# SCC0251
# Processamento de Imagens

## Transformada de Fourier

Professora Leo Sampaio Ferraz Ribeiro

# Slide para não esquecer de passar a lista

**Júpiter - Sistema de Gestão Acadêmica da Pró-Reitoria de Graduação**

**Lista de Presença**

**Unidade:** 55 Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
**Disciplina:** SCC0251 Processamento de Imagens
**Turma:** 2025101 - Teórica
**Período:** 24/02/2025 - 07/07/2025
**Disciplina COM 2ª Avaliação.**

| Horário | Prof(a). |
|---|---|
| qua 08:10 09:50 | Leo Sampaio Ferraz Ribeiro |
| sex 08:10 09:50 | Leo Sampaio Ferraz Ribeiro |

| NºUSP | Ingr. | Curso | Nome | dia __/__/___ | dia __/__/___ | dia __/__/___ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 14712657 | 28/02/2024 | 55041 | Allan Vitor de Souza Silva | | | |
| 13687196 | 11/02/2022 | 55071 | Amabile Pietrobon Ferreira | | | |
| 13687108 | 23/02/2022 | 55090 | Arthur Hiratsuka Rezende | | | |
| 12691964 | 13/03/2023 | 55041 | Arthur Pin | | | |
| 13671532 | 11/02/2022 | 55041 | Arthur Queiroz Moura | | | |
| 12745212 | 03/05/2021 | 97001 | Asafe Henrique de Oliveira Franca | | | |
| 12542481 | 16/04/2021 | 55041 | Bernardo Maia Coelho | | | |
| 12733212 | 29/04/2021 | 55041 | Bernardo Rodrigues Tameirao Santos | | | |
| 14745682 | 13/03/2023 | 55071 | Bruno Batista Pereira da Silva | | | |
| 13672220 | 25/03/2022 | 55041 | Camila Donda Ronchi | | | |
| 12542630 | 18/03/2021 | 55041 | Carlos Filipe de Castro Lemos | | | |
| 14746015 | 24/02/2025 | 55090 | Diego Gladcheff Munhoz | | | |
| 12556973 | 25/02/2022 | 55041 | Eduarda Fritzen Neumann | | | |
| 14568142 | 27/01/2023 | 55090 | Enzo Castelo Branco Biondi | | | |
| 13781841 | 07/03/2022 | 55041 | Enzo Yasuo Hirano Harada | | | |
| 12547423 | 13/03/2023 | 55041 | Fabricio Sampaio | | | |

# Transformada Rápida de Fourier

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j\frac{2\pi u x}{N}}$$

> Permite computar a transformada em $O(Nlog_2N)$

# Transformada Rápida de Fourier

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j\frac{2\pi ux}{N}}$$

Permite computar a transformada em $O(Nlog_2N)$

Muitas formas de implementar, originalmente assumimos que número de amostras é potência de 2

# Transformada Rápida de Fourier

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j\frac{2\pi ux}{N}}$$

Permite computar a transformada em $O(Nlog_2N)$

Muitas formas de implementar, originalmente assumimos que número de amostras é potência de 2

O algoritmo original usa um método de duplicação sucessiva

# Transformada Rápida de Fourier

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j\frac{2\pi ux}{N}}$$

Permite computar a transformada em $O(Nlog_2N)$

Muitas formas de implementar, originalmente assumimos que número de amostras é potência de 2

O algoritmo original usa um método de duplicação sucessiva

Note que a transformada de Fourier é uma sequência de somas e produtos

# Transformada Rápida de Fourier

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j\frac{2\pi ux}{N}}$$

Permite computar a transformada em $O(Nlog_2N)$

Muitas formas de implementar, originalmente assumimos que número de amostras é potência de 2

O algoritmo original usa um método de duplicação sucessiva

Note que a transformada de Fourier é uma sequência de somas e produtos

Mas o termo $e^{-j2\pi}$ é sempre o mesmo com diferentes potências de $(u/N)x$

# Transformada Rápida de Fourier

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux}, \quad \text{where } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \text{ and } W_N^{uN} = e^{-j2\pi u} = 1$$

> Podemos então re-escrever!

# Transformada Rápida de Fourier

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux}, \quad \text{where } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \text{ and } W_N^{uN} = e^{-j2\pi u} = 1$$

> Podemos então re-escrever!

> **Propriedades**
>
> Simetria do Complexo Conjugado:
>
> $$W_N^{u(N-x)} = W_N^{-ux} = \left(W_N^{ux}\right)^*$$

# Transformada Rápida de Fourier

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux}, \quad \text{where } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \text{ and } W_N^{uN} = e^{-j2\pi u} = 1$$

**Propriedades**

Simetria do Complexo Conjugado:

$$W_N^{u(N-x)} = W_N^{-ux} = \left(W_N^{ux}\right)^*$$

Periodicidade em x, u

$$W_N^{ux} = W_N^{u(x+N)} = W_N^{(u+N)x}$$

# Transformada Discreta de Fourier 2D

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux}, \quad \text{where } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \text{ and } W_N^{uN} = e^{-j2\pi u} = 1$$

> Decimação/Downsampling: obter a DFT usando partes menores assumindo $N = 2^m$

# Transformada Discreta de Fourier 2D

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux}, \quad \text{where } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \text{ and } W_N^{uN} = e^{-j2\pi u} = 1$$

**Decimação/Downsampling: obter a DFT usando partes menores assumindo** $N = 2^m$

Plano é decompor $f(x)$ em índices pares e ímpares:

# Transformada Discreta de Fourier 2D

**Decimação/Downsampling: obter a DFT usando partes menores assumindo** $N = 2^m$

Plano é decompor $f(x)$ em índices pares e ímpares:

$$F(u) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r)W_N^{u\cdot 2r} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r+1)W_N^{u(2r+1)}$$

# Transformada Discreta de Fourier 2D

**Decimação/Downsampling: obter a DFT usando partes menores assumindo** $N = 2^m$

Plano é decompor $f(x)$ em índices pares e ímpares:

$$F(u) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r) W_N^{u \cdot 2r} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r+1) W_N^{u(2r+1)}$$

$$= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r) W_N^{u \cdot 2r} + W_N^{u} \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r+1) W_N^{u \cdot 2r}$$

# Transformada Discreta de Fourier 2D

**Decimação/Downsampling: obter a DFT usando partes menores assumindo** $N = 2^m$

Plano é decompor $f(x)$ em índices pares e ímpares:

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r) W_N^{u\cdot 2r} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r+1) W_N^{u(2r+1)} \\
&= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r) W_N^{u\cdot 2r} + W_N^u \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r+1) W_N^{u\cdot 2r} \\
&= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r) (W_N^2)^{ur} + W_N^u \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r+1) (W_N^2)^{ur}
\end{aligned}
$$

# Transformada Discreta de Fourier 2D

$$F(u) = \sum_{r=0}^{N/2-1} f(2r) W_N^{2ru} + W_N^u \sum_{r=0}^{N/2-1} f(2r+1) W_N^{2ru}$$

# Transformada Discreta de Fourier 2D

$$F(u) = \sum_{r=0}^{N/2-1} f(2r)W_N^{2ru} + W_N^u \sum_{r=0}^{N/2-1} f(2r+1)W_N^{2ru}$$

> Graças a periodicidade da DFT (teorema da amostragem):
>
> $$F(u + \frac{N}{2}) = F(u)$$

# Transformada Discreta de Fourier 2D

$$F(u) = \sum_{r=0}^{N/2-1} f(2r)W_N^{2ru} + W_N^u \sum_{r=0}^{N/2-1} f(2r+1)W_N^{2ru}$$

Graças a periodicidade da DFT (teorema da amostragem):

$$F(u + \frac{N}{2}) = F(u)$$

Podemos re-escrever a transformada completa como:

$$F(u) = \begin{cases} F_e(u) + W_N^{ux}F_o(u), & \text{for } 0 \leq u < N/2 \\ F_e(u - N/2) + W_N^{ux}F_o(u - N/2), & \text{for } N/2 \leq u < N \end{cases}$$

# Transformada Discreta de Fourier 2D

$$F(u) = \sum_{r=0}^{N/2-1} f(2r)W_N^{2ru} + W_N^u \sum_{r=0}^{N/2-1} f(2r+1)W_N^{2ru}$$

> Usando relações entre termos W:
>
> $$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2} = e^{-j\frac{4\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$$

# Transformada Discreta de Fourier 2D

$$F(u) = \sum_{r=0}^{N/2-1} f(2r)W_N^{2ru} + W_N^u \sum_{r=0}^{N/2-1} f(2r+1)W_N^{2ru}$$

Usando relações entre termos W:

$$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2} = e^{-j\frac{4\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$$

Podemos quebrar a DFT em uma soma de duas DFTs:

$$F(u) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r)W_{N/2}^{ur} + W_N^u \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r+1)W_{N/2}^{ur}$$

# Transformada Discreta de Fourier 2D

Podemos quebrar a DFT em uma soma de duas DFTs:

$$F(u) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r)W_{N/2}^{ur} + W_N^u \sum_{r=0}^{(N/2)-1} f(2r+1)W_{N/2}^{ur}$$

Para cada N/2 temos agora duas DFTs com N/4 amostras

Podemos repetir:

$$1: \quad \frac{N}{2} \to 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + N = \frac{N^2}{2} + N$$

$$2: \quad \frac{N}{4} \to 2\left(2\left(\frac{N}{4}\right)^2 + \frac{N}{2}\right) + N = \frac{N^2}{4} + 2N$$

# Transformada Discreta de Fourier 2D

> Para cada N/2 temos agora duas DFTs com N/4 amostras
>
> Podemos repetir:

$$
\begin{aligned}
1: &\quad \frac{N}{2} \to 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + N = \frac{N^2}{2} + N \\
2: &\quad \frac{N}{4} \to 2\left(2\left(\frac{N}{4}\right)^2 + \frac{N}{2}\right) + N = \frac{N^2}{4} + 2N \\
3: &\quad \frac{N}{8} \to 2\left[2\left(2\left(\frac{N}{8}\right)^2 + \frac{N}{4}\right) + \frac{N}{2}\right] + N = \frac{N^2}{8} + 3N \\
&\quad \vdots
\end{aligned}
$$

$N \qquad N^2$

# Transformada Discreta de Fourier 2D

Para cada N/2 temos agora duas DFTs com N/4 amostras

Podemos repetir:

$$
\begin{aligned}
1: \quad & \frac{N}{2} \rightarrow 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + N = \frac{N^2}{2} + N \\
2: \quad & \frac{N}{4} \rightarrow 2\left(2\left(\frac{N}{4}\right)^2 + \frac{N}{2}\right) + N = \frac{N^2}{4} + 2N \\
3: \quad & \frac{N}{8} \rightarrow 2\left(2\left(2\left(\frac{N}{8}\right)^2 + \frac{N}{4}\right) + \frac{N}{2}\right) + N = \frac{N^2}{8} + 3N \\
& \quad \vdots \\
P: \quad & \frac{N}{2^P} \rightarrow \frac{N^2}{2^P} + pN = N + N\log_2 N
\end{aligned}
$$

# Transformada Discreta de Fourier 2D

$$F(u) = \sum_{r=0}^{N/2-1} f(2r)W_N^{2ru} + W_N^u \sum_{r=0}^{N/2-1} f(2r+1)W_N^{2ru}$$

> Podemos re-escrever a transformada completa como:
>
> $$F(u) = \begin{cases} F_e(u) + W_N^{ux}F_o(u), & \text{for } 0 \leq u < N/2 \\ F_e(u - N/2) + W_N^{ux}F_o(u - N/2), & \text{for } N/2 \leq u < N \end{cases}$$

# SCC0251
# Processamento de Imagens

## Transformada de Fourier

Professora Leo Sampaio Ferraz Ribeiro