

Física 2 – Ciências Moleculares

Caetano R. Miranda

AULA 21 – 21/05/2025

crmiranda@usp.br



Com a alteração cronograma:

CRONOGRAMA TENTATIVO - FÍSICA II - CCM					
DATA	aula n°	Segundas (16h - 18h)	aula n°	Quartas (09h - 12h)	DATA
24/2	1	Apresentação do curso	2	Projeto - Definição	26/2
3/3	Feriado	Carnaval	Feriado	Carnaval	5/3
10/3	3	Revisão matemática	4	Projeto - Ideação	12/3
17/3	5	DEMO 1 - Pressão	6	Estática dos Fluidos	19/3
24/3	7	DEMO 2 - Hidrodinâmica	8	Hidrodinâmica	26/3
31/3	9	DEMO 3 - Hidrodinâmica II	10	Hidrodinâmica	2/4
7/4	11	Revisão - P1	12	PROVA 1	9/4
14/4	Feriado	Semana Santa	Feriado	Semana Santa	16/4
21/4	Feriado	Tiradentes	13	Oscilações I	23/4
28/4	14	DEMO 4 - Corda vibrante / Molas / Ondulatória	15	Oscilações II	30/4
5/5	16	Ondas	17	Ondas	7/5
12/5	18	DEMO 5 - Barulhinho bom	19	Som	14/5
19/5	20	DEMO 6 - Fenômenos Térmicos e Gases	21	Revisão - P2	21/5
26/5	22	DEMO 7 - Máquinas térmicas	23	PROVA 2	28/5
2/6	24	Primeira Lei e Gases	25	Segunda Lei	4/6
9/6	26	Projeto	27	Projeto	11/6
16/6	Feriado	Corpus Christi	Feriado	Corpus Christi	18/6
23/6	28	DEMO 8 - Cinética & Mecânica Estatística	29	Cinética dos Gases e Mecânica Estatística	25/6
30/6	30	Apresentações	31	PROVA SUB / VISTA	2/7

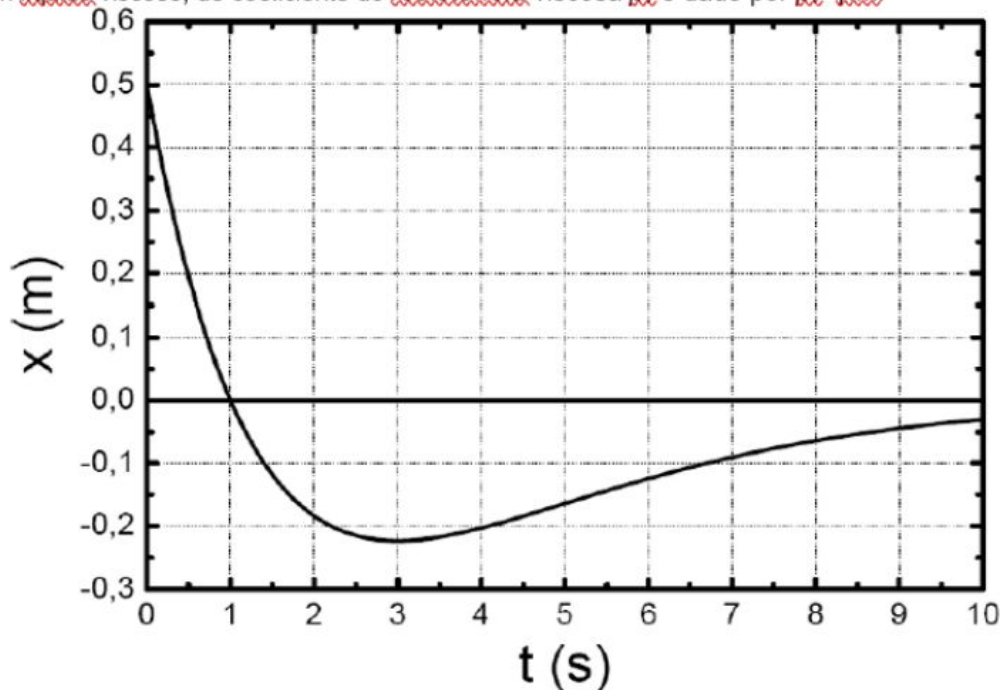
ENTREGA 1

ENTREGA 2

ENTREGA 3

Questão 1:

Tal qual realizado na demonstração em aula, o gráfico de $x(t)$, mostrado na figura abaixo (P1), representa a equação horária de um oscilador criticamente amortecido, para um sistema composto de um corpo de massa $m = 1,0$ kg preso a uma mola de constante elástica k e imerso em um líquido viscoso, de coeficiente de resistência viscosa ρ_v e dado por $\rho_v = \gamma m$.



- (a) Em que instante de tempo a velocidade do corpo será nula, no intervalo de tempo mostrado no gráfico? (1 ponto)
- (b) A equação horária $x(t)$ pode ser escrita como $x(t) = e^{-\gamma t/2}(A + Bt)$. Determine os valores de A e B da equação. (1 ponto)
- (c) Determine o coeficiente de resistência viscosa ρ_v e a constante elástica k da mola. (1 ponto)
- (d) Determine o valor da velocidade inicial do oscilador. (1 ponto)

Questão 2:

Problema 2 (3 pontos)

Uma corda de comprimento l está distendida, com uma extremidade presa a um suporte e a outra extremidade livre.

- (a) Modele matematicamente o problema expressando a equação da corda e as condições de contorno envolvidas. (0.5 ponto)
- (b) Ache as frequências $\underline{\mathbf{v}}_n$ dos modos normais de vibração da corda. (1 ponto)
- (c) Desenhe a forma da corda associada aos três modos de vibração mais baixos (em ordem de frequência crescente). A velocidade de ondas na corda é $\mathbf{v}$. (1.5 pontos)

Questão 3:

Problema 3 (3 pontos)

Uma conta de massa m enfiada num aro vertical fixo de raio r , no qual desliza sem atrito, desloca-se em torno do ponto mais baixo, de tal forma que o ângulo θ (Figura P.3 abaixo) permanece pequeno. Mostre que o movimento é harmônico simples (1.5 pontos) e calcule o período (1.5 pontos).

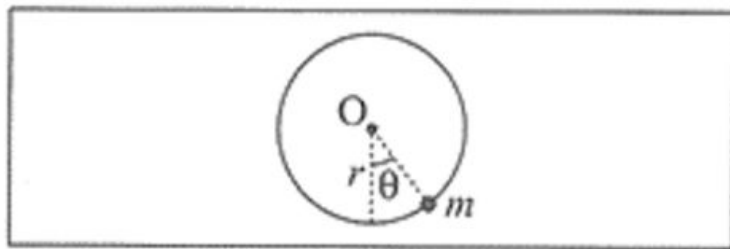


Figura P.3

Questão bônus:

Bonus (1 ponto)

- (a) Como o som no ar difere do som na água? Discuta em termos das propriedades intrínsecas das ondas sonoras. (0.5 ponto)
- (b) Em havendo um batimento no ar entre 2 ondas sonoras a cada 3 segundos, quanto seria esse batimento desse som propagando em água? (0.2 pontos)
- (c) Como soaria o som de uma orquestra em um concerto no fundo do mar em relação a uma apresentação ao ar livre? (0.3 pontos)

Revisão ondas:

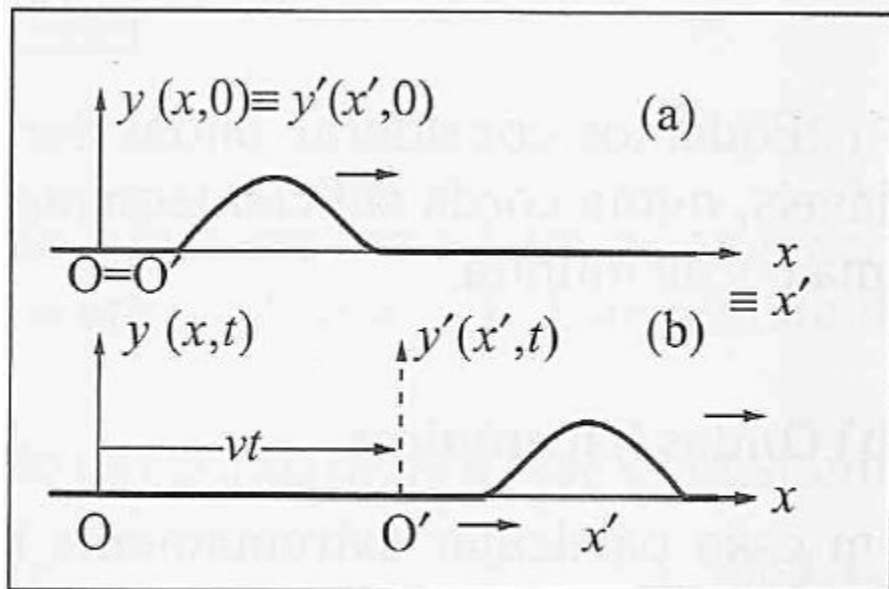


Figura 5.5 — Onda progressiva para a direita

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

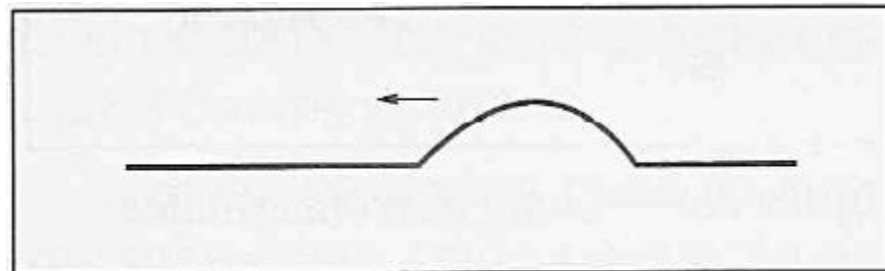


Figura 5.6 — Onda progressiva para a esquerda

$$y(x,t) = g(x + vt)$$

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Revisão ondas:

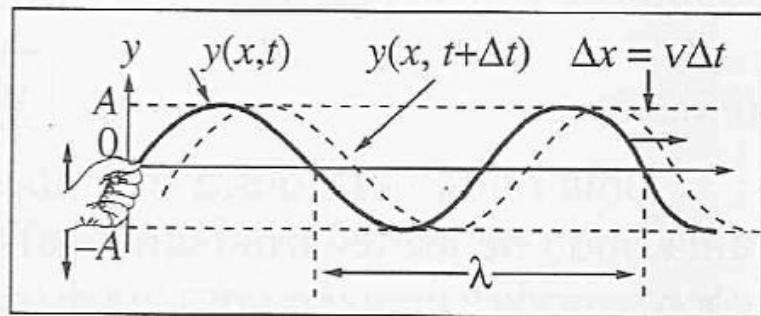


Figura 5.7 — Onda harmônica

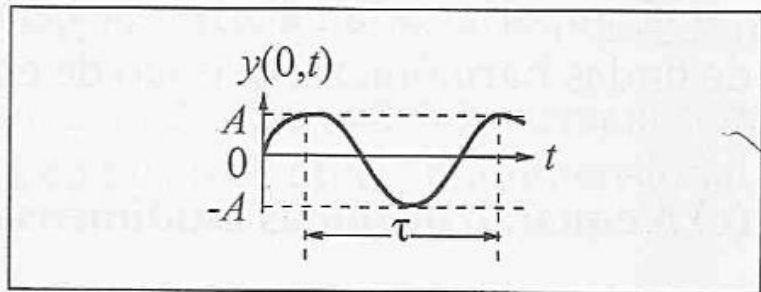


Figura 5.8 — Período temporal

$$\omega = kv = 2\pi\nu = 2\pi / \tau$$

$$y(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\lambda = v\tau$$

$$\varphi(x,t) = kx - \omega t + \delta$$

Revisão ondas:

$$y(x, t) = f(x'), \quad x' = x - vt$$

$$\text{velocidade} = \frac{\partial}{\partial t} y(x, t)$$

$$\text{aceleração} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \frac{df}{dx'}$$

$$\partial x' / \partial t = \frac{\partial}{\partial t} (x - vt) = -v$$

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{df}{dx'} \right) = -v \frac{d}{dx'} \left(\frac{df}{dx'} \right) \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{=-v}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dx'^2}$$

$$\partial x' / \partial x = \frac{\partial}{\partial x} (x - vt) = 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dx'^2} \right.$$

Revisão ondas:

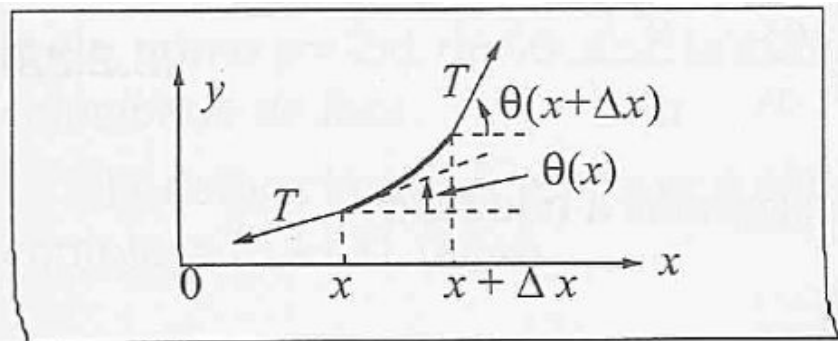


Figura 5.10 — Variação de direção da tensão

$$T \sin \theta \approx T \operatorname{tg} \theta = T \frac{\partial y}{\partial x}$$

$\theta \ll 1$, de modo que $\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta$

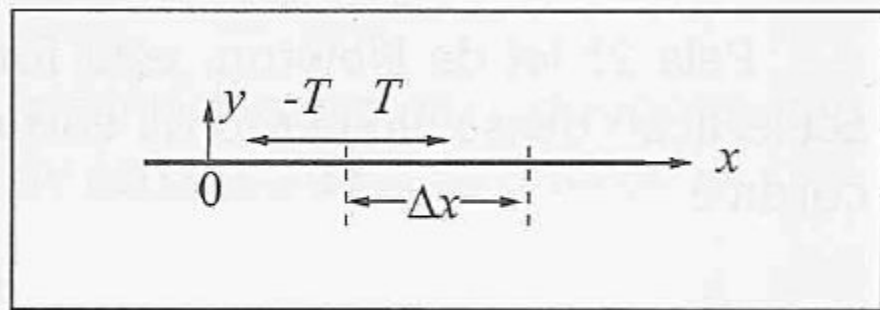


Figura 5.9 — Tensão da corda

$$\Delta m = \mu \Delta x$$

Revisão ondas:

$$T \frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = T \Delta x \left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} \right]$$

$$\text{Força vertical sobre } \Delta x = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Delta x$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\underbrace{\mu \Delta x}_{\Delta m} \underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t)}_{\text{aceleração vertical}} = \underbrace{T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Delta x}_{\text{força vertical sobre } \Delta x}$$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Modos normais - cordas vibrantes:

5.7 — Modos normais de vibração

Vamos considerar agora uma corda vibrante de comprimento finito l , presa em ambas as extremidades. Em lugar de analisar o movimento da corda em termos de ondas progressivas que se refletem nas extremidades fixas, é mais conveniente descrevê-lo em termos de ondas estacionárias, que correspondem aos modos normais (veremos depois a relação entre as duas descrições).

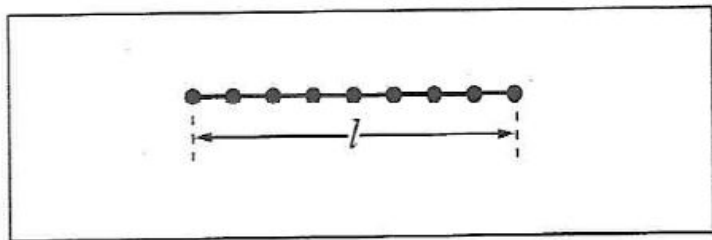


Figura 5.23 — Corda como limite de osciladores acoplados

Os modos normais de vibração da corda consti-

Modos normais - cordas vibrantes:

tuem uma generalização dos modos normais de osciladores acoplados, discutidos na Seção 4.6. De fato, como foi mostrado por Lagrange em 1759, podemos considerar a corda como caso limite de um sistema de N osciladores acoplados (Fig. 5.23), de massas $\mu l/N$ e comprimento total l , igualmente espaçados, quando $N \rightarrow \infty$. Os modos normais de vibração deste sistema tendem aos da corda, neste limite.

A condição de que as duas extremidades da corda permaneçam fixas se exprime pelas *condições de contorno*

$$\boxed{y(0, t) = y(l, t) = 0} \quad \text{para qualquer } t \quad (5.7.1)$$

Modos normais - cordas vibrantes:

Como acontece para sistemas de N partículas (Seção 4.6), um *modo normal* se caracteriza pelo fato de que *todos os elementos da corda oscilam com a mesma frequência ω e mesma constante de fase δ* , ou seja, têm a mesma dependência temporal, da forma $\cos(\omega t + \delta)$. Cada ponto x oscila com amplitude $A(x)$ característica do modo, ou seja, y é o produto de uma função de x por uma de t ,

$$y(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \delta) \quad (5.7.2)$$

o que corresponde a uma *onda estacionária* (Seção 5.5).

Modos normais - cordas vibrantes:

Como $y(x, t)$ deve ser solução da equação de ondas (5.2.24), obtemos, substituindo a (5.7.2),

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A(x) \cos(\omega t + \delta) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{dx^2} \cos(\omega t + \delta)$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{d^2 A}{dx^2} + k^2 A = 0, \quad k = \frac{\omega}{v}} \quad (5.7.3)$$

A solução geral da (5.7.3) é (cf. 3.2.15)

$$A(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx) \quad (5.7.4)$$

Modos normais - cordas vibrantes:

Entretanto, para que a (5.7.2) satisfaça as condições de contorno (5.7.1), é preciso que se tenha

$$A(0) = A(l) = 0 \quad (5.7.5)$$

Pela (5.7.4), a primeira destas condições dá

$$A(0) = a = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A(x) = b \sin(kx) \end{array} \right. \quad (5.7.6)$$

e a segunda condição dá então

$$A(l) = b \sin(kl) = 0 \quad (5.7.7)$$

Modos normais - cordas vibrantes:

Como $b \neq 0$ (caso contrário $y \equiv 0$), esta condição só pode ser satisfeita para valores discretos k_n da variável k , dados por

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)} \quad (5.7.8)$$

(Note que $n = 0$ também daria $y \equiv 0$, e $n = -1, -2, \dots$ não dão nada de novo; y apenas troca de sinal, o que pode ser absorvido pela constante de fase na (5.7.2): $\delta \rightarrow \delta + \pi$.)

Os valores correspondentes de ω [cf. (5.7.3)] são as *freqüências dos modos normais de vibração*:

Modos normais - cordas vibrantes:

$$\omega_n = k_n V = \frac{n\pi}{l} V \quad (5.7.9)$$

Levando nas (5.7.6) e (5.7.2), obtemos finalmente as expressões dos *modos normais de vibração*

$$y_n(x, t) = b_n \operatorname{sen}(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n) = b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l} vt + \delta_n\right) \quad (5.7.10)$$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$

Modos normais - cordas vibrantes:

Vemos que são ondas estacionárias, análogas às que foram consideradas na Seção. 5.5(b).
O comprimento de onda λ_n , associado ao modo n é

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2l}{n} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (5.7.11)$$

Modos normais - cordas vibrantes:

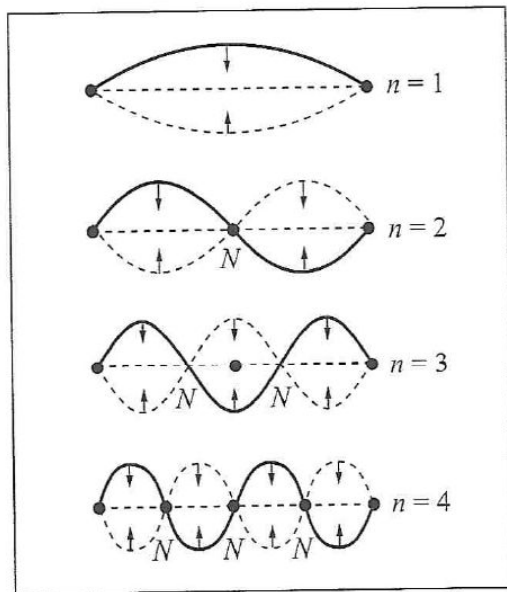


Figura 5.24 — Modos normais de vibração

Os modos de vibração mais baixos estão ilustrados na Fig. 5.24. O modo de ordem n contém precisamente n semicomprimentos de onda e tem $(n - 1)$ nodos (pontos N) além dos extremos fixos. A Fig. 5.24 deve ser comparada com as 4.21 e 4.22, que podem ser consideradas como aproximações dos modos mais baixos pelos modos de um sistema de um número finito de osciladores acoplados: para 2 osciladores, obtemos aproximações dos 2 modos mais baixos; para 4, temos 4 modos, que aproximam os com $n = 1$ até 4 da corda contínua (aproximando melhor os 2 primeiros que com 2 osciladores), e assim por diante.

Para N osciladores acoplados, há N modos normais de vibração transversal na direção y . A corda contínua corresponde ao limite $N \rightarrow \infty$, de forma que se obtêm *infinitos* modos normais (infinidade discreta: $n = 1, 2, 3, \dots$). A frequência ν_n do modo n é

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{v}{2l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(5.7.12)

Modos normais - cordas vibrantes:

Por conseguinte, utilizando a (5.3.6),

$$\begin{aligned} v_n &= nv_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ v_1 &= \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{T/\mu} \end{aligned} \quad (5.7.13)$$

As frequências são *múltiplos inteiros* da frequência v_1 do modo mais baixo, que se chama o *modo fundamental*. A frequência $v_n = nv_1$ do modo n chama-se o *n -ésimo harmônico* da frequência v_1 .

A expressão (5.7.13) de v_1 engloba as *leis das cordas vibrantes*, descobertas experimentalmente por Mersenne em 1636: A frequência fundamental é: (i) *inversamente proporcional ao comprimento da corda*; (ii) *proporcional à raiz quadrada da tensão*; (iii) *inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade linear de massa da corda*.

Modos normais - cordas vibrantes:

Estes resultados têm aplicações importantes em todos os instrumentos musicais de cordas, conforme veremos mais adiante.

O fato de que *ondas confinadas numa região limitada do espaço só podem oscilar em frequências bem definidas, que formam um conjunto discreto* (embora haja infinitas frequências possíveis) é uma característica geral, extremamente importante, do movimento ondulatório: os modos normais de vibração de uma corda presa nos extremos constituem o exemplo mais simples deste resultado.