SCC0251
Processamento de Imagens

Restauração de Imagens

Professora Leo Sampaio Ferraz Ribeiro

Slide para não esquecer de passar a lista

Júpiter - Sistema de Gestão Acadêmica da Pró-Reitoria de Graduação

Lista de Presença

Unidade: 55 Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Disciplina: SCC0251 Processamento de Imagens
Turma: 2025101 - Teórica
Período: 24/02/2025 - 07/07/2025
Disciplina COM 2ª Avaliação.

Horário	Prof(a).
qua 08:10 09:50	Leo Sampaio Ferraz Ribeiro
sex 08:10 09:50	Leo Sampaio Ferraz Ribeiro

NºUSP	Ingr.	Curso	Nome	dia __/__/___	dia __/__/___	dia __/__/___
14712657	28/02/2024	55041	Allan Vitor de Souza Silva			
13687196	11/02/2022	55071	Amabile Pietrobon Ferreira			
13687108	23/02/2022	55090	Arthur Hiratsuka Rezende			
12691964	13/03/2023	55041	Arthur Pin			
13671532	11/02/2022	55041	Arthur Queiroz Moura			
12745212	03/05/2021	97001	Asafe Henrique de Oliveira Franca			
12542481	16/04/2021	55041	Bernardo Maia Coelho			
12733212	29/04/2021	55041	Bernardo Rodrigues Tameirao Santos			
14745682	13/03/2023	55071	Bruno Batista Pereira da Silva			
13672220	25/03/2022	55041	Camila Donda Ronchi			
12542630	18/03/2021	55041	Carlos Filipe de Castro Lemos			
14746015	24/02/2025	55090	Diego Gladcheff Munhoz			
12556973	25/02/2022	55041	Eduarda Fritzen Neumann			
14568142	27/01/2023	55090	Enzo Castelo Branco Biondi			
13781841	07/03/2022	55041	Enzo Yasuo Hirano Harada			
12547423	13/03/2023	55041	Fabricio Sampaio			

Problema

$$g(\mathbf{x}) = \mathcal{N}\left\{f(\mathbf{x}) * h(\mathbf{x})\right\}$$

> g — imagem observada

> f — imagem ideal

> h — função de degradação

> g — imagem observada

> $\mathcal{N}$ — processo de geração de ruído

Cenário sem Ruído

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) * h(\mathbf{x})$$

g — imagem observada

f — imagem ideal

h — função de degradação

g — imagem observada

Cenário sem Ruído

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) * h(\mathbf{x})$$

Função $h(x)$ representa a resposta ao impulso de um sistema fotográfico

Modela como um sistema responde quando a entrada é um único ponto

Cenário sem Ruído

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) * h(\mathbf{x})$$

> Função $h(x)$ representa a resposta ao impulso de um sistema fotográfico
>
> Modela como um sistema responde quando a entrada é um único ponto

Cenário sem Ruído

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) * h(\mathbf{x})$$

Função $h(x)$ representa a resposta ao impulso de um sistema fotográfico

Modela como um sistema responde quando a entrada é um único ponto

h é não negativa (pois é parte do sistema físico de formação de imagem

se a imagem for real a resposta ao impulso também será real

imperfeições no sistema fotográfico são modeladas de forma que a energia do sinal seja preservada

Cenário sem Ruído

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) * h(\mathbf{x})$$

h é não negativa (pois é parte do sistema físico de formação de imagem

se a imagem for real a resposta ao impulso também será real

imperfeições no sistema fotográfico são modeladas de forma que a energia do sinal seja preservada

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Cenário sem Ruído

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) * h(\mathbf{x})$$

> imperfeições no sistema fotográfico são modeladas de forma que a energia do sinal seja preservada

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\, dx\, dy = 1$$

$$\sum_{\mathbf{x}=(0,0)}^{(N-1,M-1)} h(\mathbf{x}) = 1$$

Diferentes funções de Degradação

Sem blur

$$h(x,y) = \delta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x,y = (0,0) \\ 0, & \text{other positions} \end{cases}$$

Blur uniforme

$$h(x,y;R) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{if } \sqrt{x^2+y^2} \leq R \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Motion Blur

$$h(x,y;L,\phi) = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{if } \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{L}{2} \text{ and } \frac{x}{y} = -\tan\phi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Funções de Degradação Discretas

Blur uniforme

$$h(\mathbf{x}; R) = \begin{cases} \frac{1}{C}, & \text{if } \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq R \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Motion Blur

$$h(\mathbf{x}; L) = \begin{cases} \frac{1}{2L}\left\{(L-1) - 2\left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor\right\}, & \text{if } x_1 = 0, |x_2| = \left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor \\ \frac{1}{L}, & \text{if } x_1 = 0, |x_2| < \left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Filtragem Inversa

Desejamos então inverter h:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) * h^{-1}(\mathbf{x})$$

Com h sendo, por exemplo, um filtro gaussiano

$$\begin{bmatrix} 0.003 & 0.014 & 0.025 & 0.014 & 0.003 \\ 0.014 & 0.058 & 0.095 & 0.058 & 0.014 \\ 0.025 & 0.095 & 0.150 & 0.095 & 0.025 \\ 0.014 & 0.058 & 0.095 & 0.058 & 0.014 \\ 0.003 & 0.014 & 0.025 & 0.014 & 0.003 \end{bmatrix}$$

Filtragem Inversa

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) * h^{-1}(\mathbf{x})$$

> Com h sendo, por exemplo, um filtro gaussiano

$$\begin{bmatrix} 0.003 & 0.014 & 0.025 & 0.014 & 0.003 \\ 0.014 & 0.058 & 0.095 & 0.058 & 0.014 \\ 0.025 & 0.095 & 0.150 & 0.095 & 0.025 \\ 0.014 & 0.058 & 0.095 & 0.058 & 0.014 \\ 0.003 & 0.014 & 0.025 & 0.014 & 0.003 \end{bmatrix}$$

> Mas essa matriz é singular, não tem inversa!

Filtragem Inversa

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) * h^{-1}(\mathbf{x})$$

> O truque é então usar do domínio das frequências:

$$G(u) = F(u)H(u)$$

Filtragem Inversa

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) * h^{-1}(\mathbf{x})$$

> O truque é então usar do domínio das frequências:

$$G(u) = F(u)H(u)$$

$$\hat{F}(\mathbf{u}) = \frac{G(\mathbf{u})}{H(\mathbf{u})}$$

Filtragem Inversa

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) * h^{-1}(\mathbf{x})$$

O truque é então usar do domínio das frequências:

$$G(u) = F(u)H(u)$$

$$\hat{F}(\mathbf{u}) = \frac{G(\mathbf{u})}{H(\mathbf{u})}$$

Se nós conhecemos h e é uma função bem comportada na transformação, temos uma restauração perfeita

Filtragem Inversa

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) * h^{-1}(\mathbf{x})$$

Em uma imagem com ruído porém:

$$\hat{F}(u) = \frac{H(u)F(u) + N(u)}{H(u)}$$

$$\hat{F}(\mathbf{u}) = F(u) + \frac{N(\mathbf{u})}{H(\mathbf{u})}$$

Neste cenário, se H tiver valores próximos de 0 a razão com o ruído domina o sinal resultante

Filtragem Inversa

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) * h^{-1}(\mathbf{x})$$

Em alguns casos é possível usar filtragem pseudo-inversa

$$W(u) = \begin{cases} H(u), & \text{if } H(u) \geq \lambda \\ \lambda, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Este limiar é frequentemente entre 0.0001 e 0.1. O filtro W é então usado para obter a inversa:

$$\hat{F}(\mathbf{u}) = \frac{G(\mathbf{u})}{W(\mathbf{u})}$$

Filtragem Inversa

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) * h^{-1}(\mathbf{x})$$

Em alguns casos é possível usar filtragem pseudo-inversa

$$W(u) = \begin{cases} H(u), & \text{if } H(u) \geq \lambda \\ \lambda, & \text{otherwise} \end{cases}$$

A pseudo inversa permite lidar com pequenos valores mas sua formulação não considera a existência do ruído

Filtro de Mínimos Quadrados

Em filtros de mínimos quadrados o plano minimizar o erro quadrático entre a imagem ideal e a imagem obtida pela filtragem inversa

$$e^2 = E\{(f - \hat{f}^2\}$$

Filtro de Mínimos Quadrados

Em filtros de mínimos quadrados o plano minimizar o erro quadrático entre a imagem ideal e a imagem obtida pela filtragem inversa

$$e^2 = E\{(f - \hat{f}^2\}$$

Assumindo:

Ruído não é correlacionado

Ruído tem média zero (centrada em cada pixel)

As intensidades da imagem restaurada podem ser escritas como uma função linear da imagem degradada

Filtro de Wiener

Assumindo:

Ruído não é correlacionado

Ruído tem média zero (centrada em cada pixel)

As intensidades da imagem restaurada podem ser escritas como uma função linear da imagem degradada

$$\hat{F}(u) = \left[\frac{H^*(u) S_f(u)}{|H(u)|^2 S_f(u) + S_n(u)} \right] \times G(u)$$

Filtro de Mínimos Quadrados

Assumindo:

Ruído não é correlacionado

Ruído tem média zero (centrada em cada pixel)

As intensidades da imagem restaurada podem ser escritas como uma função linear da imagem degradada

Espectro Quadrado da Imagem Ideal

$$\hat{F}(u) = \left[\frac{H^*(u) S_f(u)}{|H(u)|^2 S_f(u) + S_n(u)} \right] \times G(u)$$

Filtro de Mínimos Quadrados

Assumindo:

Ruído não é correlacionado

Ruído tem média zero (centrada em cada pixel)

As intensidades da imagem restaurada podem ser escritas como uma função linear da imagem degradada

Espectro Quadrado do Ruído

$$\hat{F}(u) = \left[\frac{H^*(u) S_f(u)}{|H(u)|^2 S_f(u) + S_n(u)} \right] \times G(u)$$

Filtro de Mínimos Quadrados

Assumindo:

Ruído não é correlacionado

Ruído tem média zero (centrada em cada pixel)

As intensidades da imagem restaurada podem ser escritas como uma função linear da imagem degradada

$$\hat{F}(u) = \left[\frac{H^*(u) S_f(u)}{|H(u)|^2 S_f(u) + S_n(u)} \right] \times G(u)$$

Conjugado Complexo de H

Filtro de Mínimos Quadrados

$$\hat{F}(u) = \left[\frac{H^*(u) S_f(u)}{|H(u)|^2 S_f(u) + S_n(u)} \right] \times G(u)$$

> Como estimar? Usando variância do ruído como parâmetro

Espectro Quadrado da Imagem Ideal

$$\hat{S}_n(u) = \sigma^2$$

Espectro Quadrado do Ruído

$$\hat{S}_f(u) = 1/N^2[G(u)G^*(u)] - \sigma^2$$

Filtro de Mínimos Quadrados Restritos

Com uma formulação similar, o método dos mínimos quadrados restritos propõe uma solução regularizada pelo operador de laplace

$$\hat{F}(u) = \left[\frac{H^*(u)}{|H(u)|^2 + \lambda |P(u)^2|} \right] \times G(u)$$

SCC0251
Processamento de Imagens

Restauração de Imagens

Professora Leo Sampaio Ferraz Ribeiro