



PME 3100 – MECÂNICA I – Reoferecimento 2025 – Atividade E2.3

- Esta atividade é composta por 1 questão e deve ser realizada individualmente.
- Antes de realizar sua submissão, o aluno deve ler as [o regulamento geral das turmas semipresenciais](#).

Enunciado

Questão 1. Uma partícula P percorre uma curva descrita pela equação,

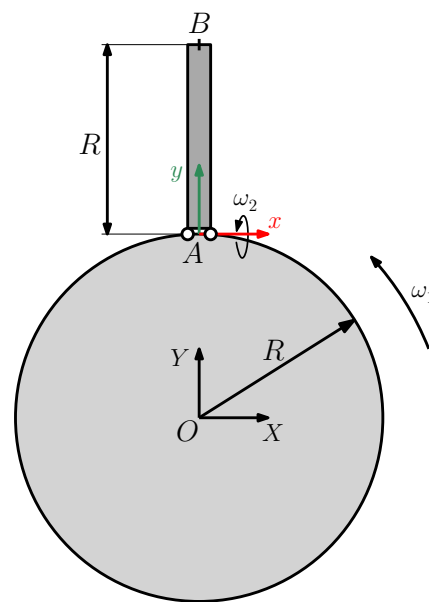
$$\vec{r}_p(u) = (P - O) = [(1 + \sin u) \cos u] \vec{i} + [(1 + \sin u) \sin u] \vec{j} + (\sin u) \vec{k},$$

de acordo com a lei horária $u(t) = \frac{t}{2}$. Para o instante $t = \frac{\pi}{2}$, determine:

- a) (3 pontos) a velocidade de P descrita em coordenadas cartesianas;
- b) (3 pontos) a aceleração de P descrita em coordenadas cartesianas;
- c) (2 pontos) o versor tangente $\hat{\tau}$ do triedro de Frenet;
- d) (3 pontos) o versor normal $\hat{n}$ do triedro de Frenet;
- e) (3 pontos) o versor binormal $\hat{b}$ do triedro de Frenet;
- f) (3 pontos) a velocidade de P descrita em coordenadas intrínsecas;
- g) (3 pontos) a aceleração de P descrita em coordenadas intrínsecas.

Questão 2. Na figura é ilustrado um disco de centro O e raio R que gira no plano com velocidade angular $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k} = 2\omega \vec{k}$, constante. No ponto A do disco está articulada uma barra AB de comprimento R que gira com velocidade angular $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{i} = 3\omega \vec{i}$, constante, em torno do eixo Ax. O sistema de coordenadas móvel Axy é solidário ao disco. Nestas condições pede-se:

- a) (6 pontos) determinar as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto B;
- b) (6 pontos) determinar as acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do ponto B;
- c) (4 pontos) determinar a velocidade escalar do ponto B e o versor tangente;
- d) (8 pontos) determinar as componentes intrínsecas da aceleração do ponto B e os versores normal e binormal.
- e) (6 pontos) determinar os versores tangente, normal e binormal da trajetória do ponto A.



Resolução ComentadaQuestão 1**Regra geral de correção válida igualmente para cada um dos item (a-g):**

Atribua uma nota na escala 0/2, 1/2 ou 2/2 para a solução de seu colega respeitando o critério estabelecido a seguir:

2/2: solução sem nenhum erro;

1/2: solução com expressões escritas corretamente e erro apenas em cálculo;

0/2: demais casos.

(a) A velocidade de P em coordenadas cartesianas é dada por:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P(u(t))}{dt} = \frac{d\vec{r}_P}{du} \frac{du}{dt} = \vec{r}'_P(u) \dot{u}(t), \quad \dot{u}(t) = \frac{1}{2}$$
$$\vec{v}_P = \frac{1}{2} \{ [\cos(2u) - \sin(u)]\vec{i} + [\sin(2u) + \cos(u)]\vec{j} + \cos(u)\vec{k} \}$$

Para o instante $t = \frac{\pi}{2}$, $u = \frac{\pi}{4}$, de modo que:

$$\vec{v}_P(t = \pi/2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\vec{j} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\vec{k}$$

(b) A aceleração de P em coordenadas cartesianas é dada por:

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P(u(t))}{dt} = \frac{d[\vec{r}'_P(u)\dot{u}(t)]}{dt} = \vec{r}''_P(u)\dot{u}^2(t) + \vec{r}'_P(u)\ddot{u}(t), \quad \dot{u}(t) = \frac{1}{2}, \quad \ddot{u}(t) = 0$$
$$\vec{a}_P = \frac{1}{4} \{ [-2\sin(2u) - \cos(u)]\vec{i} + [2\cos(2u) - \sin(u)]\vec{j} - \sin(u)\vec{k} \}$$

Para o instante $t = \frac{\pi}{2}$, $u = \frac{\pi}{4}$, de modo que:

$$\vec{a}_P(t = \pi/2) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)\vec{i} - \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\vec{j} - \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\vec{k}$$

(c) O versor tangente $\hat{t}$ no instante $t = \frac{\pi}{2}$ e $u = \frac{\pi}{4}$ é dado por:

$$\hat{t}(t) = \frac{\vec{v}_P(t)}{|\vec{v}_P(t)|} \Rightarrow \hat{t}(t = \pi/2) = -0.36\vec{i} + 0.86\vec{j} + 0.36\vec{k}$$

(d-e) O versor binormal $\hat{b}$ no instante $t = \frac{\pi}{2}$ e $u = \frac{\pi}{4}$ é dado por:

$$\hat{b}(t) = \frac{\vec{v}_P(t) \wedge \vec{a}_P(t)}{|\vec{v}_P(t) \wedge \vec{a}_P(t)|} \Rightarrow \hat{b}(t = \pi/2) = -0.12\vec{i} - 0.42\vec{j} + 0.90\vec{k}$$



Finalmente, o versor normal $\hat{n}$ no instante $t = \frac{\pi}{2}$ e $u = \frac{\pi}{4}$ é dado por:

$$\hat{n}(t) = \hat{b}(t) \wedge \hat{t}(t) \Rightarrow \boxed{\hat{t}(t = \pi/2) = -0.93\vec{i} - 0.28\vec{j} - 0.26\vec{k}}$$

(f) A velocidade de P em coordenadas intrínsecas no instante $t = \frac{\pi}{2}$ e $u = \frac{\pi}{4}$ é dada por:

$$\vec{v}_P(t) = |\vec{v}_P(t)|\hat{t}(t) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P(t = \pi/2) = 0.99\hat{t}}$$

(g) A aceleração de P em coordenadas intrínsecas no instante $t = \frac{\pi}{2}$ e $u = \frac{\pi}{4}$ é dada por:

$$\vec{a}_P(t) = a_t(t)\hat{t}(t) + a_n\hat{n}(t), \quad a_t(t) = \vec{a}_P(t) \cdot \hat{t}(t), \quad a_n(t) = \vec{a}_P(t) \cdot \hat{n}(t)$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{a}_P(t = \pi/2) = 0.03\hat{t} + 0.72\hat{n}}$$

Questão 2

a) Sendo o referencial solidário ao disco, têm-se para a velocidade de arrastamento do ponto B:

$$\vec{v}_{B,arr} = \vec{\omega}_1 \wedge (2R\vec{j}) = -4\omega R\vec{i}$$

Para a velocidade relativa:

$$\vec{v}_{B,r} = \vec{\omega}_2 \wedge (R\vec{j}) = 3\omega R\vec{k}$$

Portanto a velocidade absoluta fica:

$$\vec{v}_B = -4\omega R\vec{i} + 3\omega R\vec{k}$$

Adote uma nota na escala 0/3 a 3/3 para a resolução do seu colega, atribuindo um ponto para cada parcela correta da velocidade.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

b) Sendo o referencial solidário ao disco, têm-se para a aceleração de arrastamento do ponto B:

$$\vec{a}_{B,arr} = \vec{\omega}_1 \wedge [\vec{\omega}_1 \wedge (2R\vec{j})] = -8\omega^2 R\vec{j}$$

Para a aceleração relativa:

$$\vec{a}_{B,r} = \vec{\omega}_2 \wedge [\vec{\omega}_2 \wedge (R\vec{j})] = -9\omega^2 R\vec{j}$$

Portanto a aceleração absoluta fica:

$$\vec{a}_B = -8\omega^2 R\vec{j} - 9\omega^2 R\vec{j} + 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{B,r} = -17\omega^2 R\vec{j}$$

Adote uma nota na escala 0/3 a 3/3 para a resolução do seu colega, atribuindo um ponto para cada parcela correta da aceleração.

c) A velocidade escalar é dada pela norma do vetor $\vec{v}_B$, e portanto:

$$v_B = \sqrt{16\omega^2 R^2 + 9\omega^2 R^2} = 5\omega R$$

Já o versor tangente é dado pela normalização do vetor velocidade, ou seja:

$$\vec{t}_B = \frac{\vec{v}_B}{v} = -\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{k}$$

Adote uma nota na escala 0/2 a 2/2 para a resolução do seu colega, atribuindo um ponto para a velocidade escalar correta e um ponto para o versor tangente correto.



d) A componente tangencial da aceleração é dada por:

$$a_{t,B} = \vec{a}_B \cdot \vec{t}_B = 0$$

Assim sendo, a única componente não nula da aceleração do ponto B é a componente normal de forma que ela fica dada por:

$$a_{n,B} = 17\omega^2 R$$

E o versor normal fica simplesmente:

$$\vec{n}_B = -\vec{j}$$

Por fim, o versor binormal é dado por:

$$\vec{b}_B = \vec{t}_B \wedge \vec{n}_B = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{k}$$

Adote uma nota na escala 0/4 a 4/4 para a resolução do seu colega, atribuindo um ponto para cada componente intrínseca correta da aceleração, um ponto para o versor normal correto e um ponto para o versor binormal correto.

e) Notando que o ponto A faz uma trajetória circular com velocidade constante no sentido anti-horário, temos que o versor tangente é simplesmente a tangente ao círculo em A para a esquerda de forma que:

$$\vec{t}_A = -\vec{i}$$

O versor normal aponta para o centro da trajetória, de forma que:

$$\vec{n}_A = -\vec{j}$$

E por fim, o versor binormal é normal ao plano da figura, e pela orientação dos demais fica:

$$\vec{b}_A = \vec{k}$$

Adote uma nota na escala 0/3 a 3/3 para a resolução do seu colega, atribuindo um ponto para cada versor correto.