogadas até ganhar algum prêmio.

Neste caso, $X \sim \text{Geom}(0{,}10)$.

Portanto, $P(X \leq 5) = 1 - 0{,}90^5 = 0{,}40951$ (não precisa de aplicativo)

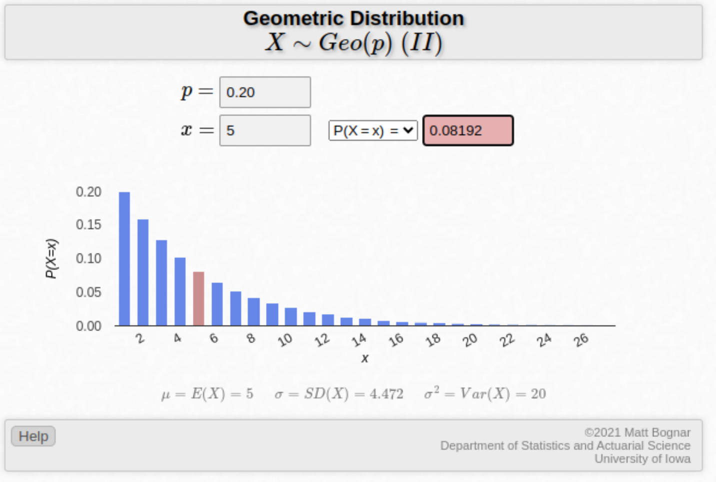
Um time de basquete tem 20% de chance de ganhar um jogo. Deseja-se modelar o número de jogos até que ocorra a primeira vitória.

Qual a probabilidade de que a **primeira vitória** ocorra na **quinta partida**?

No aplicativo, nossa definição de distribuição geométrica corresponde à Geométrica II.

A Geométrica II conta o número total de ensaios até a obtenção do primeiro sucesso, enquanto a Geométrica I conta o número de fracassos antes do primeiro sucesso.

Solução



Geometric Distribution
$X \sim Geo(p)\ (II)$
$p =$ 0.20
$x =$ 5
P(X = x) =
0.08192
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
P(X=x)
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26
x
$\mu = E(X) = 5 \quad \sigma = SD(X) = 4.472 \quad \sigma^2 = Var(X) = 20$
Help
©2021 Matt Bognar
Department of Statistics and Actuarial Science
University of Iowa

Sumário

Distribuição de Poisson

Em geral, quando há um grande número de objetos ou ocorrências bem espalhadas no tempo ou no espaço, o número de ocorrências em determinado período ou pedaço segue a chamada distribuição de Poisson.

Exemplos

- nº de acidentes numa rodovia num determinado período
- nº de chamadas telefônicas em um minuto
- nº de mensagens que chegam a um servidor em um minuto
- nº de pedidos de empréstimo num banco em um mês
- nº de defeitos em um metro quadrado de tecido
- nº de automóveis vendidos numa concessionária em um dia
- nº de uvas-passas em um panetone produzido em escala
- nº de erros de digitação em uma página de um livro

Definição

Dizemos que X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ se sua função de probabilidade é dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

para $k = 0{,}1{,}2{,}3\ldots$. Denotamos $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Esperança e variância

- Valor esperado
  $\mu = \mathrm{E}(X) = \lambda$
- Variância
  $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \lambda$, logo $\mathrm{DP}(X) = \sqrt{\lambda}$

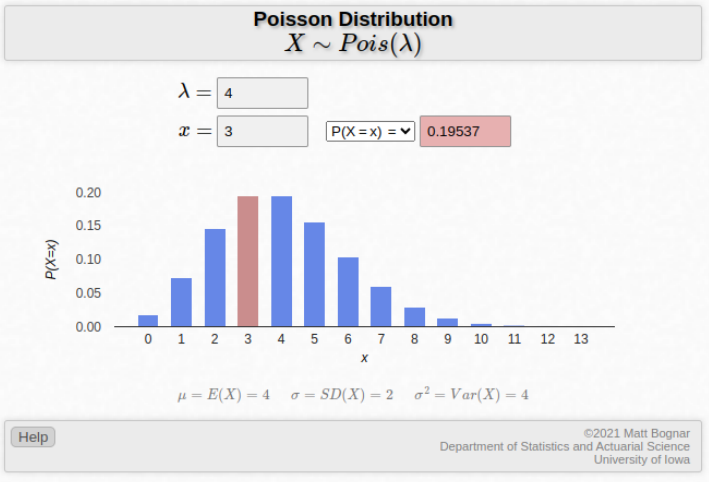
Exemplo

Uma fábrica opera 24 horas por dia. Interrupções na linha de montagem por falha humana ocorrem a uma taxa média de 4 por dia (24 horas).

Qual é a probabilidade de ocorrerem exatamente 3 interrupções em um dia de trabalho?

Solução

Seja X o número de interrupções em um dia. Como $X \sim$ Poisson$(\lambda = 4)$, queremos encontrar $\mathbb{P}(X = 3)$.



Sumário

Definição

Supor que X representa o número de sucessos em n retiradas sem reposição de uma população com N elementos, em que K desses elementos correspondem ao grupo de interesse (sucessos).

A função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

em que $0 \leq k \leq K$ e $0 \leq n - k \leq N - K$.

Denotamos $X \sim \text{Hgeom}(n, N, K)$

O valor esperado é $\mu = \mathrm{E}(X) = n\frac{K}{N}$.

Aplicação

Um jogador recebe 10 cartas do baralho.

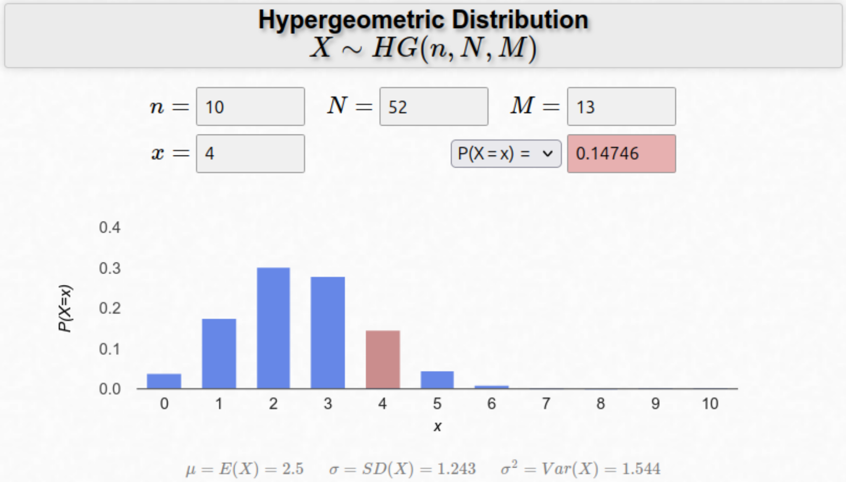
Qual a probabilidade de que 4 cartas sejam de ♠?

Qual a probabilidade de que pelo menos 5 cartas sejam de ♠?

Qual a probabilidade de que entre 2 e 5 cartas sejam de ♠?

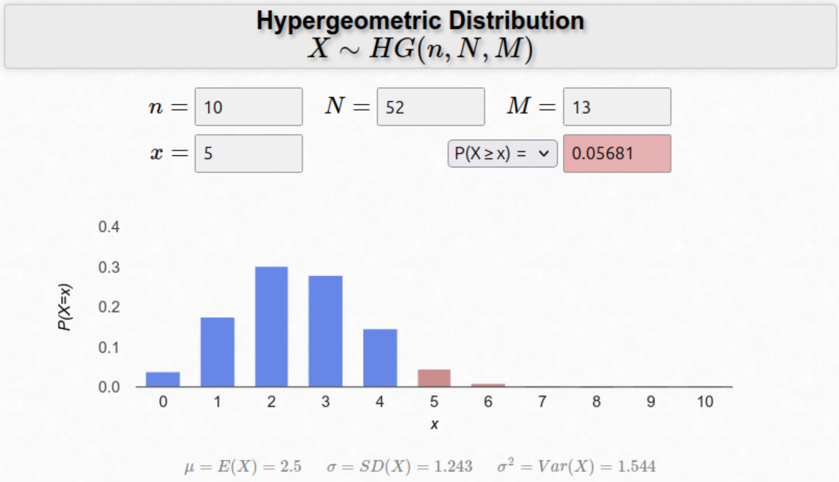
Neste caso, X tem distribuição hipergeométrica com parâmetros $n = 10$, $N = 52$, $K = 13$.

Solução



Hypergeometric Distribution
$X \sim HG(n, N, M)$
$n =$ 10
$N =$ 52
$M =$ 13
$x =$ 4
P(X = x) =
0.14746
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
P(X=x)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x
$\mu = E(X) = 2.5$
$\sigma = SD(X) = 1.243$
$\sigma^2 = Var(X) = 1.544$

Solução



Hypergeometric Distribution
$X \sim HG(n, N, M)$
$n =$ 10
$N =$ 52
$M =$ 13
$x =$ 5
P(X ≥ x) =
0.05681
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
P(X=x)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x
$\mu = E(X) = 2.5$ $\sigma = SD(X) = 1.243$ $\sigma^2 = Var(X) = 1.544$

Para a última pergunta, desenvolvemos como segue:

$$P(2 \leq X \leq 5) = P(1 < X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1)$$

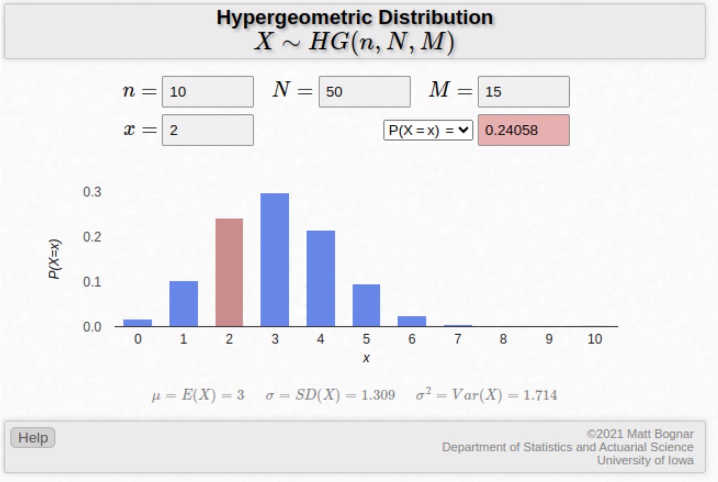
e a partir daí usamos o aplicativo.

Exemplo

De 50 investimentos gerenciados por um banco, 15 tiveram rentabilidade positiva no ano passado. Um cliente sorteia uma amostra de 10 investimentos, sem reposição.

Qual é a probabilidade de exatamente 2 terem tido rentabilidade positiva?

Seja X o número de investimentos com rentabilidade positiva na amostra. $X \sim$ Hgeom$(n = 10, N = 50, K = 15)$



Sumário

Exercício

Discuta a validade do modelo binomial nos seguintes casos.

(a) Dos alunos da USP, sorteamos 5 e contamos quantos se declaram usuários regulares do CEPEUSP;

(b) Escolhemos 20 lâmpadas ao acaso na prateleira de um supermercado, sendo 10 de uma fábrica e 10 de outra. Contamos o número total de lâmpadas defeituosas;

(c) Quinze automóveis 0 km de um mesmo fabricante e mesmo modelo são submetidos a um teste anti-poluição e contamos quantos passaram no teste;

(d) Um motorista é submetido a um teste em que deva estacionar seu veículo num pequeno espaço (isto é popularmente chamado de fazer baliza). Em 10 tentativas, contamos o número de vezes em que o motorista estacionou corretamente.

Solução

Discuta a validade do modelo binomial nos seguintes casos.

(a) Dos alunos da USP, sorteamos 5 e contamos quantos se declaram usuários regulares do CEPEUSP; **Adequado**

(b) Escolhemos 20 lâmpadas ao acaso na prateleira de um supermercado, sendo 10 de uma fábrica e 10 de outra. Contamos o número total de lâmpadas defeituosas; **Inadequado**

(c) Quinze automóveis 0 km de um mesmo fabricante e mesmo modelo são submetidos a um teste anti-poluição e contamos quantos passaram no teste; **Adequado**

(d) Um motorista é submetido a um teste em que deva estacionar seu veículo num pequeno espaço (isto é popularmente chamado de fazer baliza). Em 10 tentativas, contamos o número de vezes em que o motorista estacionou corretamente. **Inadequado**

Exercício

No maior estudo global já realizado sobre dominância manual, pesquisadores europeus concluíram que cerca de 10% da população mundial é canhota. Suponha 8 pessoas são selecionadas ao acaso da população.

(a) expresse a probabilidade de que exatamente duas pessoas sejam canhotas

(b) expresse a probabilidade de que pelo menos três pessoas sejam canhotas

(c) calcule a probabilidade de que no máximo uma pessoa seja canhota

(d) expresse a probabilidade de que entre duas e cinco (inclusive) pessoas sejam canhotas

(e) calcule o valor esperado e desvio padrão do número de pessoas canhotas, dentre as 8 selecionadas.

Solução

Seja $X =$ número de pessoas canhota.

Então $X \sim \text{Bin}(8; 0{,}10)$

Usando o aplicativo:

(a) $\mathbb{P}(X = 2) = 0{,}148$
(b) $\mathbb{P}(X \geq 3) = 0{,}0381$
(c) $\mathbb{P}(X \leq 1) = 0{,}8131$
(d) $\mathbb{P}(2 < X \leq 5) = 0{,}1869$
(e) $\mathbb{E}(X) = np = 0{,}8$ e $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 0{,}849$.

Exercício

A probabilidade de ocorrência de turbulência em um determinado percurso a ser feito por uma aeronave é de 0,6 em um circuito diário. Seja X o número de voos com turbulência em um total de 7 desses voos (ou seja, uma semana de trabalho).

(a) Quantos voos, em média, apresentarão turbulência em 1 semana de operação?

(b) Qual é o desvio padrão do número de voos com turbulência em 1 semana de operação?

(c) Qual é a probabilidade do número de voos em 1 semana estar compreendido entre a média menos 1 desvio padrão e a média mais 1 desvio padrão?

Solução

$X \sim \text{Bin}(7{,}0.6)$

(a) $\mu = \mathbb{E}(X) = np = 4{,}2$

(b) $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{np(1-p)} = 1{,}296$

(c) Usando o aplicativo:
$\mathbb{P}\left(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\right) = \mathbb{P}(2 < X \leq 5)$
$= \mathbb{P}(X \leq 5) - \mathbb{P}(X \leq 2) = 0{,}722$

Exercício

Por engano 3 peças defeituosas foram misturadas com boas formando um lote com 12 peças no total. Escolhendo-se ao acaso 4 dessas peças, determine a probabilidade de encontrar

(a) pelo menos 2 peças defeituosas;

(b) no máximo 1 defeituosa;

(c) no mínimo 1 boa.

Solução

$X \sim \text{Hgeom}(4, 12, 3)$

Usando o aplicativo:

(a) $\mathbb{P}(X \geq 2) = 0{,}236$
(b) $\mathbb{P}(X \leq 1) = 0{,}764$
(c) $\mathbb{P}(X \leq 3) = 1$

Exercício

O número de petroleiros que chegam a uma refinaria em cada dia ocorre segundo uma distribuição de Poisson, com $\lambda = 2$ petroleiros/dia. As atuais instalações podem atender, no máximo, a 3 petroleiros por dia. Se mais de 3 aportarem num dia, o excesso é enviado a outro porto.

(a) Em um dia, qual é a probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto?

(b) De quanto deverão ser aumentadas as instalações para permitir atender a todos os navios que chegarem pelo menos em 90% dos dias?

(c) Qual é o número médio de petroleiros que chegam por dia?

Solução

$X \sim$ Poisson$(\lambda = 2)$

Usando o aplicativo:

(a) $\mathbb{P}(\text{Enviar para outro porto}) = \mathbb{P}(X > 3) = 0{,}143$

(b) Determinar k tal que $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 0{,}90 \rightsquigarrow k = 4$

(c) $\mu = \mathbb{E}(X) = \lambda = 2$