Variáveis Aleatórias Discretas

Ciências Contábeis - FEA - Noturno

1º Semestre 2025

Profs. Leonardo T. Rolla e Nikolai Kolev

Sumário

Sumário

Objetivo de aprendizagem

Compreender e aplicar os conceitos de variáveis aleatórias discretas, funções de probabilidade e distribuição, além de medidas como esperança e variância, para modelar fenômenos aleatórios e analisar seu comportamento.

Conteúdo abordado

1. Definição de variável aleatória discreta e exemplos
2. Função de probabilidade: conceito e propriedades
3. Função de distribuição acumulada e sua interpretação
4. Esperança matemática: definição, interpretação, cálculo e aplicações
5. Variância: definição, interpretação, cálculo e aplicações
6. Propriedades da esperança e variância

Competências adquiridas

Depois desta unidade, o aluno será capaz de:

1. Definir e identificar variáveis aleatórias discretas.
2. Determinar e interpretar funções de probabilidade e de distribuição.
3. Calcular esperança matemática e analisar seu significado.
4. Determinar variância de uma variável aleatória.
5. Aplicar propriedades da esperança e variância na resolução de problemas.

Autoavaliação e reflexão

O aluno pode fazer os exercícios postados no Moodle e posteriormente comparar suas respostas com as soluções apresentadas, identificando possíveis erros, e eventualmente refazer os exercícios.

Além disso, é recomendável refletir sobre as dificuldades encontradas e revisar os conceitos conforme necessário.

Sumário

Variável Aleatória

Definição

Uma **variável aleatória** é uma característica numérica resultante de um experimento aleatório.

Definição

Uma variável aleatória é definida como sendo **discreta** quando o número de valores possíveis que a variável assume for finito ou infinito enumerável ($\mathbb{Z}, \mathbb{N}$, etc.).

Exemplos

- nº de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- nº de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- nº de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- nº de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano
- nº de consultas ao médico num determinado ano
- nº de domicílios com crianças menores de 6 anos
- variação no nº de acidentes de um ano para o outro ano numa determinada rodovia
- Nota obtida na prova quando corrige-se com apenas uma casa decimal

Exemplo

Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que $\omega_1 = \{$cara,cara$\}$, $\omega_2 = \{$cara,coroa$\}$, $\omega_3 = \{$coroa,cara$\}$ e $\omega_4 = \{$coroa,coroa$\}$.

Variável Aleatória

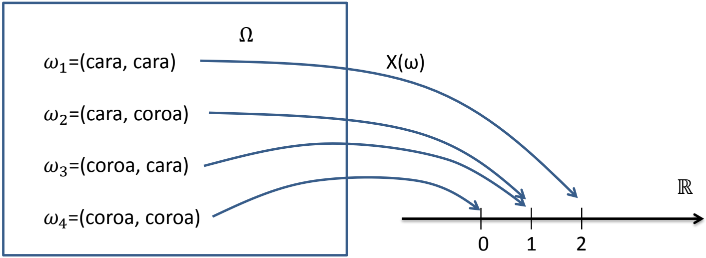
Se definimos a variável aleatória $X =$ número de caras no lançamento de duas moedas, então obtemos

$$X(\omega_1) = 2,\ X(\omega_2) = 1,\ X(\omega_3) = 1 \text{ e } X(\omega_4) = 0.$$

Ou seja, a variável aleatória X assume os valores $X = 0{,}1{,}2$.

Exemplo

Descrição da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas



Sumário

Função de probabilidade

A função de probabilidade de X é dada por

$$p(x) = P(X = x)$$

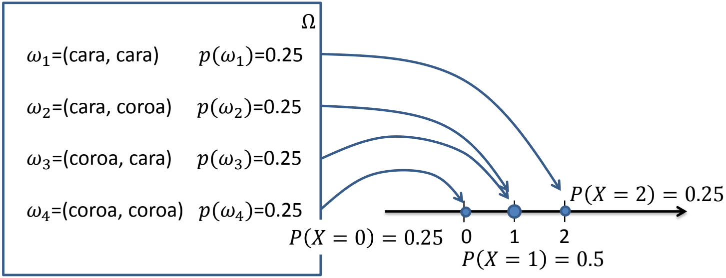
e pode ser representada pela tabela abaixo

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X = x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_k)$

- $p(x_i) \geq 0$
- $p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_k) = 1$

Exemplo

Descrição do cálculo da probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas



Exemplo

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória $X =$ número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	$0{,}25$	$0{,}50$	$0{,}25$

Função de distribuição

Uma maneira de descrever a distribuição de uma variável aleatória é através da função de distribuição acumulada, definida por

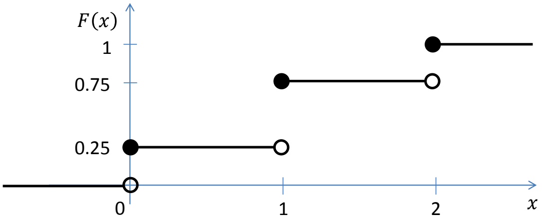
$$F(x) = P(X \leq x),$$

em que x é um número real e $F(x)$ pertence ao intervalo $[0,1]$.

Exemplo

Descrição da função de distribuição acumulada $F(x) = P(X \leq x)$ da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas

x	**0**	**1**	**2**
P(X=x)	**0,25**	**0,50**	**0,25**



Duas moedas

Portanto, a função de distribuição acumulada da variável aleatória $X =$ número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0{,}25 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0{,}75 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Propriedades da função de distribuição

F_X é "crescente" (não-decrescente)

F_X "vai de 0 a 1"
(tende a 0 para x grande negativo e tende a 1 para x grande positivo)

$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Sumário

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de valor médio, ou valor esperado, ou esperança de X o valor

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots + x_k p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i p(x_i), \end{aligned}$$

em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação $\mu = \mathrm{E}(X)$.

Cálculo Esperança

A função de probabilidade da variável aleatória $X =$ número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

A esperança de X fica então dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 0 \times 0{,}25 + 1 \times 0{,}50 + 2 \times 0{,}25 \\ &= 1{,}0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, 1 cara.

Cálculo Esperança

A função de probabilidade da variável aleatória X = soma das faces superiores é dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança de X fica então dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+\cdots+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36} = 7{,}0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, soma 7.

Variância

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de variância de X o valor esperado da variável $(X - \mu)^2$, ou seja

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (x_1 - \mu)^2 p(x_1) + \cdots + (x_k - \mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p(x_i), \end{aligned}$$

em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação $\sigma^2 = \text{Var}(X)$.

Desvio Padrão

O desvio padrão de X é definido por

$$\sigma = \text{DP}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Fórmula Alternativa

A variância de X pode, alternativamente, ser expressa na forma

$$\mathsf{Var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mu^2,$$

em que

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X^2) &= x_1^2 p(x_1) + \cdots + x_k^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i^2 p(x_i). \end{aligned}$$

Cálculo Variância

Para a variável $X =$ número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= 0^2 \times 0{,}25 + 1^2 \times 0{,}50 + 2^2 \times 0{,}25 \\ &= 0 + 0{,}50 + 1{,}0 = 1{,}50. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 1{,}50 - (1{,}0)^2 = 1{,}50 - 1{,}0 = 0{,}50.$$

E o desvio padrão

$$\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{0{,}50} \cong 0{,}707.$$

Propriedades

$$E(aX + bY) = a\,E(X) + b\,E(Y)$$

$$E(a) = a$$

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$$

Sumário

Exercício

Uma empresa oferece quatro modalidades de serviço A, B, C e D cobrando 100, 200, 300 e 400 (unidades monetárias), respectivamente. Sabe-se que um cliente contrata a modalidade A com probabilidade 0,2; a modalidade B com probabilidade 0,4; a C com probabilidade 0,3 e a D com probabilidade 0,1. Defina por X a variável que representa o ganho da empresa por cliente.

(a) Construa a distribuição de probabilidades de X.

(b) Calcule o ganho médio da empresa por cliente.

(c) Calcule o desvio padrão do ganho da empresa por cliente.

a) **Distribuição de Probabilidade de X:**

x	100	200	300	400
$\mathbb{P}(X = x)$	0,2	0,4	0,3	0,1

b) **Ganho médio (Esperança):**
$\mathbb{E}(X) = (100 \times 0{,}2) + (200 \times 0{,}4) + (300 \times 0{,}3) + (400 \times 0{,}1) = 230$

c) **Desvio padrão:**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= (100^2 \times 0{,}2) + (200^2 \times 0{,}4) + (300^2 \times 0{,}3) + (400^2 \times 0{,}1) \\ &= 61000 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 61000 - 230^2 = 8100$$

Desvio padrão $= \sqrt{8100} = 90$

Se $\mathsf{E}[X] = 1$ e $\mathsf{Var}(X) = 5$, determine

(a) $\mathsf{E}[2 + X^2]$

(b) $\mathsf{Var}(4 - 3X)$

Solução

a) $\mathbb{E}[2+X^2]$

$$\mathbb{E}[2+X^2] = \mathbb{E}[2] + \mathbb{E}[X^2]$$

Como $\mathbb{E}[2] = 2$, e sabemos que:

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathrm{Var}(X) + \left(\mathbb{E}[X]\right)^2 = 5 + 1^2 = 6$$

Logo,

$$\mathbb{E}[2+X^2] = 2 + 6 = 8$$

b) $\mathrm{Var}(4-3X)$

Usamos a propriedade da variância:

$$\mathrm{Var}(a+bX) = b^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$$

Assim,

$$\mathrm{Var}(4-3X) = (-3)^2 \times 5 = 9 \times 5 = 45$$

Uma florista faz estoque de uma flor de curta duração que lhe custa R$ 3,50 a unidade e que ela a vende a R$ 10,00 no primeiro dia em que a flor está na loja. Toda flor que não for vendida nesse primeiro dia não serve mais e é jogada fora. Seja X a variável aleatória que denota o número de flores que os fregueses compram em um dia casualmente escolhido. A florista descobriu que a função de probabilidade da procura de X é dada pela seguinte tabela.

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,1	0,4	0,3	0,2

Quantas flores a florista deveria ter em estoque a fim de maximizar a média (o valor esperado) do seu lucro?

Calcule $P(X \leq 0.7 \mid X \leq 2.5)$.

Solução

Suponha que a florista compre N flores para vender. Então o lucro L depende de N e da demanda X, de tal forma que

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(N,X) &= \text{receita} - \text{custo} \\ &= 10 \cdot \min\{N,X\} - 3{,}50 \cdot N \end{aligned}$$

Observe que não vale a pena considerar $N > 3$, pois a demanda é no máximo 3. Nosso objetivo é encontrar N que maximiza $\mathbb{E}[\mathrm{L}]$.

Solução (continuação)

Lucro esperado para cada quantidade de flores N:

Para $N = 0$:

$$\mathbb{E}[L] = 0$$

Para $N = 1$:

$$L = \begin{cases} -3{,}50 & \text{se } X = 0 \\ 6{,}50 & \text{se } X \geq 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[L] = (0{,}1)(-3{,}50) + (0{,}9)(6{,}50) = -0{,}35 + 5{,}85 = 5{,}50$$

Para $N = 2$:

$$L = \begin{cases} -7{,}00 & \text{se } X = 0 \\ 3{,}00 & \text{se } X = 1 \\ 13{,}00 & \text{se } X \geq 2 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[L] = (0{,}1)(-7{,}00) + (0{,}4)(3{,}00) + (0{,}5)(13{,}00) = -0{,}70 + 1{,}20 + 6{,}50 = 7{,}00$$

Solução (continuação)

Para $N = 3$:

$$L = \begin{cases} -10{,}50 & \text{se } X = 0 \\ -3{,}50 & \text{se } X = 1 \\ 6{,}50 & \text{se } X = 2 \\ 16{,}50 & \text{se } X = 3 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[L] = (0{,}1)(-10{,}50) + (0{,}4)(-3{,}50) + (0{,}3)(6{,}50) + (0{,}2)(16{,}50)$$
$$= -1{,}05 - 1{,}40 + 1{,}95 + 3{,}30 = 2{,}80$$

Conclusão: O estoque ótimo é **2 flores**, pois maximiza o lucro esperado: $\mathbf{7{,}00}$.

Exercício adicional: Probabilidade condicional

Calcule $P(X \leq 0.7 \mid X \leq 2.5)$.

Solução

- Seja A = $\{X \leq 0.7\}$, que corresponde a $X = 0$ e
- B = $\{X \leq 2.5\}$, que corresponde a $X = 0, 1, 2$.

Então
$$P(X \leq 0.7 \mid X \leq 2.5) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Uma vez que

$$P(A \cap B) = P(X = 0) = 0{,}1 \text{ e}$$
$$P(B) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}8,$$

tem-se que
$$P(X \leq 0.7 \mid X \leq 2.5) = \frac{0{,}1}{0{,}8} = 0{,}125$$

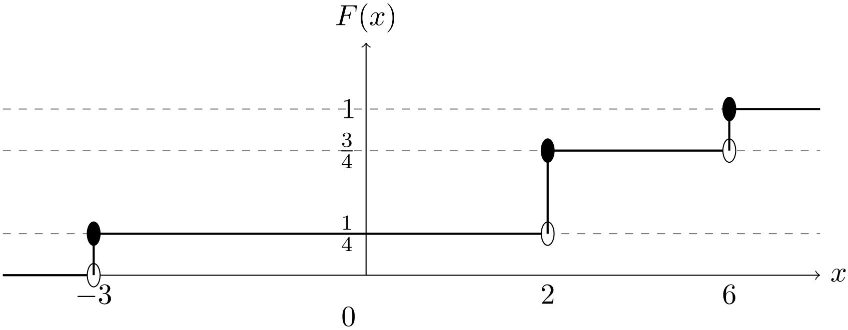
Exercício

Faça o gráfico da função da distribuição (acumulada) F da variável aleatória X, cuja função de probabilidade é

x	-3	2	6
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Solução

Gráfico da função de distribuição acumulada $F(x)$



Exercício

Determine a função de probabilidade de uma variável aleatória X cuja função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & 0 \leq x < 1 \\ 3/5 & 1 \leq x < 2 \\ 4/5 & 2 \leq x < 3 \\ 9/10 & 3 \leq x < 3{,}5 \\ 1 & x \geq 3{,}5. \end{cases}$$

Função de Probabilidade da Variável X

x	$p(x)$
0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{10}$
3,5	$\frac{1}{10}$