

MAE0219 – Lista de Exercícios 06

Departamento de Estatística

1o semestre de 2025

Exercício 1. Um par de dados equilibrados é lançado. Seja X a variável aleatória denotando o menor dos dois números observados.

(a) Encontre a tabela da distribuição dessa variável.

Solução. Combinações para cada x :

$X = 1$: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)

$X = 2$: (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)

$X = 3$: (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3), (5,3), (6,3)

$X = 4$: (4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (6,4)

$X = 5$: (5,5), (5,6), (6,5)

$X = 6$: (6,6) Número de combinações: $6 \times 6 = 36$

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

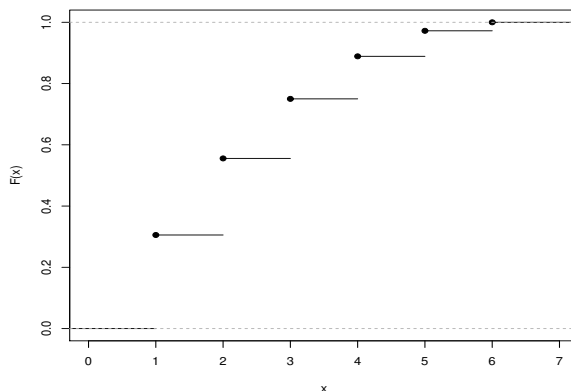
(b) Construa o gráfico de função de distribuição cumulativa para essa variável.

Solução. Definindo a função acumulada

$$F_X(x) = P(X \leq x),$$

temos:

$$F_X(1) = \frac{11}{36}, \quad F_X(2) = \frac{11+9}{36} = \frac{20}{36}, \quad F_X(3) = \frac{11+9+7}{36} = \frac{27}{36},$$
$$F_X(4) = \frac{11+9+7+5}{36} = \frac{32}{36}, \quad F_X(5) = \frac{11+9+7+5+3}{36} = \frac{35}{36}, \quad F_X(6) = \frac{36}{36} = 1.$$



(c) Achar a média, a variância e o desvio padrão de X .

Solução.

$$E[X] = 1 \cdot \frac{11}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{7}{36} + 4 \cdot \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{91}{36} = 2.5278.$$

$$E[X^2] = 1^2 \frac{11}{36} + 2^2 \frac{9}{36} + 3^2 \frac{7}{36} + 4^2 \frac{5}{36} + 5^2 \frac{3}{36} + 6^2 \frac{1}{36} = \frac{301}{36} = 8.3611.$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 8.3611 - (2.5278)^2 = 1.9715.$$

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{1.9715} = 1.4041.$$

(d) Repetir itens anteriores para variável $Y = 6 - X$.

Solução.

$$E[Y] = E[6 - X] = E[6] - E[X] = 6 - 2.5278 = 3.4722.$$

Como a variância de uma constante é zero, temos:

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(6 - X) = (-1)^2 \text{Var}(X) = \text{Var}(X) = 1.9715.$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\text{Var}(Y)} = \sqrt{1.9715} = 1.4041.$$

A solução dos itens (a) e (b) será omitida.

Exercício 2. Um jogador lança três moedas honestas. Ganha R\$8,00 se 3 caras ocorrerem, R\$3,00 se 2 caras ocorrerem e R\$1,00 se somente 1 cara ocorrer. Perde R\$10,00 se não ocorrerem caras. Calcule o ganho esperado do jogador.

Resposta. R\$1,25.

Exercício 3. Em uma produção industrial, uma determinada peça é produzida com defeito com probabilidade 0,03, e nesse caso ela tem probabilidade 0,2 de ser recuperável. O custo por cada peça produzida é R\$3,50, que será acrescido de mais R\$0,80 se precisar ser recuperada. As peças irrecuperáveis são descartadas. Sabendo que cada peça é vendida individualmente a R\$5,00,

(a) Encontre a distribuição de probabilidade da variável aleatória L : lucro por peça produzida.

Solução. Lucro:

$$\begin{aligned}\ell_{\text{boa}} &= 5 - 3,5 = 1,5, \\ \ell_{\text{recup}} &= 5 - 3,5 - 0,8 = 0,7, \\ \ell_{\text{irrecup}} &= 0 - 3,5 = -3,5.\end{aligned}$$

Probabilidade: $P(\text{defeituosa}) = 0,03$. Entre as defeituosas, 20% são recuperáveis, logo $0,03 \times 0,20 = 0,006$; as demais (80%) são descartadas, $0,03 \times 0,80 = 0,024$. A probabilidade de a peça sair boa é o complemento: $1 - 0,03 = 0,97$.

Resposta.

l	-3,50	0,70	1,50
$p(l)$	0,024	0,006	0,97

(b) Qual é o lucro médio por peça produzida? E o desvio padrão do lucro?

Solução.

$$\mu = \sum \ell p(\ell) = (1,50)(0,97) + (0,70)(0,006) + (-3,50)(0,024) = \mathbf{R\$ 1,3752}.$$

$$\sigma = \sqrt{\sum \ell^2 p(\ell) - \mu^2} = \sqrt{(1,50)^2(0,97) + (0,70)^2(0,006) + (-3,50)^2(0,024) - 1,3752^2} = \mathbf{R\$ 0,7670}.$$

Resposta. R\$1,3752, R\$0,7670

(c) Em um lote com 10.000 peças, qual é o lucro esperado?

Solução.

$$E[\text{lucro do lote}] = 10\,000 \times E[\ell] = 10\,000 \times \mu = 10\,000 \times 1,3752 = \mathbf{R\$ 13\,752,00}.$$

Resposta. R\$13.752,00

Exercício 4. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1/2, & -1 \leq x < 0 \\ 3/5, & 0 \leq x < 1 \\ 4/5, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

e seja $Y = X^2$.

- (a) Encontre a função de probabilidade da variável X .

Resposta. $p_X(-1) = 1/2$, $p_X(0) = 1/10$, $p_X(1) = 1/5$, $p_X(2) = 1/5$, $p_X(x) = 0$ para qualquer outro valor de x .

- (b) Calcule $\text{Var}(X)$.

Resposta. 1,49

- (c) Encontre a função de probabilidade da variável Y .

Resposta. $p_Y(0) = 1/10$, $p_Y(1) = 7/10$, $p_Y(4) = 1/5$, $p_Y(y) = 0$ para qualquer outro valor de y .

- (d) Calcule $\text{Var}(Y)$.

Resposta. 1,65

Exercício 5. Uma moeda enviesada tem probabilidade de cara igual a 0,4. Para dois lançamentos independentes dessa moeda, estude o comportamento da variável *número de caras* e responda:

(a) Qual é a probabilidade de não sair cara?

Resposta. 0,36

(b) Qual é o valor esperado para o número de caras?

Resposta. 0,8

(c) Qual é a variância para a variável *número de caras*?

Resposta. 0,48

Exercício 6. Um caminho para chegar a uma festa pode ser dividido em duas etapas. Sem enganos, o trajeto é feito em 1 hora. Se enganos acontecem na primeira etapa, acrescenta 10 minutos ao tempo do trajeto. Para enganos na segunda etapa, o acréscimo é de 20 minutos. Admita que a probabilidade de engano é de 0,1 e 0,2 para a primeira e segunda etapas, respectivamente.

(a) Qual a probabilidade de haver atraso?

Resposta. 0,28

(b) Qual a probabilidade de haver atraso, e este atraso não passar de 20 minutos?

Resposta. 0,26