

6. Aeroelasticidade dinâmica (Métodos de Solução)

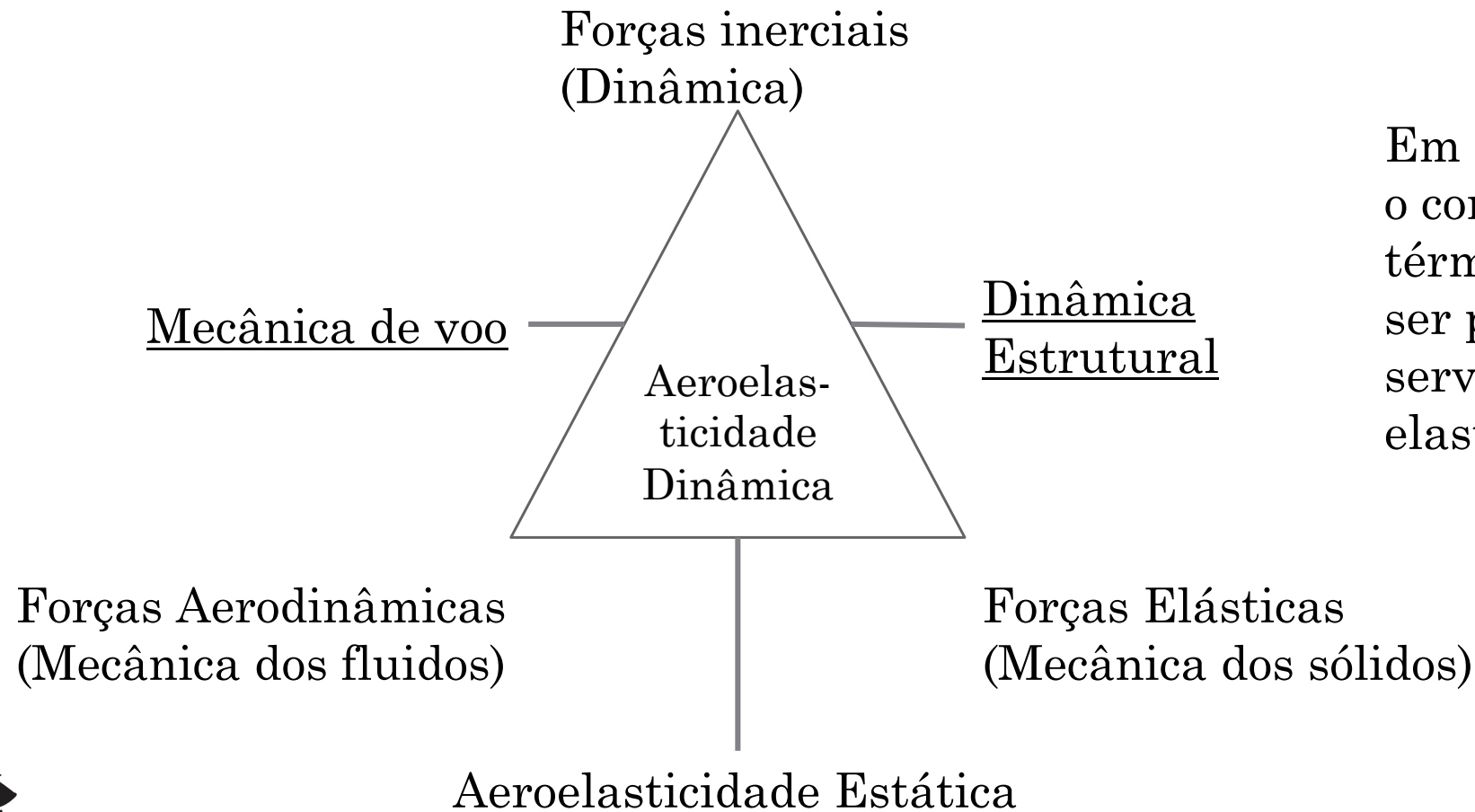
Carlos De Marqui Junior

Departamento de Engenharia Aeronáutica

Escola de Engenharia de São Carlos

Universidade de São Paulo

- Os problemas aeroelásticos podem ser estáticos ou dinâmicos. O problema é dinâmico se a inércia tiver um papel fundamental no fenômeno. Em geral, o diagrama a seguir sugerido por Collar na década de 1940 se aplica:



Em problemas modernos, o controle e as cargas térmicas também podem ser presentes (Aero-servo-termo-elasticidade).

Classificação de problemas aeroelásticos

	Estática	Dinâmica
Estabilidade	Divergência	Flutter; Flutter de estol
Resposta	Distribuição de carregamento; Efetividade de comando; Reversão de comando	Resposta à rajada; Resposta de comando; Cargas dinâmicas de pouso; Buffeting; Galloping

Análise Aeroelástica de uma Seção Típica com 2GDL

Energia Potencial

$$P = \frac{1}{2}k_h h^2 + \frac{1}{2}k_\theta \theta^2$$

Velocidade do centro de massa C

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_P + \dot{\theta} \hat{\mathbf{b}}_3 \times b[(1+a) - (1+e)] \hat{\mathbf{b}}_1$$

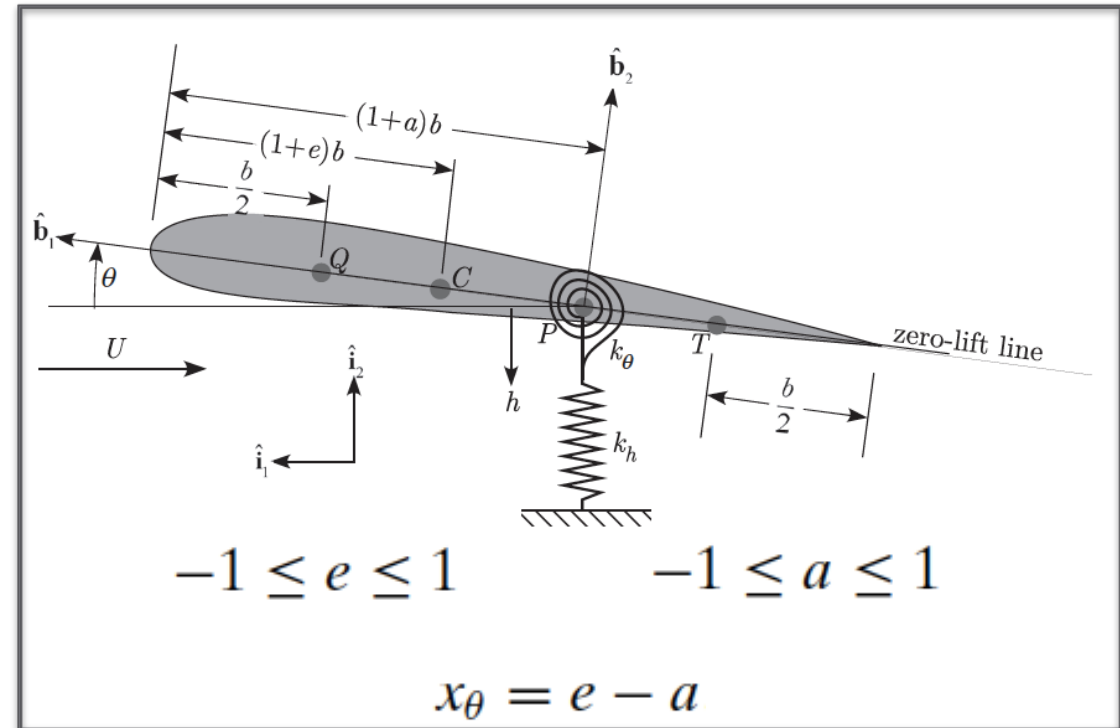
Velocidade inercial do ponto de referência P:

$$\mathbf{v}_P = -\dot{h}\hat{\mathbf{i}}_2$$

Portanto: $\mathbf{v}_C = -h\hat{\mathbf{i}}_2 + b\dot{\theta}(a - e)\hat{\mathbf{b}}_2$

E a expressão de energia cinética será:

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2$$



$$K = \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + b^2 x_\theta^2 \dot{\theta}^2 + 2bx_\theta \dot{h}\dot{\theta}) + \frac{1}{2}I_C \dot{\theta}^2 \quad I_P = I_C + mb^2 x_\theta^2.$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{h}^2 + 2bx_\theta \dot{h}\dot{\theta}) + \frac{1}{2}I_P \dot{\theta}^2$$

Para obter as forças generalizadas relacionadas com cada GDL, escrevemos o trabalho realizado pela sustentação devido a um deslocamento virtual do ponto Q e pelo momento em torno de Q devido a uma rotação virtual:

$$\mathbf{v}_Q = -\dot{h} \hat{\mathbf{i}}_2 + b \dot{\theta} \left(\frac{1}{2} + a \right) \hat{\mathbf{b}}_2$$

Deslocamento virtual do ponto Q

$$\delta \mathbf{p}_Q = -\delta h \hat{\mathbf{i}}_2 + b \delta \theta \left(\frac{1}{2} + a \right) \hat{\mathbf{b}}_2$$

A rotação virtual é $\delta \theta \hat{\mathbf{b}}_3$

E, portanto, o trabalho virtual das forças aerodinâmicas:

$$\overline{\delta W} = L \left[-\delta h + b \left(\frac{1}{2} + a \right) \delta \theta \right] + M_{\frac{1}{4}} \delta \theta$$

Com forças generalizadas:

$$Q_h = -L$$

$$Q_\theta = M_{\frac{1}{4}} + b \left(\frac{1}{2} + a \right) L$$

Utilizando as equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial P}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Podemos obter as equações de movimento do sistema:

$$m(\ddot{h} + bx_\theta\ddot{\theta}) + k_h h = -L$$

$$I_P\ddot{\theta} + mbx_\theta\ddot{h} + k_\theta\theta = M_{\frac{1}{4}} + b \left(\frac{1}{2} + a \right) L$$

Estacionário

$$L = 2\pi\rho_\infty bU^2\theta$$

$$M_{\frac{1}{4}} = 0$$

Que podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} mb^2 & mb^2 x_\theta \\ mb^2 x_\theta & I_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{h}} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} mb^2 \omega_h^2 & 2\pi \rho_\infty b^2 U^2 \\ 0 & I_P \omega_\theta^2 - 2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \pi \rho_\infty b^2 U^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{h}{b} \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Aqui, utilizaremos o método p , onde se assume o movimento dos GDLs como:

$$h = \bar{h} \exp(vt) \quad \theta = \bar{\theta} \exp(vt)$$

$$\begin{bmatrix} mb^2 v^2 + mb^2 \omega_h^2 & mb^2 v^2 x_\theta + 2\pi \rho_\infty b^2 U^2 \\ mb^2 v^2 x_\theta & I_P \omega_\theta^2 + I_P v^2 - 2(a + \frac{1}{2}) \pi \rho_\infty b^2 U^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$v = pU/b$$

Onde p é uma variável adimensional desconhecida!

Dividindo as equações por mU^2 e definindo os parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{I_P}{mb^2} & \sigma &= \frac{\omega_h}{\omega_\theta} \\ \mu &= \frac{m}{\rho_\infty \pi b^2} & V &= \frac{U}{b\omega_\theta} \end{aligned}$$

As equações são alteradas para:

$$\begin{bmatrix} p^2 + \frac{\sigma^2}{V^2} & x_\theta p^2 + \frac{2}{\mu} \\ x_\theta p^2 & r^2 p^2 + \frac{r^2}{V^2} - \frac{2}{\mu}(a + \frac{1}{2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\bar{h}}{b} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para obtermos solução não trivial, resolvemos o determinante e, tipicamente, obteremos dois pares de raízes complexo-conjugadas

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{bv_1}{U} = \frac{b}{U}(\Gamma_1 \pm i\Omega_1) & \text{OU} & & Vp_1 &= \frac{b}{U}(\Gamma_1 \pm i\Omega_1) \frac{U}{b\omega_\theta} = \frac{\Gamma_1}{\omega_\theta} \pm i \frac{\Omega_1}{\omega_\theta} \\ p_2 &= \frac{bv_2}{U} = \frac{b}{U}(\Gamma_2 \pm i\Omega_2) & & & Vp_2 &= \frac{b}{U}(\Gamma_2 \pm i\Omega_2) \frac{U}{b\omega_\theta} = \frac{\Gamma_2}{\omega_\theta} \pm i \frac{\Omega_2}{\omega_\theta} \end{aligned}$$

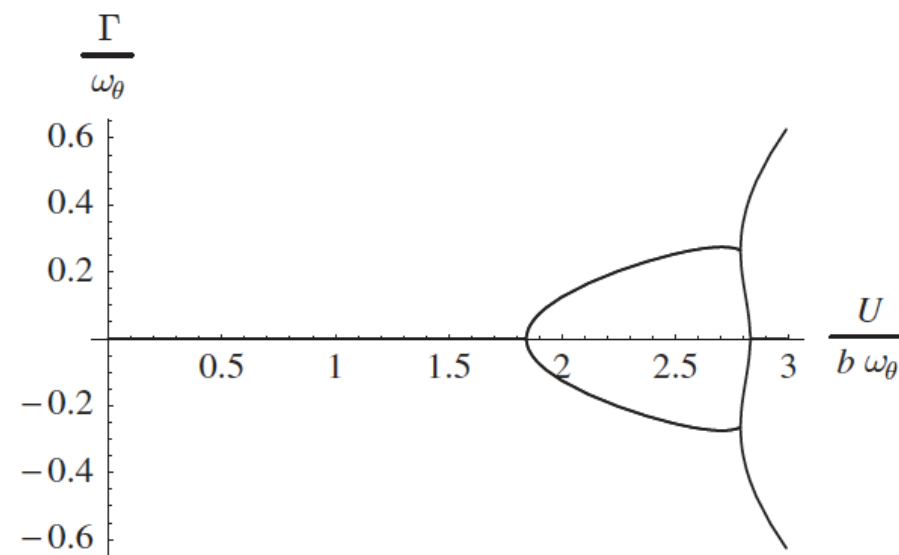
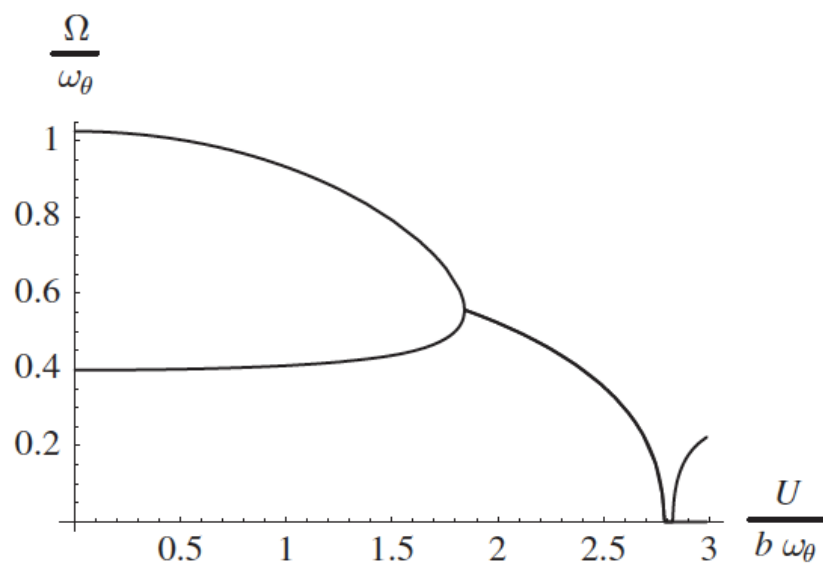
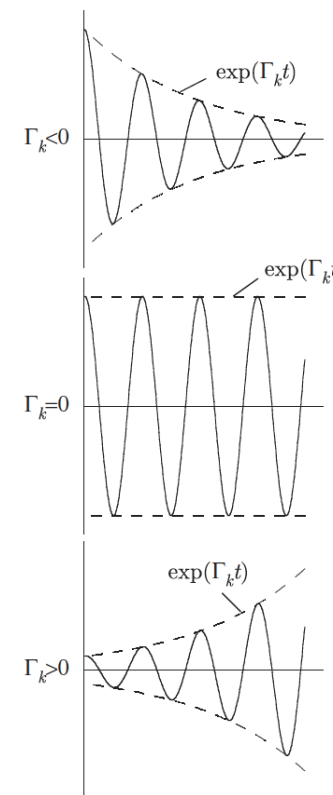
$$(\Gamma_1 \pm i\Omega_1)$$

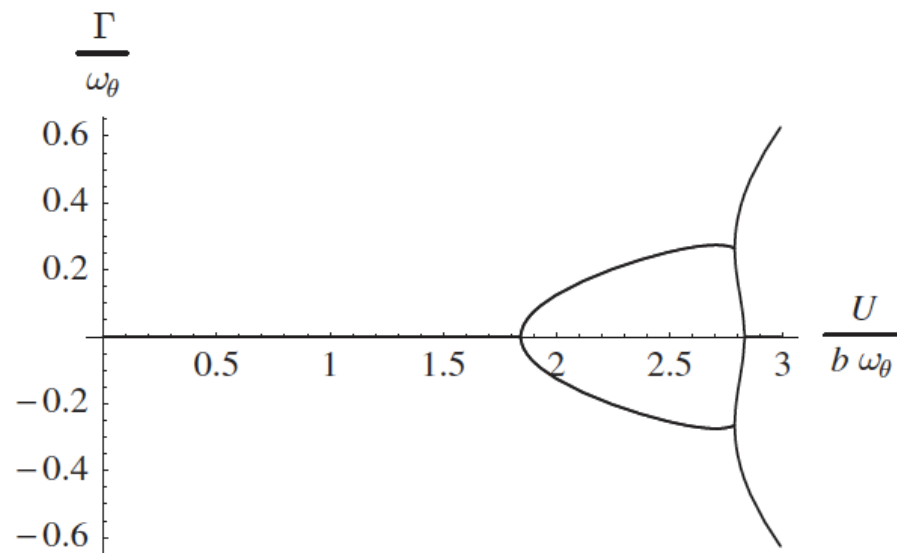
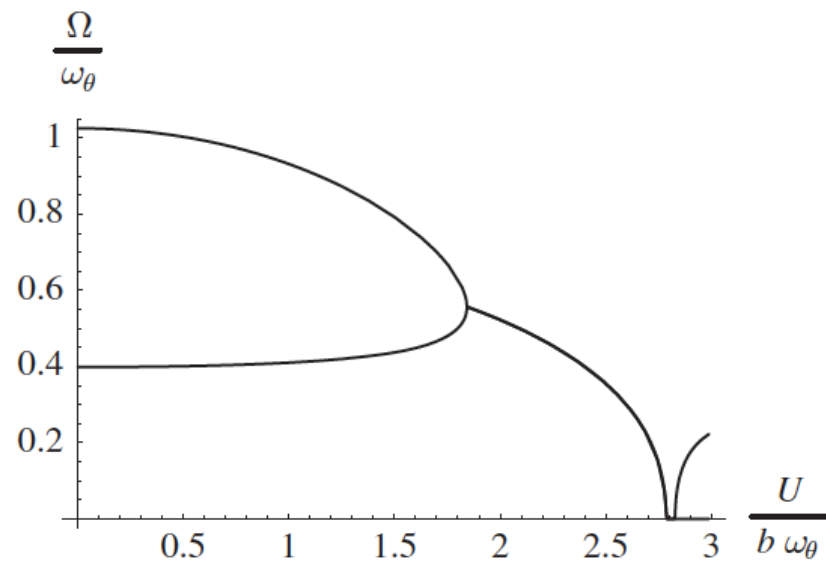
$$(\Gamma_2 \pm i\Omega_2)$$

Γ_k é relacionada com o amortecimento

Ω_k é relacionada com a frequência

A parte real está diretamente relacionada com a estabilidade:





$$V_D = \frac{U_D}{b\omega_\theta} = r \sqrt{\frac{\mu}{1+2a}}$$

Obtida assumindo $p=0$
na matrix resolvendo
para V .

$$h(t) = \bar{h} \exp(i\omega t)$$

$$\theta(t) = \bar{\theta} \exp(i\omega t)$$

$$L(t) = \bar{L} \exp(i\omega t)$$

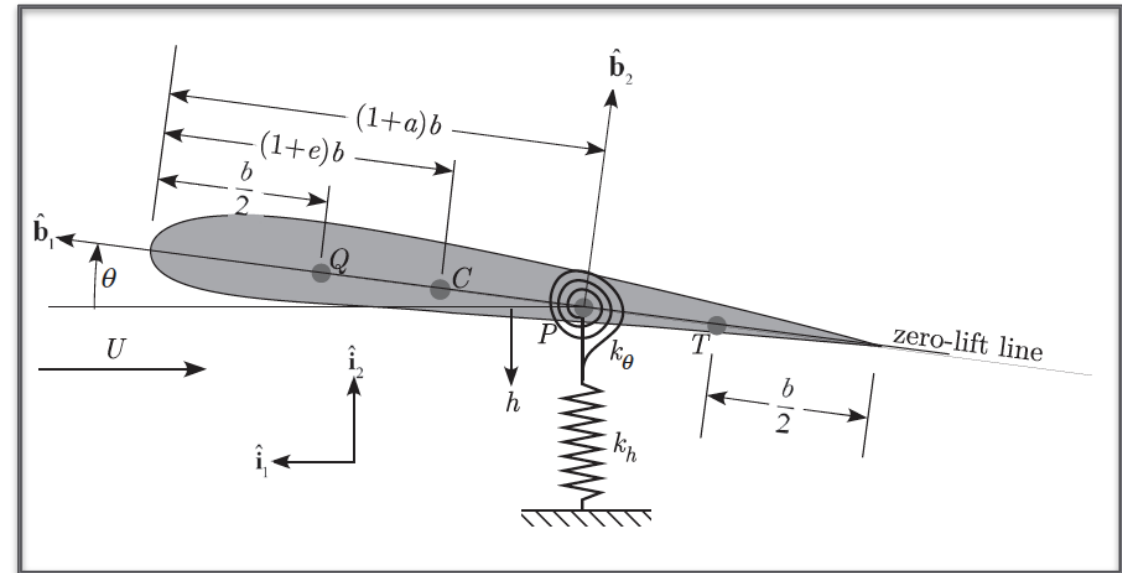
$$M(t) = \overline{M} \exp(i\omega t)$$

$$\overline{L} = -\pi\rho_\infty b^3\omega^2 \left[\ell_h(k, M_\infty)\frac{\overline{h}}{b} + \ell_\theta(k, M_\infty)\overline{\theta} \right]$$

$$\overline{M} = \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 \left[m_h(k, M_\infty) \frac{\overline{h}}{b} + m_\theta(k, M_\infty) \overline{\theta} \right]$$

$$k = \frac{b\omega}{U}$$

$$M_\infty = \frac{U}{c_\infty}$$



Voltando nas equações de movimento da seção típica:

$$m(\ddot{h} + bx_\theta\ddot{\theta}) + k_h h = -L$$

$$I_P\ddot{\theta} + mbx_\theta\ddot{h} + k_\theta\theta = M$$

$$M = M_{\frac{1}{4}} + b\left(\frac{1}{2} + a\right)L$$

Na análise clássica de flutter, presumimos que o movimento é harmônico simples,

$$h(t) = \bar{h} \exp(i\omega t)$$

$$\theta(t) = \bar{\theta} \exp(i\omega t)$$

$$L(t) = \bar{L} \exp(i\omega t)$$

$$M(t) = \bar{M} \exp(i\omega t)$$

Substituindo nas equações de movimento:

$$-\omega^2 m \bar{h} - \omega^2 m b x_\theta \bar{\theta} + m \omega_h^2 \bar{h} = -\bar{L}$$

$$-\omega^2 m b x_\theta \bar{h} - \omega^2 I_P \bar{\theta} + I_P \omega_\theta^2 \bar{\theta} = \bar{M}$$

$$\bar{L} = -\pi \rho_\infty b^3 \omega^2 \left[\ell_h(k, M_\infty) \frac{\bar{h}}{b} + \ell_\theta(k, M_\infty) \bar{\theta} \right]$$

$$\bar{M} = \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 \left[m_h(k, M_\infty) \frac{\bar{h}}{b} + m_\theta(k, M_\infty) \bar{\theta} \right]$$

Utilizando a aerodinâmica nas equações:

$$\left\{ \frac{m}{\pi \rho_{\infty} b^2} \left[1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 \right] + \ell_h(k, M_{\infty}) \right\} \frac{\bar{h}}{b} + \left[\frac{m x_{\theta}}{\pi \rho_{\infty} b^2} + \ell_{\theta}(k, M_{\infty}) \right] \bar{\theta} = 0$$

$$\left[\frac{m x_{\theta}}{\pi \rho_{\infty} b^2} + m_h(k, M_{\infty}) \right] \frac{\bar{h}}{b} + \left\{ \frac{I_P}{\pi \rho_{\infty} b^4} \left[1 - \left(\frac{\omega_{\theta}}{\omega} \right)^2 \right] + m_{\theta}(k, M_{\infty}) \right\} \bar{\theta} = 0$$

$$\mu = \frac{m}{\pi \rho_{\infty} b^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{I_P}{m b^2}}$$

Podemos escrever em função dos parâmetros adimensionais:

$$\left\{ \mu \left[1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 \right] + \ell_h \right\} \frac{\bar{h}}{b} + (\mu x_{\theta} + \ell_{\theta}) \bar{\theta} = 0$$

$$(\mu x_{\theta} + m_h) \frac{\bar{h}}{b} + \left\{ \mu r^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_{\theta}}{\omega} \right)^2 \right] + m_{\theta} \right\} \bar{\theta} = 0$$

$m, e, a, I_P, \omega_h, \omega_{\theta},$ and b são conhecidos (parâmetros do sistema)

$\bar{h}, \bar{\theta}, \omega, \rho_{\infty}, M_{\infty},$ and k descrevem o movimento e condições de voo

A solução não trivial é obtida através do determinante dos coeficientes das variáveis de movimento:

$$\begin{vmatrix} \mu \left[1 - \sigma^2 \left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] + \ell_h & \mu x_\theta + \ell_\theta \\ \mu x_\theta + m_h & \mu r^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] + m_\theta \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Determinante de Flutter!}$$

Onde o parâmetro $\sigma = \omega_h / \omega_\theta$ foi introduzido e o determinante fornece um polinômio quadrático com $\lambda = (\omega_\theta / \omega)^2$ como variável desconhecida

Para a solução completa, em uma dada condição de voo, na fronteira de flutter, restam quatro variáveis desconhecidas:

$$\omega_\theta / \omega, \mu = m / (\pi \rho_\infty b^2), M_\infty, k = b \omega / U.$$

A única equação disponível é o polinômio proveniente da solução do determinante.

Entretanto, os coeficientes aerodinâmicos são grandezas complexas e, portanto, esta equação complexa representa 2 equações reais, onde as partes reais e imaginárias devem ser zero para obtenção de uma solução!

A partir das últimas observações, concluímos que 4 variáveis desconhecidas devem ser especificadas para a solução.

O seguinte procedimento pode ser adotado:

1. Especificar altitude (define razão de massa)
2. Determinar um valor inicial para Mach, zero, por exemplo
3. Lembrando que o determinante de flutter leva a uma eq quadrática em λ , utilize um algoritmo para encontrar o valor de frequência reduzida k para o qual a parte imaginária de uma das duas raízes para λ seja nula, que é k_F .
4. Faça $\omega_\theta/\omega_F = \sqrt{\lambda(k_F)}$ utilizando a raiz para a qual $\lambda(k_F)$ é real;
5. Determine $U_F = b\omega_F/k_F$ e $M_{\infty_F} = U_F/c_\infty$
6. Repita os passos 3 – 5 com o valor M_{∞_F} obtido no passo 5 até que ocorra a convergência para M_{∞_F} , k_F , e U_F na condição de flutter para uma dada razão de massa
7. Repita todo o procedimento para vários valores de razão de massa, para determinar a fronteira de flutter em função de altitude por M_{∞_F} , k_F , and U_F



Alternativamente, seguinte procedimento pode ser adotado:

1. Especificar uma faixa de valores de frequência reduzida para a análise. Por exemplo, entre 0.001 e 1.0
2. Para cada frequência reduzida (e um valor especificado de Mach) calcular a aerodinâmica
3. Resolva o determinante de flutter, que fornece uma equação quadrática com coeficientes complexos, para os valores de $\lambda = (\omega_\theta/\omega)^2$ que correspondem a cada valor da faixa de frequência reduzida na análise. Observe que as raízes são, em geral, complexas e que a parte real é uma aproximação de $(\omega_\theta/\omega)^2$ enquanto a parte imaginária é relacionada com o amortecimento do GDL.
4. Interpole para encontrar o valor de frequência reduzida tal que a parte imaginária de uma das raízes seja nula, assim, o valor de freq. reduzida no qual a curva cruza o zero é determinado. Este valor é uma aproximação de para k_F , fazendo o valor de λ ser real quando $k = k_F$.

Soluções de Engenharia para Flutter (métodos aproximados)

- As soluções anteriormente discutidas, p e clássica, têm por objetivo determinar as condições de voo que correspondem à condição de fronteira de flutter.
- Método p é baseado na solução das equações generalizadas que fornecem autovalores cuja parte real nos informa sobre a evolução do amortecimento modal.
- Por outro lado, a solução Clássica de Theodorsen é baseada na hipótese de MHS (o que aconteceria apenas na fronteira de estabilidade). Portanto, se busca através da solução do determinante de flutter as condições que propiciam MHS.
- As soluções aproximadas tentam propiciar o estudo de margem de estabilidade e a previsão da evolução aeroelástica que permita compreender o mecanismo de instabilidade. Destaca-se que o método p, quando combinado com um modelo aerodinâmico adequado, cumpre tais tarefas.

Método k

- Método k para solução aproximada do problema de flutter tentar levar em conta o efeito de amortecimento estrutural no problema.
- Ele inclui artificialmente, um termo de amortecimento proporcional ao deslocamento, mas em fase com a velocidade estrutural.

$$m(\ddot{h} + bx_\theta\ddot{\theta}) + k_h h = -L + D_h$$

$$I_P\ddot{\theta} + mbx_\theta\ddot{h} + k_\theta\theta = M + D_\theta$$

$$\begin{aligned} D_h &= \overline{D}_h \exp(i\omega t) \\ &= -ig_h m\omega_h^2 \overline{h} \exp(i\omega t) \\ D_\theta &= \overline{D}_\theta \exp(i\omega t) \\ &= -ig_\theta I_P \omega_\theta^2 \overline{\theta} \exp(i\omega t) \end{aligned}$$

$$\left\{ \mu \left[1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 (1 + ig_h) \right] + \ell_h \right\} \frac{\overline{h}}{b} + (\mu x_\theta + \ell_\theta) \overline{\theta} = 0$$

$$(\mu x_\theta + m_h) \frac{\overline{h}}{b} + \left\{ \mu r^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 (1 + ig_\theta) \right] + m_\theta \right\} \overline{\theta} = 0$$



Inicialmente, assumia-se valores para os coeficientes de amortecimento e buscava-se a solução.

Posteriormente, os coeficientes de amortecimento passaram a ser tratados como variáveis desconhecidas.

Combinando com a presença da razão de flutter, o termo de amortecimento passou a ser tratado como:

$$Z = \left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 (1 + i g)$$

E o determinante de flutter passou a ser:

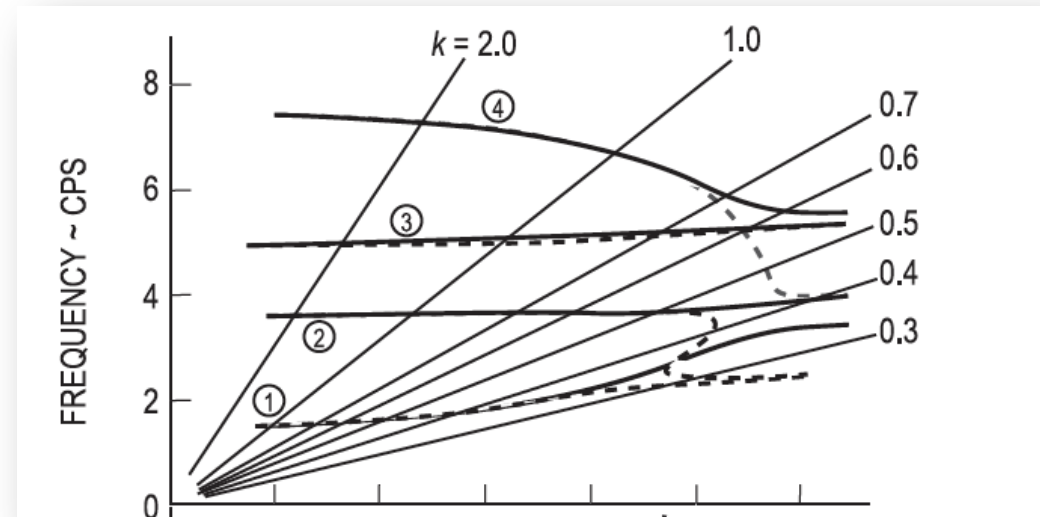
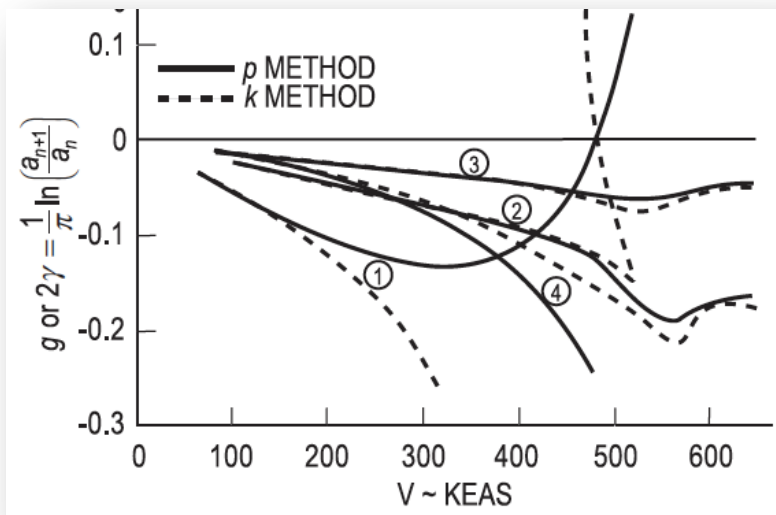
$$\begin{vmatrix} \mu (1 - \sigma^2 Z) + \ell_h & \mu x_\theta + \ell_\theta \\ \mu x_\theta + m_h & \mu r^2 (1 - Z) + m_\theta \end{vmatrix} = 0$$

que fornece uma equação quadrática em Z.

- Procedimento de solução é similar ao caso de flutter clássico anteriormente discutido.
- A diferença é que os resultados consistem em dois pares de números reais (ω_1, g_1) and (ω_2, g_2) , que devem ser plotados em função da velocidade ou velocidade reduzida.

Os gráficos dos coeficientes de amortecimento em função da velocidade passariam, então, a fornecer uma medida da margem de estabilidade em condições próxima a fronteira de flutter (método U-g).

O Método também é baseado na hipótese de MHS. Portanto, os coeficientes de amortecimento (artificiais) devem ser interpretados, para cada frequência reduzida assumida ou analisada na solução, como o amortecimento exigido para que se tenha MHS.



Método p-k

A figura anterior mostra que tanto o acoplamento entre modos é incorretamente previsto pelo método k. Além disso, o método também prevê incorretamente qual modo fica instável. Por outro lado, o método k tem a vantagem de utilizar uma aerodinâmica baseada na hipótese de MHS, o que é mais precisa que para movimentos transientes.

- Método p-k traz o compromisso entre a precisão do método p e hipótese MHS do k.
- Ele é baseado na análise do método p com a restrição de um modelo aerodinâmico baseado na hipótese de MHS.

$$\left| p^2[M] + \frac{b^2}{U^2}[M][\omega^2] - \rho_\infty[\mathcal{A}(ik)] \right| = 0$$

Deve se calcular a matriz aerodinâmica para um valor arbitrário de k.

Depois disso, para um conjunto de frequências reduzidas k, como por exemplo, $k_0 = b\omega_i / U$ para a i-ésima raiz, calcula-se o determinante para p.

O Resultado típico apresenta pares complexo conjugados e algumas raízes reais.

Seleciona-se uma das raízes complexas e assume-se como a solução inicial na forma:

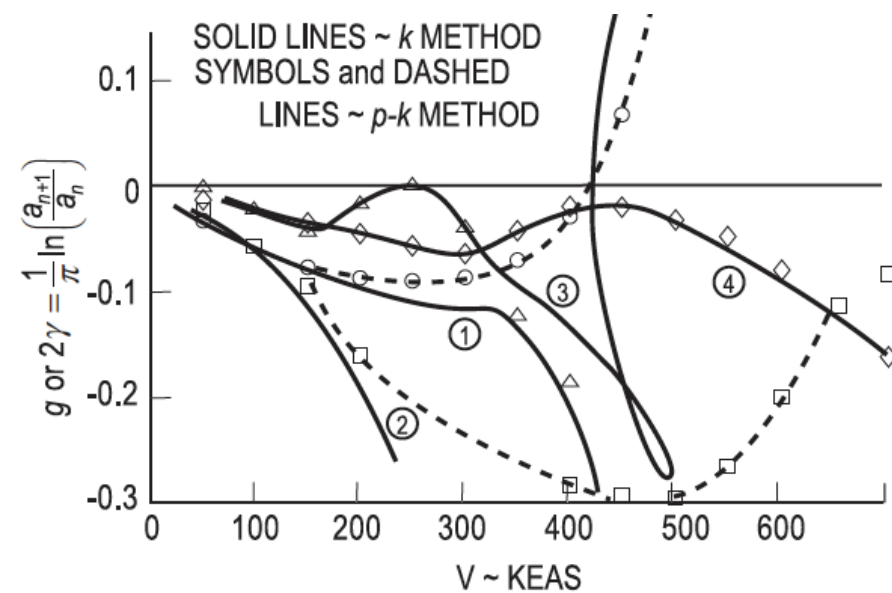
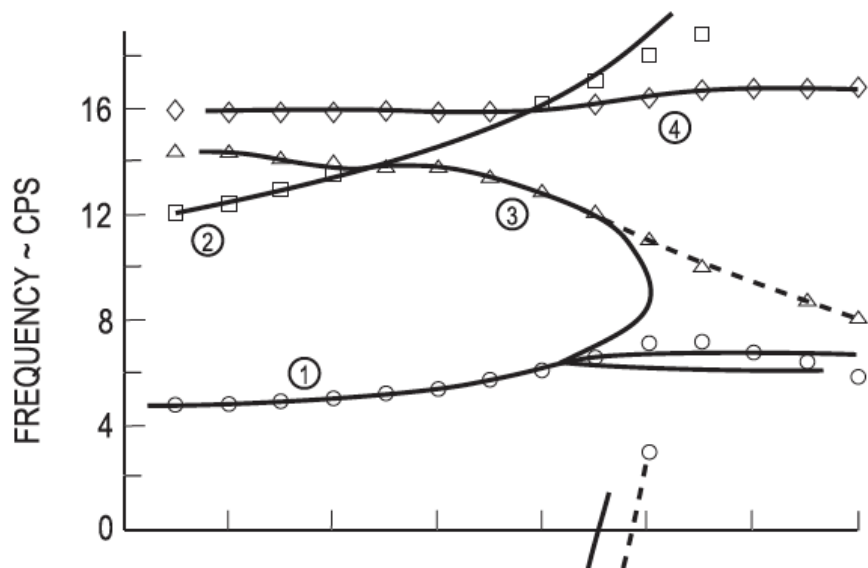
$$k_1 = |\Im(p)| \quad \gamma_1 = \frac{\Re(p)}{k_1}$$

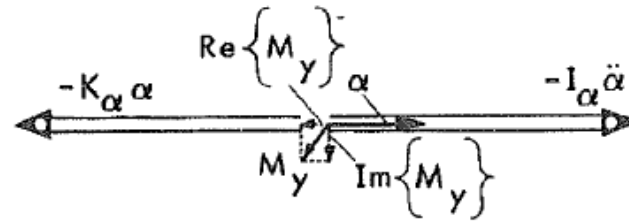
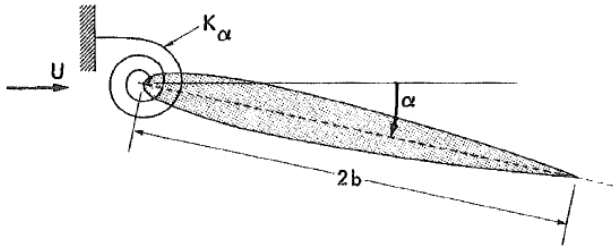
E se calcula novamente a matriz aerodinâmica $[A(ik_1)]$

Com esta nova matriz, recalcula-se o determinante de flutter para obter novas raízes p_s

$$k_2 = |\Im(p)| \quad \gamma_2 = \frac{\Re(p)}{k_2}$$

A atualização das raízes para cada k resulta em um esquema iterativo convergente para determinação das raízes, onde o valor negativo da parte real é uma medida do amortecimento modal.

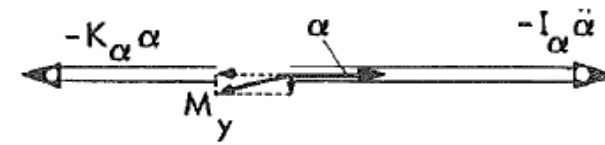




$$U = 30 \text{ ft/sec}$$

$$\omega = 0.975 (2\pi) \text{ rad/sec}$$

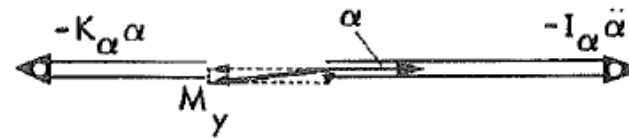
$$k = 0.1011$$



$$U = 60 \text{ ft/sec}$$

$$\omega = 1.095 (2\pi) \text{ rad/sec}$$

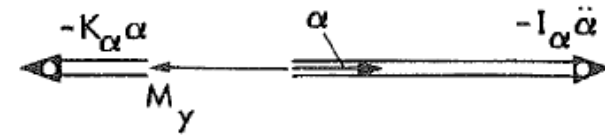
$$k = 0.0566$$



$$U = 90 \text{ ft/sec}$$

$$\omega = 1.265 (2\pi) \text{ rad/sec}$$

$$k = 0.0435$$



$$U = 120 \text{ ft/sec}$$

$$\omega = 1.47 (2\pi) \text{ rad/sec}$$

$$k = 0.0380$$



$$U = 150 \text{ ft/sec}$$

$$\omega = 1.698 (2\pi) \text{ rad/sec}$$

$$k = 0.0350$$



1 Introduction to structural dynamics and aeroelasticity

D. Hodges and A. Pierce

- Leitura Capítulo 5 até o item 5.6