Noções de Probabilidade II

Ciências Contábeis - FEA - Noturno

1º Semestre 2025

Profs. Leonardo T. Rolla e Nikolai Kolev

(baseado em material previamente desenvolvido
pelo Prof. Gilberto Alvarenga Paula –)

Sumário

1 Informações sobre esta unidade

2 Noções de Contagem

3 Probabilidade Condicional
- Regra do Produto
- Regra da Probabilidade Total
- Fórmula de Bayes

4 Independência de Eventos

5 Exercícios

Objetivo de aprendizagem

Compreender e aplicar conceitos avançados de probabilidade, incluindo noções de contagem, probabilidade condicional, regras de cálculo e teoremas fundamentais, para modelar e analisar situações envolvendo incerteza.

Conteúdo abordado

1. Noções de contagem: princípio fundamental da contagem e combinações
2. Probabilidade condicional: definição e interpretação
3. Regra do produto e sua aplicação
4. Regra da probabilidade total
5. Fórmula de Bayes
6. Independência de eventos e suas implicações

Competências adquiridas

Depois desta unidade, o aluno será capaz de:

1. Aplicar técnicas de contagem para determinar o número de possíveis eventos.
2. Calcular e interpretar probabilidades condicionais.
3. Utilizar a regra do produto para encontrar probabilidades conjuntas.
4. Empregar a Regra da Probabilidade Total para resolver problemas probabilísticos.
5. Aplicar a Fórmula de Bayes para atualizar probabilidades com base em novas informações.
6. Determinar e interpretar a independência entre eventos.

Autoavaliação e reflexão

O aluno pode fazer os exercícios postados no Moodle e posteriormente comparar suas respostas com as soluções apresentadas, identificando possíveis erros, e eventualmente refazer os exercícios.

Além disso, é recomendável refletir sobre as dificuldades encontradas e revisar os conceitos conforme necessário.

Sumário

1 Informações sobre esta unidade

2 Noções de Contagem

3 Probabilidade Condicional
- Regra do Produto
- Regra da Probabilidade Total
- Fórmula de Bayes

4 Independência de Eventos

5 Exercícios

Princípio Multiplicativo

Suponha que cada objeto de uma família pode ser especificado em duas etapas, de forma que na primeira etapa há m opções e, independentemente do resultado da primeira etapa, na segunda etapa há n opções. Suponha também que escolhas diferentes sempre resultem em objetos diferentes. Então a família tem $m \times n$ elementos.

Observação

Pode ser usado recursivamente para mais de duas etapas.

Número de palavras

Quantas palavras de 3 letras podemos formar com um alfabeto de 26 letras?
Uma palavra pode ser especificada em 3 etapas, em cada etapa temos 26 letras. Portanto, podemos formar $26 \times 26 \times 26$, ou 26^3 palavras com 3 letras.
(Claro que a maioria dessas palavras não estão em nenhum dicionário da língua portuguesa, estamos apenas contando as possibilidades...)

Regra geral

Com um alfabeto com n letras, há n^k palavras de tamanho k.

Exemplo

Joga-se uma moeda equilibrada 7 vezes.
Neste caso, o espaço amostral pode ser
$\Omega = \{x = (x_1,x_2,\ldots,x_7) : x_j \in \{0,1\}$ para todo $j = 1,\ldots,7\}$, se convencionamos que 0 e 1 representam "cara" e "coroa".
Vejamos que Ω é o conjunto de palavras de tamanho 7 no alfabeto $\{0,1\}$, ou seja Ω tem $2^7 = 128$ elementos.
Como a moeda é equilibrada, vale a hipótese de equiprobabilidade, e qualquer sequência específica, como 0000000, 1111111, 0101010, ou 0010111 tem probabilidade $\frac{1}{128}$.

Definição

Uma permutação de um dado conjunto é qualquer forma de ordenar seus elementos.

Número de permutações

O número de possíveis permutações de um conjunto de n elementos é

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

A notação "$n!$" lê-se "n fatorial".
Mais formalmente, definimos $0! = 1$ e $n! = n \times (n-1)!$.

Por quê?

Por que $n!$ permutações?

Basta usar o princípio multiplicativo recursivamente para justificar a fórmula. Para isso, especificamos uma permutação em n etapas:

- n escolhas para o primeiro elemento
- $n - 1$ escolhas para o segundo elemento
- $\vdots$
- 2 escolhas para o penúltimo elemento
- 1 escolha para o último elemento

Exemplo

Quantas são as permutações do conjunto $\{1,2,3\}$?

$$(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).$$

Ou seja, são 6 permutações, coerente com a fórmula $3! = 6$.

Exemplo

Quantas são as permutações do conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$?
Pela fórmula, são $6! = 720$.
Não vamos escrever a lista toda...

Definição

Uma combinação de tamanho k de um dado conjunto é qualquer forma de selecionar k elementos desse conjunto, sem distinção de ordem.

Número de combinações

Dado um conjunto com n elementos, o número de combinações possíveis de tamanho k é dado por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

A notação "$\binom{n}{k}$" lê-se "combinações de n, k a k" ou, mais vulgarmente, "n escolhe k".

Exemplo

Num campeonato de futebol, 6 equipes foram classificadas para a fase final, em que todas se enfrentam.
Quantas partidas deverão ocorrer neste hexagonal final?
Tomando-se todas as combinações possíveis, temos

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

partidas possíveis.
Escrevendo a lista completa:

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\},$$
$$\{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}.$$

Por que $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ combinações?

Podemos justificar a fórmula usando o princípio multiplicativo e resolvendo uma equação.
Vamos especificar uma permutação de n elementos em três etapas:

- Escolhemos quais serão os k elementos que vão aparecer na frente: x opções.
- Permutamos os k elementos que aparecem na frente: $k!$ opções.
- Permutamos os elementos que aparecem depois: $(n-k)!$ opções.

O resultado final é dado pelo produto:

$$n! = x \cdot k! \cdot (n-k)!.$$

Portanto, há $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ forma de escolher k elementos.

Loterias

Calcule a probabilidade dos eventos descritos abaixo

- A: um apostador ganhar na Mega-Sena com uma aposta mínima

$$P(A) = \frac{1}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{50.063.860}$$

- B: um apostador que jogou 8 números ganhar na Mega-Sena

$$P(B) = \frac{\binom{8}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{1.787.995}$$

Moedas

Jogamos uma moeda equilibrada 7 vezes.
Qual a probabilidade de observar 4 caras e 3 coroas?
Já sabemos que $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\} = \{0,1\}^7$ é o conjunto das palavras de 7 letras no alfabeto $\{0,1\}$, e $\#\Omega = 2^7$.
O evento A corresponde ao conjunto de palavras formadas por 4 caras e 3 coroas.
Essas palavras podem ser determinadas escolhendo-se as 4 posições a serem ocupadas pela letra "1", logo há $\binom{7}{4}$ possibilidades.
Portanto, a probabilidade desse evento é dada por

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{7}{4}}{2^7} = \frac{35}{128}.$$

1 Informações sobre esta unidade

2 Noções de Contagem

3 Probabilidade Condicional
- Regra do Produto
- Regra da Probabilidade Total
- Fórmula de Bayes

4 Independência de Eventos

5 Exercícios

Definição

Sejam A e B dois eventos quaisquer em um experimento aleatório. Se $P(B) > 0$, definimos

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

A notação "$P(A|B)$" lê-se "probabilidade condicional de A dado B". Se $P(B) = 0$, podemos definir $P(A|B) = P(A)$, ou deixar sem definir.

Exemplo

Uma empresa tem 15.800 funcionários classificados quanto ao setor onde trabalham, idade e sexo. Os dados estão na tabela a seguir.

Setor	Sexo	Idade		
		0–25	25–40	40 ou mais
Administrativo	Homem (H)	1100	2300	2000
	Mulher (M)	900	2200	1800
Técnico	Homem (H)	600	1400	1400
	Mulher (M)	200	1100	800

Se um funcionário é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade que

- tenha menos de 25 anos, dado que trabalha no setor técnico
- seja do sexo feminino, dado que tem menos de 25 anos
- trabalhe no setor técnico, dado que é do sexo feminino e tem menos de 25 anos
- tenha entre 25 e 40 anos, dado que é do sexo masculino

Regra do Produto

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Exemplo

No exemplo anterior, qual é a probabilidade de que um funcionário é escolhido ao acaso

- seja do sexo feminino e tenha menos de 25 anos
- trabalhe no setor técnico, seja do sexo feminino e tenha menos de 25 anos

Descrição

Numa pesquisa sobre hábitos de fumar de uma população, constatou-se que 25% dos homens entrevistados fumam, 17% das mulheres fumam e 60% dos entrevitados eram homens.

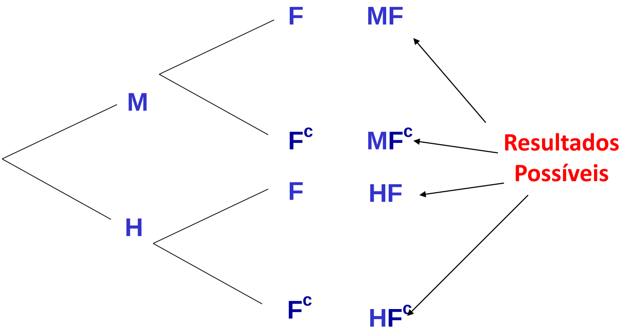
Pergunta

Qual a probabilidade de uma pessoa sorteada ao acaso dessa população ser fumante?

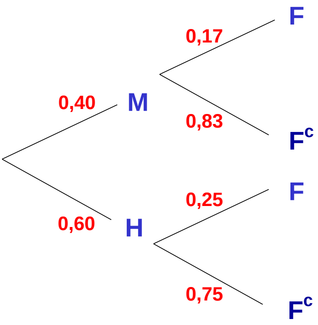
Eventos

- F: ser fumante
- M: ser do sexo feminino
- H: ser do sexo masculino

Diagrama de Árvore



Cálculo de Probabilidades



MF $P(MF) = 0{,}40 \times 0{,}17 = 0{,}068$

MF^c $P(MF^c) = 0{,}40 \times 0{,}83 = 0{,}332$

HF $P(HF) = 0{,}60 \times 0{,}25 = 0{,}150$

HF^c $P(HF^c) = 0{,}60 \times 0{,}75 = 0{,}450$

P(Fumante) = P(MF) + P(HF) = 0,068 + 0,150 = 0,218

Partição do Espaço Amostral

Sejam Ω um espaço amostral e $A_1, \ldots, A_n$ eventos dois a dois disjuntos e exaustivos de Ω, isto é

- $\Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$

Então dizemos que $\{A_1, ..., A_n\}$ é uma partição de Ω.

Regra da Probabilidade Total

Sejam Ω um espaço amostral e $\{A_1, ..., A_n\}$ uma partição de Ω. Para um evento qualquer B temos que

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

Partição em dois eventos

Um uso muito comum, como feito no exemplo anterior, é considerar a partição dada por $\{A, A^c\}$.

Fórmula de Bayes

A Fórmula de Bayes, na sua forma mais pura, diz que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)}{P(B)} P(A).$$

Se $A = A_i$ é um membro de uma partição $\{A_1, \ldots, A_n\}$, e as probabilidades $P(A_j)$ e $\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)$ são conhecidas, usando a regra da probabilidade total essa fórmula se torna

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)}.$$

Exemplo

Pergunta

No exemplo anterior, qual a probabilidade de uma pessoa sorteada ao acaso daquela população ser mulher, dado que é fumante?

Sumário

1 Informações sobre esta unidade

2 Noções de Contagem

3 Probabilidade Condicional

- Regra do Produto
- Regra da Probabilidade Total
- Fórmula de Bayes

4 Independência de Eventos

5 Exercícios

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$P(A|B) = P(A).$$

Consequência

Da definição de probabilidade condicional temos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Logo, a independência entre A e B é equivalente a

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemplos

Lançamento de dois dados

Lançamos dois dados e consideramos:
$A =$ "o primeiro dado é par"
$B =$ "a soma dos dois dados é par"

Carta do baralho

Sorteamos uma carta do baralho e consideramos:
$A =$ "a carta é um rei"
$B =$ "a carta é de copas"

Sumário

1. Informações sobre esta unidade
2. Noções de Contagem
3. Probabilidade Condicional
   - Regra do Produto
   - Regra da Probabilidade Total
   - Fórmula de Bayes
4. Independência de Eventos
5. Exercícios

Exercício

De três eventos A, B e C, de um mesmo experimento aleatório, suponha que A e B sejam independentes e que B e C sejam mutuamente exclusivos. Considere as seguintes probabilidades: $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}50$, $P(C) = 0{,}32$ e $P(A|C) = 0{,}15$.

Calcular as probabilidades de:

- B e C ocorrerem simultaneamente.
- Ocorrer ao menos um dentre A e B.
- B não ocorrer.
- Ocorrerem os três simultaneamente.
- A e C ocorrerem simultaneamente.

Exercício

De três eventos A, B e C, de um mesmo experimento aleatório, suponha que A e B sejam independentes e que B e C sejam mutuamente exclusivos. Considere as seguintes probabilidades: $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}50$, $P(C) = 0{,}32$ e $P(A|C) = 0{,}15$.

Calcular as probabilidades de:

- B e C ocorrerem simultaneamente. 0
- Ocorrer ao menos um dentre A e B. 0,625
- B não ocorrer. 0,5
- Ocorrerem os três simultaneamente. 0
- A e C ocorrerem simultaneamente. 0,048

Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada ou carne. Durante um dia foram anotadas as preferências de refeições e o sexo dos 200 clientes que consumiram no restaurante. A tabela a seguir exibe os resultados obtidos nesse dia.

A tabela a seguir exibe os resultados obtidos nesse dia:

	S	C	Total
M	30	120	150
F	35	15	50
Total	65	135	200

Exercício (cont)

Selecionando aleatoriamente um dos fregueses desse dia:

- qual é a probabilidade de ser do sexo masculino? e do sexo feminino?
- qual é a probabilidade de preferir a salada e ser do sexo masculino?
- qual é a probabilidade de preferir salada dado que ele é do sexo masculino?
- qual é a probabilidade de preferir um prato à base de carne e ser do sexo feminino?
- qual é a probabilidade de ser do sexo feminino dado que escolheu um prato à base de carne?

Exercício (cont)

Selecionando aleatoriamente um dos fregueses desse dia:

- qual é a probabilidade de ser do sexo masculino? e do sexo feminino? 0,75 e 0,25
- qual é a probabilidade de preferir a salada e ser do sexo masculino? 0,15
- qual é a probabilidade de preferir salada dado que ele é do sexo masculino? 0,20
- qual é a probabilidade de preferir um prato à base de carne e ser do sexo feminino? 0,075
- qual é a probabilidade de ser do sexo feminino dado que escolheu um prato à base de carne? 0,1111

Exercício

Uma companhia de seguros acredita que pessoas possam ser divididas em duas classes: aquelas que são propensas a acidentes e aquelas que não são. A estatística da companhia mostra que uma pessoa propensa a acidentes tem probabilidade de 0,38 de sofrer um acidente dentro de um período fixo de I ano, enquanto essa probabilidade cai para 0,13 no caso de uma pessoa não propensa a acidentes.

Se supomos que 30% da população é propensa a acidentes, qual é a probabilidade de que um novo segurado sofra um acidente no período de um ano posterior a compra de sua apólice?

Se selecionamos um segurado dentre todos os que sofreram acidentes durante o período de um ano, qual a probabilidade de que seja propenso a acidentes?

Exercício

Uma companhia de seguros acredita que pessoas possam ser divididas em duas classes: aquelas que são propensas a acidentes e aquelas que não são. A estatística da companhia mostra que uma pessoa propensa a acidentes tem probabilidade de 0,38 de sofrer um acidente dentro de um período fixo de I ano, enquanto essa probabilidade cai para 0,13 no caso de uma pessoa não propensa a acidentes.

Se supomos que 30% da população é propensa a acidentes, qual é a probabilidade de que um novo segurado sofra um acidente no período de um ano posterior a compra de sua apólice? 0,205

Se selecionamos um segurado dentre todos os que sofreram acidentes durante o período de um ano, qual a probabilidade de que seja propenso a acidentes? 0,556

Exercício

Suponha 57% dos habitantes de uma cidade fazem parte de algum programa social do governo, e que 63,2% são favoráveis a um certo projeto municipal, e que a participação em programas sociais é independente da opinião do morador sobre o projeto municipal. Encontre a probabilidade de que um habitante desta cidade selecionado ao acaso seja

- participante de algum programa social ou favorável ao projeto municipal.
- participante de algum programa social e contra o projeto municipal.
- favorável ao projeto municipal, mas que não participe de programas sociais.
- não participante de programas sociais e contra o projeto municipal.
- favorável ao projeto municipal, dado que participa de algum programa social.

Exercício

Suponha 57% dos habitantes de uma cidade fazem parte de algum programa social do governo, e que 63,2% são favoráveis a um certo projeto municipal, e que a participação em programas sociais é independente da opinião do morador sobre o projeto municipal. Encontre a probabilidade de que um habitante desta cidade selecionado ao acaso seja

- participante de algum programa social ou favorável ao projeto municipal. 0,842
- participante de algum programa social e contra o projeto municipal. 0,210
- favorável ao projeto municipal, mas que não participe de programas sociais. 0,272
- não participante de programas sociais e contra o projeto municipal. 0,158
- favorável ao projeto municipal, dado que participa de algum programa social. 0,632