

A DERIVADA COMO UMA FUNÇÃO

Função derivável ou diferenciável
Derivada de ordem superior

Disciplina: Cálculo I LOB1003

Profa. responsável: Diovana A. S. Napoleão

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais – EEL-USP

A DERIVADA COMO UMA FUNÇÃO

Neste tópico será considerado a derivada de uma função f em um número fixo a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

Consideraremos o número a variando e será substituído por uma variável x ,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

Dado qualquer número x para o qual esse limite exista, atribuímos a x o número $f'(x)$. Assim, podemos considerar f' como a nova função, chamada **derivada de f** e definida pela Equação 2. Sabemos que o valor de f' em $(x, f'(x))$, pode ser interpretado geometricamente como a **inclinação da reta tangente** ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

REGRAS DE DERIVAÇÃO

Podemos estimar o valor da derivada para qualquer valor de x traçando a tangente no ponto $(x, f(x))$ e estimando sua inclinação. O gráfico de uma função f é ilustrado na Figura 1, considere-o para esboçar o gráfico da derivada f' .

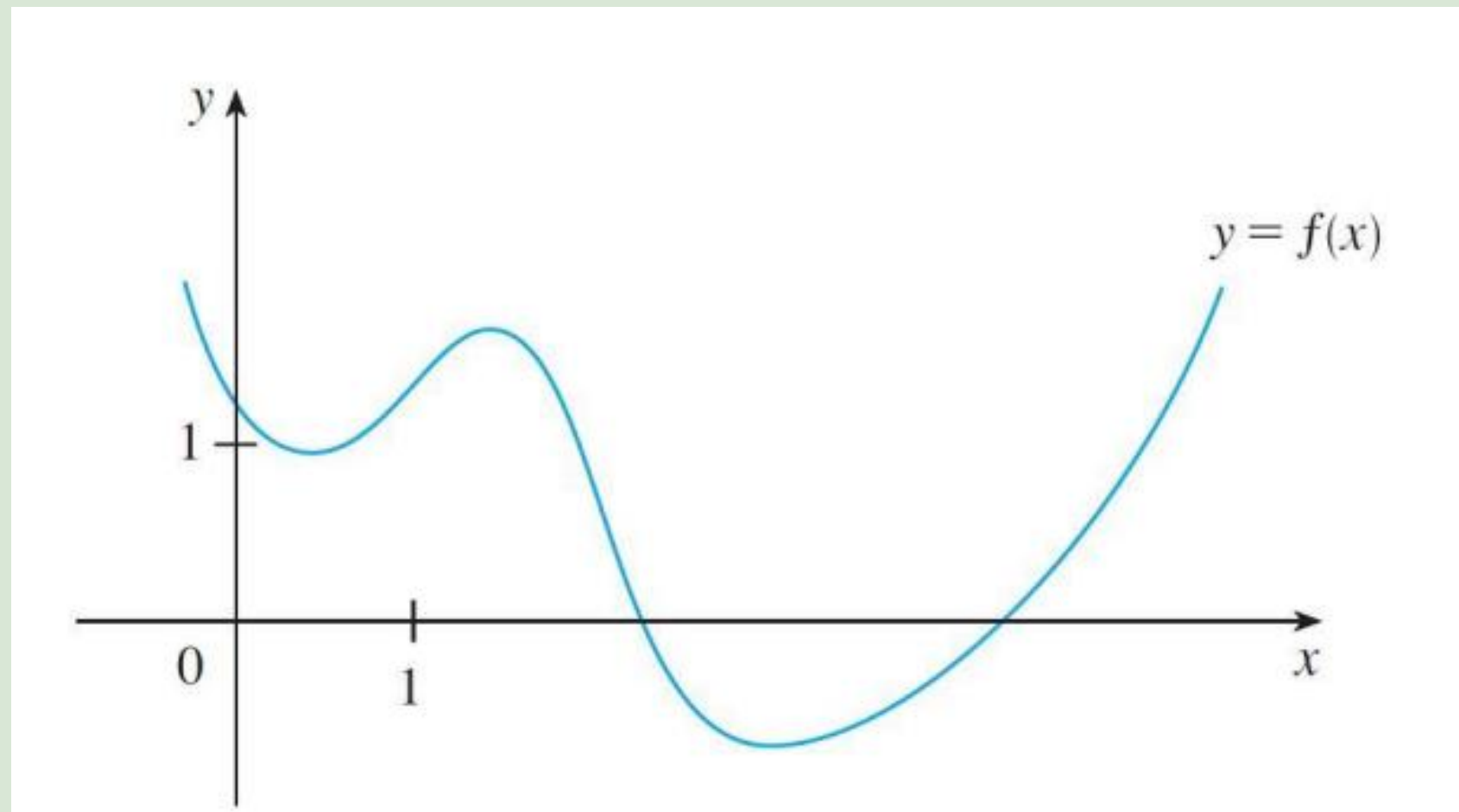


Figura 1- Gráfico de $f(x)$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

Podemos estimar o valor da derivada para qualquer valor de x traçando a tangente no ponto $(x, f(x))$ e estimando sua inclinação. Por exemplo, para $x = 5$ traçamos a tangente em P e estimamos sua inclinação como cerca de , então $f'(5) \approx 1,5$.

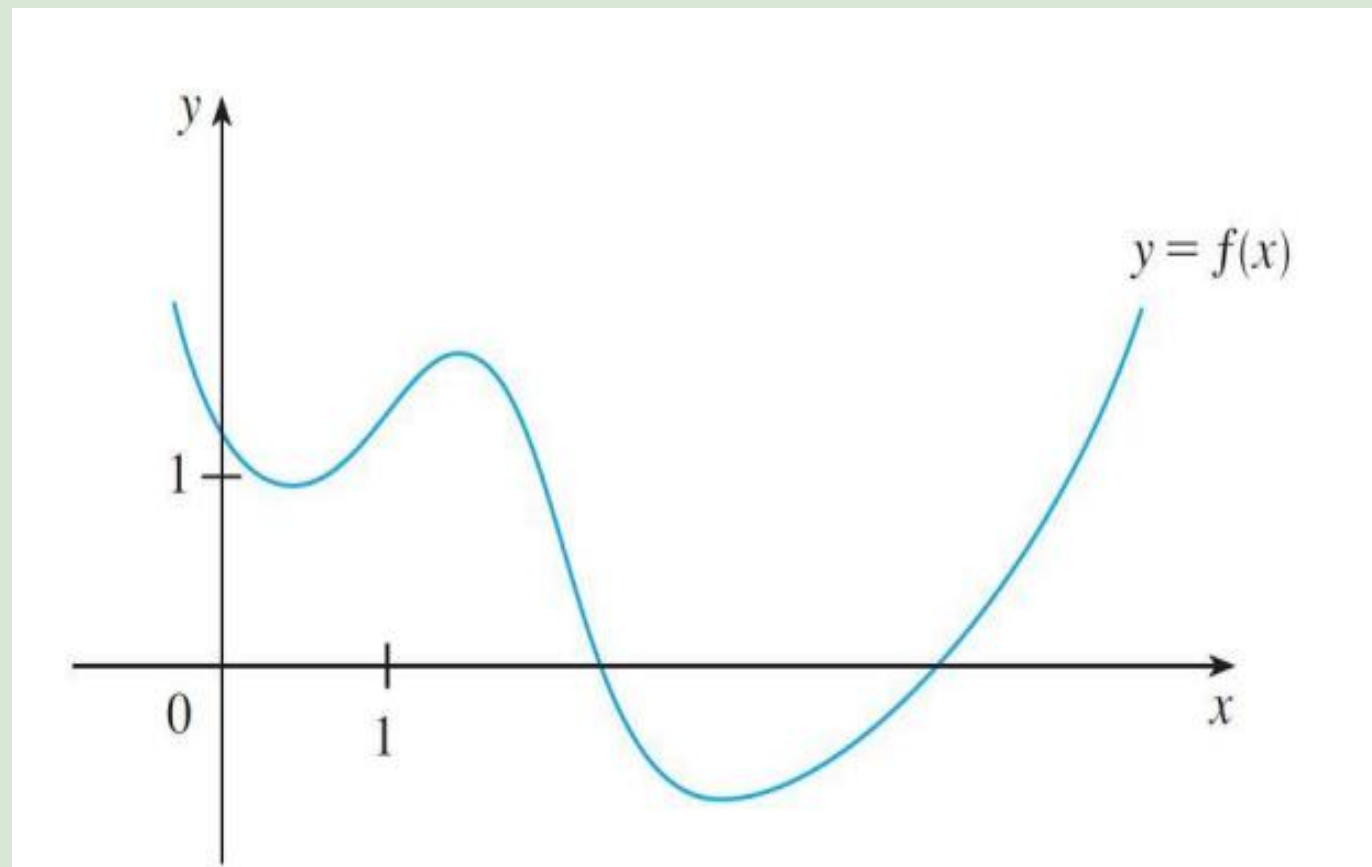


Figura 1- Gráfico de $f(x)$

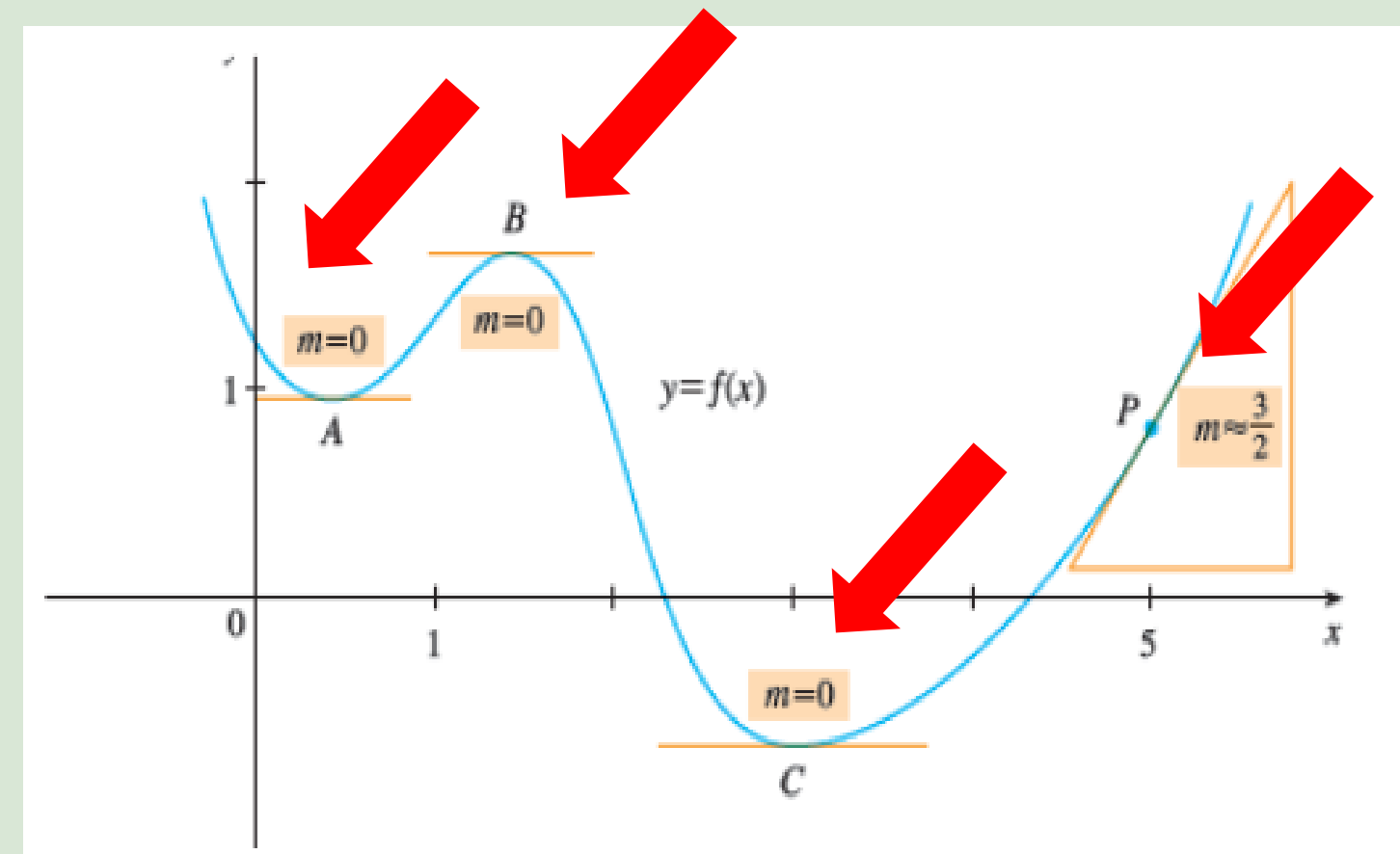


Figura 2- Gráfico de $f(x)$ com o coeficiente angular da reta tangente

NOTAÇÃO DE DERIVADAS

Se usarmos a notação tradicional $y = f(x)$ para indicar que a variável independente é x e a variável dependente é y , então algumas notações alternativas para a derivada são as seguintes:

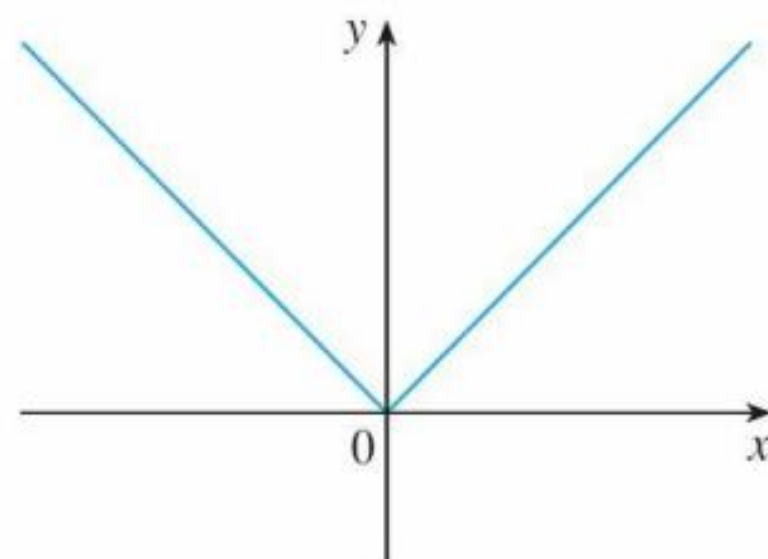
$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Os símbolos D e d/dx são chamados operadores diferenciais, pois indicam a operação de diferenciação.

FUNÇÃO DERIVÁVEL OU DIFERENCIÁVEL

3 Definição Uma função f é derivável ou diferenciável em a , se $f'(a)$ existir. É derivável ou diferenciável em um intervalo aberto (a, b) [ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou $(-\infty, \infty)$] se for diferenciável em cada número do intervalo.

Onde a função $f(x) = |x|$ é diferenciável?



$$y = f(x) = |x|$$

Figura 3- Gráfico da função modular

4 Teorema Se f for diferenciável em a , então f é contínua em a .

FUNÇÃO DERIVÁVEL OU DIFERENCIÁVEL

Como uma função pode não ser diferenciável?

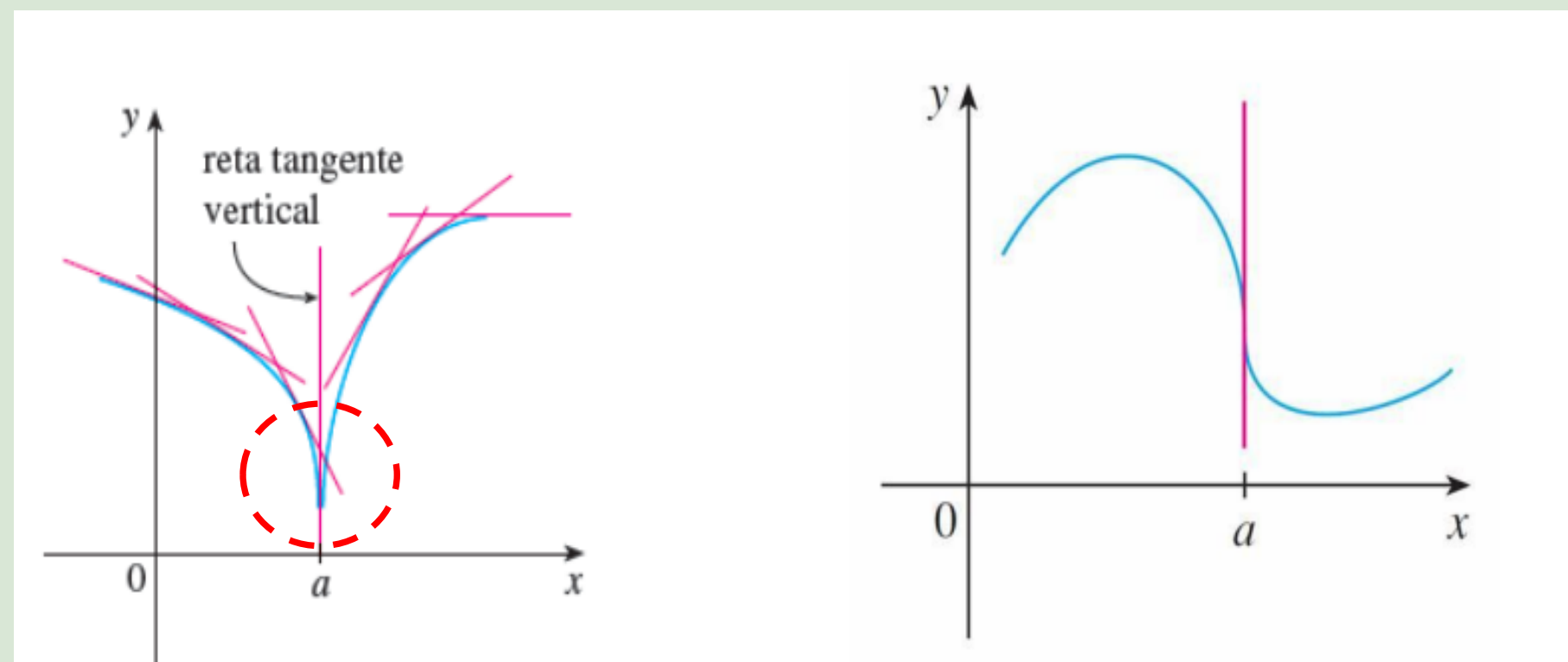


Figura 4- Gráfico de $f(x)$ com o coeficiente angular da reta tangente vertical

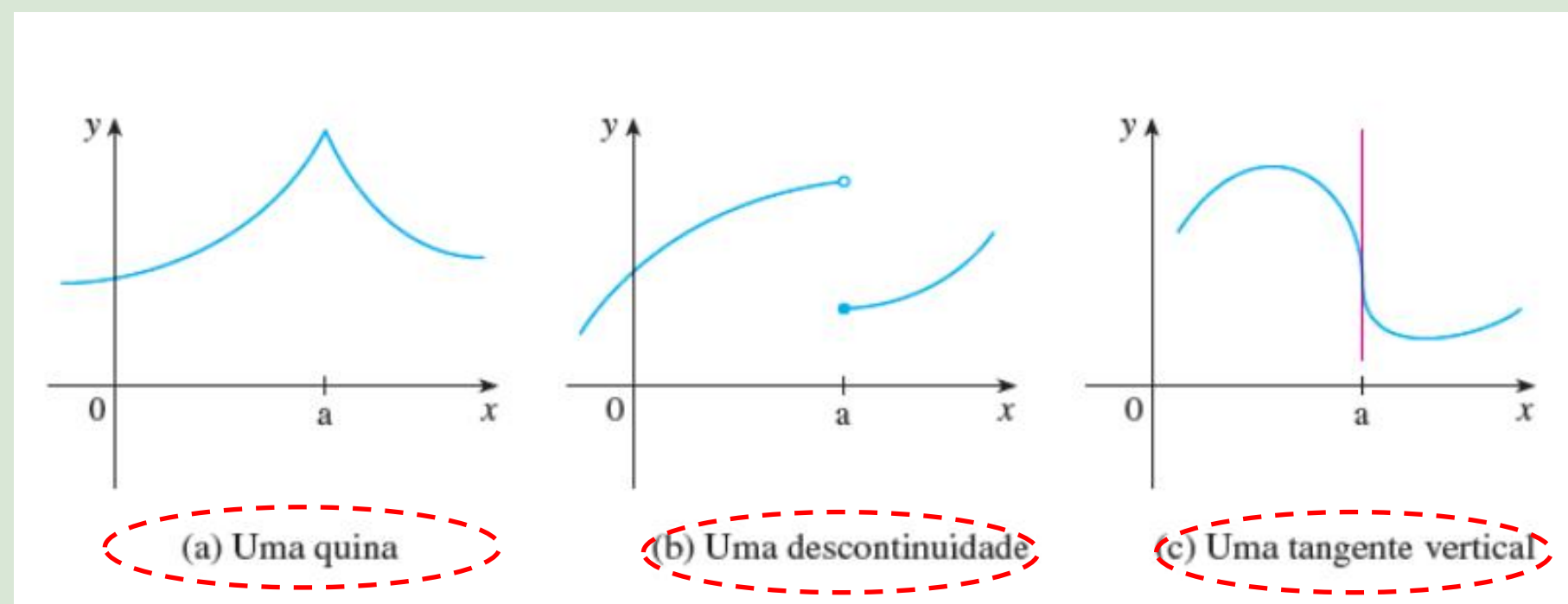


Figura 5- Gráfico de $f(x)$ com as três possibilidades de uma função deixar de ter a derivada

DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' também é uma função, de modo que f' pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$. Esta nova função f'' é chamada de segunda derivada de f , pois é a derivada de **ordem dois** de f .

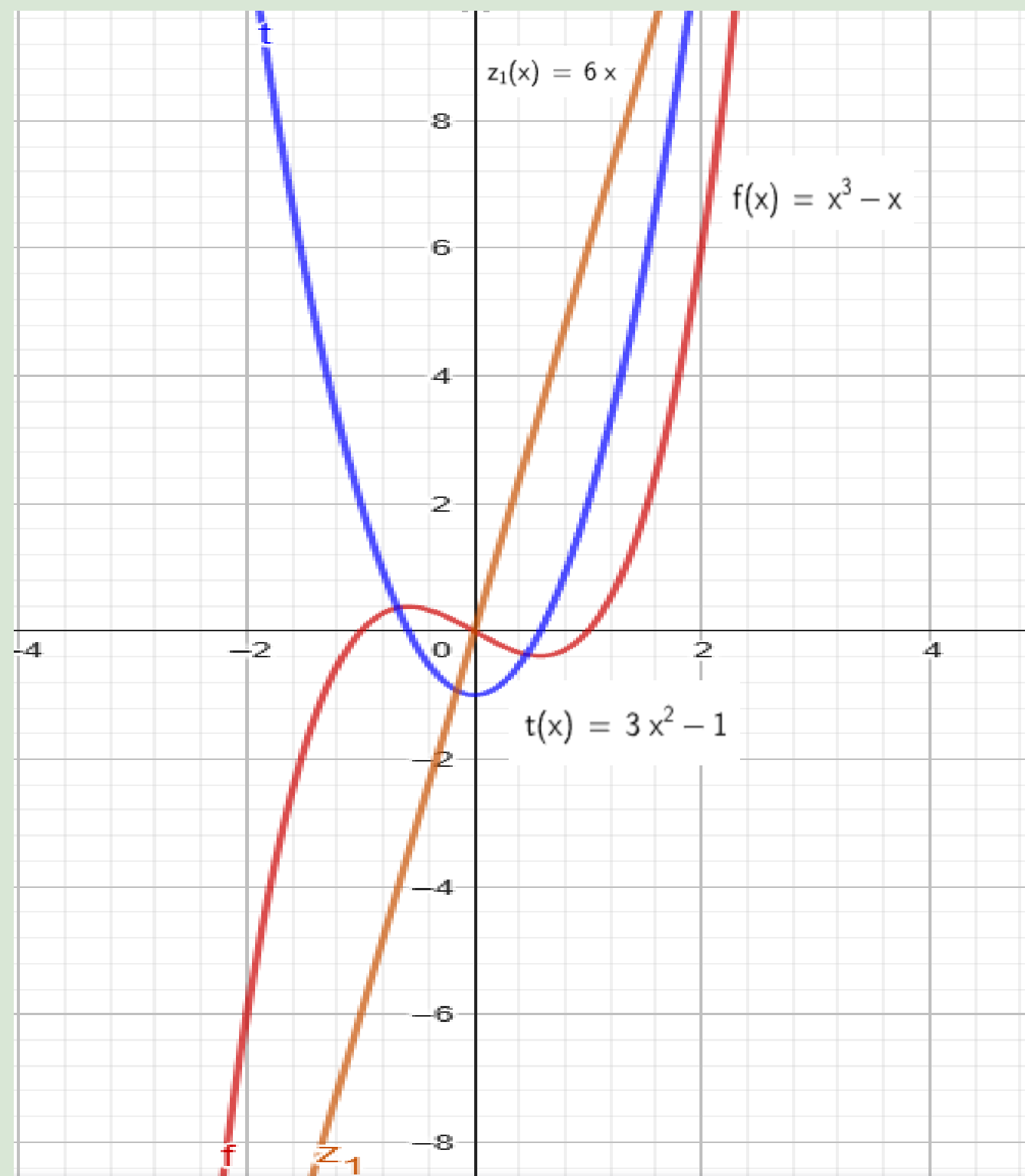
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

A terceira derivada f''' (ou derivada de **terceira ordem**) é a derivada da segunda derivada: $f''' = (f'')'$. Assim, $f'''(x)$ pode ser interpretada como a inclinação da curva $y = f''(x)$ ou como a taxa de variação $f''(x)$. Se $y = f(x)$, então as notações alternativas são

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Exemplo 1: Determinar a derivada de terceira ordem da $f(x) = x^3 - x$.



DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Exemplo 2: Determinar a derivada de ordem 21 da função $f(x) = \text{sen}x$.

As derivadas de $f(x) = \text{sen}x$ se repetem num ciclo de período 4.

Para determinar a derivada de ordem 21 será considerada a divisão $21/4$, ou seja:

$$21 = 5 \times 4 + 1$$

Primeira derivada do 6º ciclo

Ordem 4

Número de ciclos

Portanto, a derivada de ordem 21 é correspondente a $f^{(21)}(x) = f'(x) = \text{cos}x$