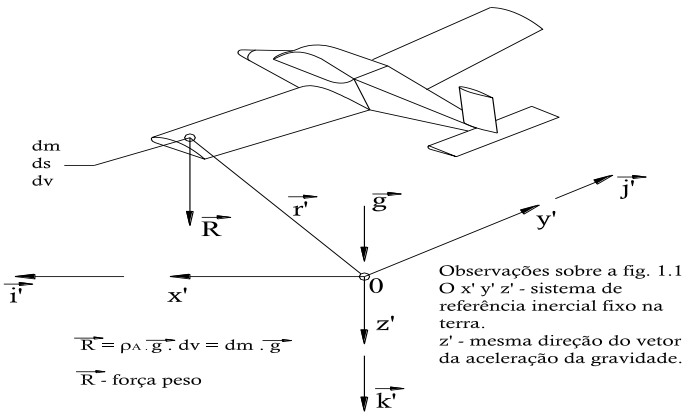
Slide 1

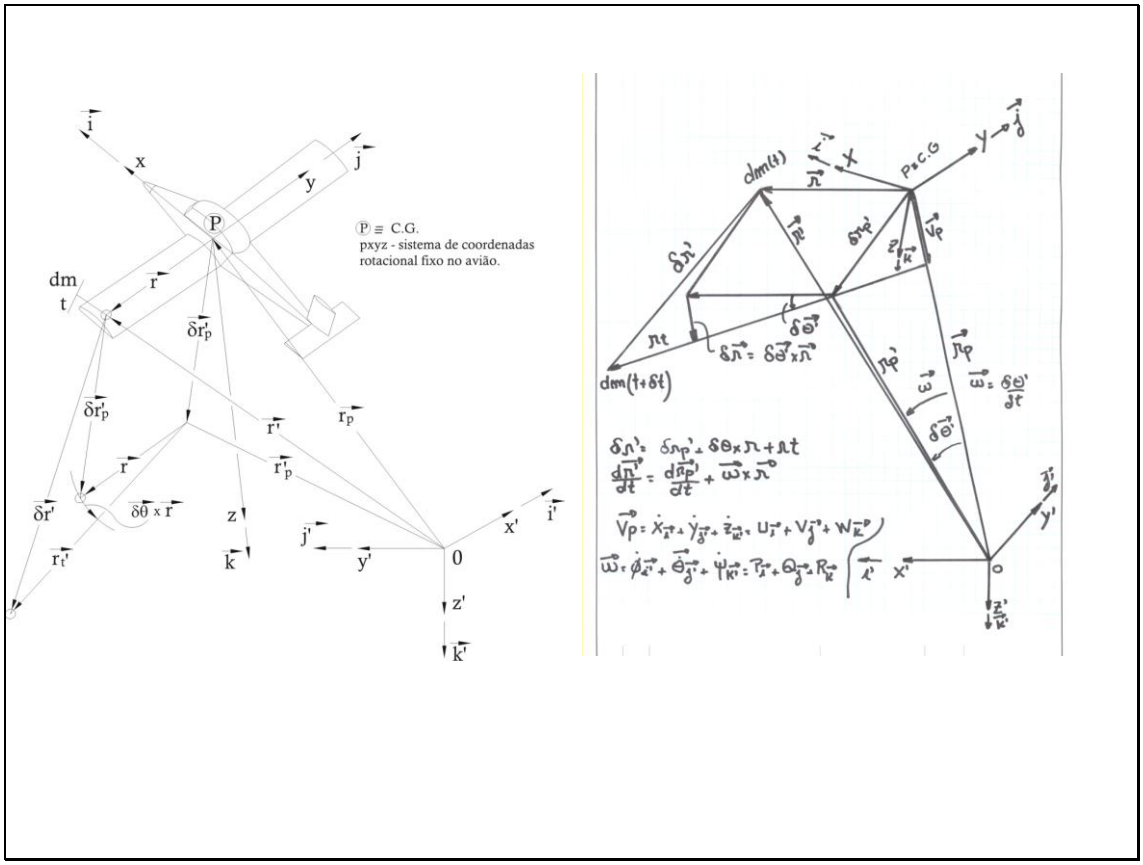


$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_v \rho_A . \frac{d\overrightarrow{r'(t)}}{dt} . dv}_{\text{variação da quantidade de movimento linear c/ o tempo}} = \underbrace{\int_v \rho_A . \vec{g} . dv + \int_S \vec{F} . ds}_{\text{forças externas aplicadas no avião}}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_v \overrightarrow{r'(t)} \times \rho_A \frac{d\overrightarrow{r'(t)}}{dt} . dv}_{\text{variação da quantidade de movimento angular com o tempo}} = \underbrace{\int_v \overrightarrow{r'(t)} \times \rho_A . \vec{g} . dv + \int_s \overrightarrow{r'(t)} \times \vec{F} . ds}_{\text{torques externos aplicados no avião com relação ao ponto O}}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_T$$

Slide 2


P ≡ C.G.
pxyz - sistema de coordenadas rotacional fixo no avião.
dm
t
P
x
y
z
0
x'
y'
z'
dm(t)
dm(t+δt)
P+C.G

Slide 3

$$\frac{d}{dt}\int_v \rho_A . \frac{d\vec{r}'}{dt}.dv = \frac{d}{dt}\int_v \rho_A . \left(\frac{d\overrightarrow{r_{p'}}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r} \right).dv =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_v \rho_A . \frac{d\overrightarrow{r_{p'}}}{dt}.dv + \frac{d}{dt}\int_v \rho_A . (\vec{\omega}\times\vec{r}).dv =$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{r_{p'}}}{dt}\int_v \rho_A . dv \right)}_{m.\frac{d\overrightarrow{V_p}}{dt}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\int_v \vec{r}.\rho_A.dv \right)}_{+\ 0 \text{ quando P} \equiv \text{C.G.}}$$

válido somente quando $\frac{dm}{dt} = 0$

$$\int_v \rho_A . dv = m \Rightarrow$$

$$P \equiv C.G. \Rightarrow \int_v \rho_A . \vec{r}.dv = 0$$

$$m.\frac{d\overrightarrow{V_p}}{dt} = m.\vec{g} + \int_s \vec{F}.ds = m.\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_T$$

Slide 4

$$\frac{d}{dt}\int_v \vec{r}'\times.\rho_A\frac{d\vec{r}'}{dt}dv=\frac{d}{dt}\int_v \vec{r}'\times\rho_A\left(\frac{d\overrightarrow{r_{p'}}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}\right).dv$$

$$\frac{d\overrightarrow{r_{p'}}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{r}'=\overrightarrow{r_{p'}}+\vec{r}\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\int_v \vec{r}'\times\rho_A\frac{d_{\vec{r}'}}{dt}.dv=\underbrace{\frac{d}{dt}\int_v \overrightarrow{r_{p'}}\times\rho_A\frac{d\overrightarrow{r_{p'}}}{dt}.dv}_{1}+\underbrace{\frac{d}{dt}\int_v \vec{r}\times\rho_A\frac{d\overrightarrow{r_{p'}}}{dt}.dv}_{2}+$$

$$+\underbrace{\frac{d}{dt}\int_v \overrightarrow{r_{p'}}\times\rho_A.(\vec{\omega}\times\vec{r}).dv}_{3}+\frac{d}{dt}\int_v \vec{r}\times\rho_A(\vec{\omega}\times\vec{r}).dv$$

Slide 5

1 => $$\frac{d}{dt}\int_v \overrightarrow{r_{p'}} \times \rho_A \frac{d\overrightarrow{r_{p'}}}{dt}.dv = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{r_{p'}} \times \frac{d\overrightarrow{r_{p'}}}{dt}\int_v \rho_A dv = m\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{r_{p'}} \times \vec{V}_p\right)\right.$$

2 => $$\frac{d}{dt}\int_v \vec{r} \times \rho_A \frac{d\overrightarrow{r_{p'}}}{dt}dv = -\frac{d}{dt}\left(\int_v \frac{d\overrightarrow{r_{p'}}}{dt} \times \rho_A \cdot \vec{r}.dv\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}_{p'}}{dt}\int_v \rho_A.\vec{r}.dv\right) = 0$$

3 => $$\frac{d}{dt}\int_v \overrightarrow{r_{p'}} \times \rho_A\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right).dv = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{r_{p'}} \times \left(\vec{\omega}.\times \int_v \rho_A.\vec{r}.dv\right)\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_v \vec{r}' \times \rho_A \frac{d\vec{r}'}{dt}.dv = \frac{d}{dt}\left[m.\left(\overrightarrow{r_{p'}} \times \overrightarrow{V}_p\right)\right] + \frac{d}{dt}\int_v \vec{r} \times \rho_A \frac{d\vec{r}}{dt}dv$$

$\vec{H}_o$ — QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR COM RELAÇÃO AO SISTEMA INERCIAL

$\overrightarrow{HPO}$

+

$\overrightarrow{HP}$ — QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR COM RELAÇÃO AO SISTEMA ROTACIONAL

Slide 6

$$\frac{d}{dt}\int_v \vec{r}\times\rho_A.\frac{d\vec{r}}{dt}.dv = \overrightarrow{torq}_{\substack{aerod\\(C.G.)}} + \overrightarrow{torq}_{\substack{tração\\(C.G.)}} + \cancel{\overrightarrow{torq}_{\substack{peso\\(C.G.)}}}^{\,0}$$

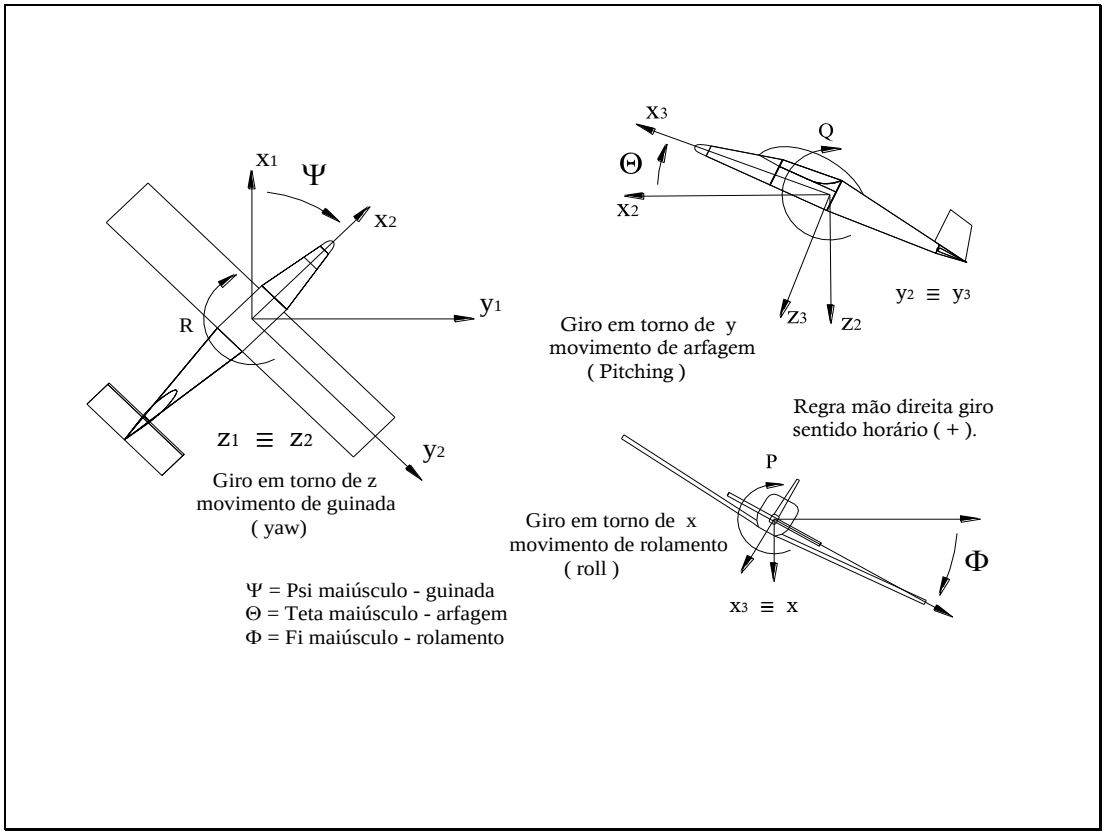
$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{HP}\right) = \frac{d}{dt}\left(\int_v \vec{r}\times\rho_A.\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right).dv\right) = T_A + T_T$$

$$\overrightarrow{HP} = H_X\vec{i} + H_Y\vec{j} + H_Z\vec{k}$$

$$\vec{r} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

$$\vec{\omega} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

Slide 7


x1
Ψ
x2
y1
R
z1 ≡ z2
y2
Giro em torno de z
movimento de guinada
(yaw)
Ψ = Psi maiúsculo - guinada
Θ = Teta maiúsculo - arfagem
Φ = Fi maiúsculo - rolamento
x3
Q
Θ
x2
y2 ≡ y3
z3
z2
Giro em torno de y
movimento de arfagem
(Pitching)
Regra mão direita giro
sentido horário (+).
P
Giro em torno de x
movimento de rolamento
(roll)
Φ
x3 ≡ x

Slide 8

$$\Rightarrow H_x = P\int_v \rho_A\left(Y^2 + Z^2\right)\cdot dv - Q\int_v \rho_A(XY)\cdot dv - R\int_v \rho_A(XZ)\cdot dv$$

$$H_y = Q\int_v \rho_A\left(X^2 + Z^2\right)\cdot dv - P\int_v \rho_A(XY)\cdot dv - R\int_v \rho_A(YZ)\cdot dv$$

$$H_z = R\int_v \rho_A\left(X^2 + Y^2\right)\cdot dv - P\int_v \rho_A(XZ)\cdot dv - Q\int_v \rho_A(XZ)\cdot dv$$

Momentos de inércia	Produtos de inércia
$\int_v \left(Y^2 + Z^2\right)\cdot \rho_A \cdot dv = Ixx$	$\int_v XY\rho_A dv = Ixy$
$\int_v \left(X^2 + Z^2\right)\cdot \rho_A \cdot dv = Iyy$	$\int_v YZ\rho_A dv = Iyz$
$\int_v \left(X^2 + Y^2\right)\cdot \rho_A \cdot dv = Izz$	$\int_v ZX\rho_A dv = Izx$

Slide 9

$$H_x = PI_{xx} - QI_{xy} - RI_{xz}$$

$$H_y = QI_{yy} - PI_{xy} - RI_{yz}$$

$$H_z = RI_{zz} - PI_{xz} - QI_{yz}$$

$$\dot{\overrightarrow{HP}} = \frac{d}{dt}\left(H_x\vec{i} + H_y\vec{j} + H_z\vec{k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\overrightarrow{HP}} = \dot{H}_x\vec{i} + \dot{H}_y\vec{j} + \dot{H}_z\vec{k} + H_x\dot{\vec{i}} + H_y\dot{\vec{j}} + H_z\dot{\vec{k}}$$

Slide 10

$$\Rightarrow torque_x = \dot{H}_x - RH_y + QH_z$$

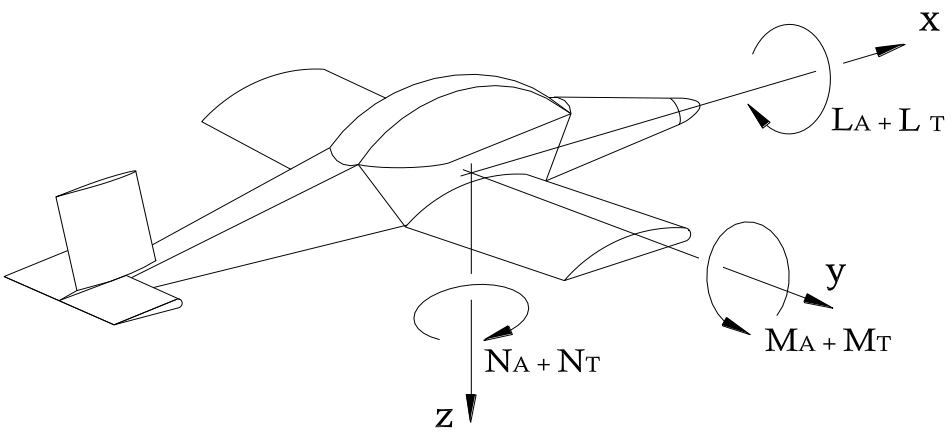
$$torque_y = \dot{H}_y + RH_x - PH_z$$

$$torque_z = \dot{H}_z - QH_x + PH_y$$

$$\overrightarrow{torque} = \overrightarrow{T_A} + \overrightarrow{T_T} = L_A\vec{i} + M_A\vec{j} + N_A\vec{k} + L_T\vec{i} + M_T\vec{j} + N_T\vec{k}$$

Slide 11

Regra mão direita giro sentido horário (+).



Obs : Torque de arfagem positivo tende a levantar o nariz do avião.
A - Torque aerodinâmico.
T - Torque devido ás forças de tração do sistema de propulsão.

Slide 12

$$I_{xx}\dot{P} - I_{xz}\dot{R} - I_{xz}PQ + \left(I_{zz} - I_{yy}\right)QR - I_{xy}\dot{Q} - I_{xy}RP - I_{yz}R^2 - I_{yz}Q^2 = L_A + L_T$$

(1.33)

$$\Rightarrow I_{yy}\dot{Q} + \left(I_{xx} - I_{zz}\right)PR + I_{xz}\left(P^2 - R^2\right) - \dot{P}I_{xy} - \dot{R}I_{yz} - RQI_{xy} + PQI_{yz} = M_A + M_T$$

(1.34)

$$\Rightarrow I_{zz}\dot{R} - I_{xy}\dot{P} + \left(I_{yy} - I_{xx}\right)PQ + I_{xz}QR - \dot{Q}I_{yz} + Q^2 I_{xy} - PI_{xy} - PRI_{yz} = N_A + N_T$$

(1.35)

Equações diferenciais de movimento vindas da variação da quantidade de movimento angular com o tempo.

P, Q e R componentes da velocidade angular do c.g. no sistema de coordenadas rotacional

Equações diferenciais não lineares.

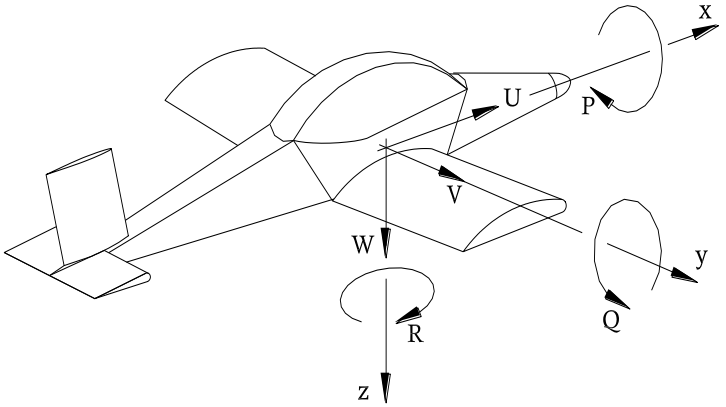
Slide 13

$$m.\frac{d\overrightarrow{r_{p'}}}{dt} = m\left(\dot{\vec{V}}_P + \vec{\omega}\times\overrightarrow{V_P}\right) = m\vec{g} + F_A + F_T$$

$$\overrightarrow{V}_P = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k}$$

$$\vec{\omega} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

P, Q, R positivos no sentido horário, regra da mão direita.



Slide 14

$$m.\frac{d\overrightarrow{V_P}}{dt} = m\left(\dot{\overrightarrow{V_P}} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{V_P}\right) = m\vec{g} + F_A + F_T$$

$$\overrightarrow{V}_P = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k} \qquad \vec{\omega}\times\overrightarrow{Vp} = \left(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}\right)\times\left(U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k}\right) =$$

$$\left.\begin{aligned} m\cdot\left(\dot{U} - VR + QW\right) &= m.g_x + FA_x + FT_x \\ m\cdot\left(\dot{V} + UR - WP\right) &= m.g_y + FA_y + FT_y \\ m\cdot\left(\dot{W} - UQ + VP\right) &= m.g_z + FA_z = FT_z \end{aligned}\right\} \quad (1.37)$$

U, V e W projeções do vetor velocidade do C.G. no sistema de coordenadas rotacional.
Sistema de equações diferenciais não linear.

Slide 15

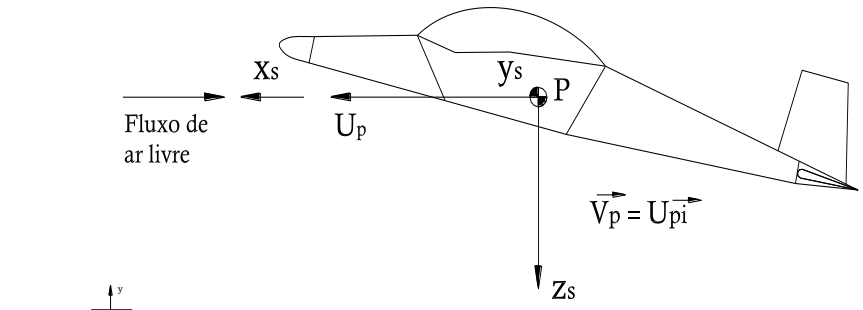
$$I_{xx}\dot{P} - I_{xz}\dot{R} - I_{xz}PQ + \left(I_{zz} - I_{yy}\right)QR - I_{xy}\dot{Q} - I_{xy}RP - I_{yz}R^2 - I_{yz}Q^2 = L_A + L_T \quad (1.33)$$

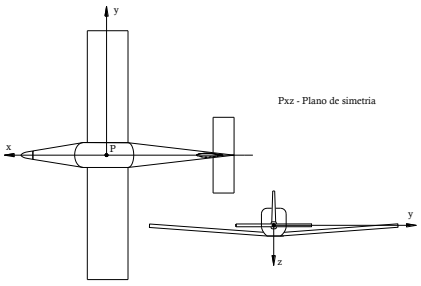
$$\Rightarrow I_{yy}\dot{Q} + \left(I_{xx} - I_{zz}\right)PR + I_{xz}\left(P^2 - R^2\right) - \dot{P}I_{xy} - \dot{R}I_{yz} - RQI_{xy} + PQI_{yz} = M_A + M_T \quad (1.34)$$

$$\Rightarrow I_{zz}\dot{R} - I_{xy}\dot{P} + \left(I_{yy} - I_{xx}\right)PQ + I_{xz}QR - \dot{Q}I_{yz} + Q^2 I_{xy} - PI_{xy} - PRI_{yz} = N_A + N_T \quad (1.35)$$

$$\left.\begin{aligned} m\cdot\left(\dot{U} - VR + QW\right) &= m.g_x + FA_x + FT_x \\ m\cdot\left(\dot{V} + UR - WP\right) &= m.g_y + FA_y + FT_y \\ m\cdot\left(\dot{W} - UQ + VP\right) &= m.g_z + FA_z = FT_z \end{aligned}\right\} \quad (1.37)$$

Slide 16





Pxz - Plano de simetria

$$\int_v (YZ)\rho_A dv = I_{yz} = 0 \qquad (1.38)$$

$$\int_v (XY)\rho_A dv = I_{xy} = 0 \qquad (1.39)$$

$$Ixz = \int_v (XZ)\rho_A dv = 0$$

Foguetes e mísseis

Slide 17

Com o plano de simetria tem-se:

$$\left.\begin{aligned} Ixx\dot{P} - Ixz\dot{R} - IxzPQ + (Izz - Iyy)QR &= L_A + L_T \\ Iyy\dot{Q} + (Ixx - Izz)PR + Ixz(P^2 - R^2) &= M_A + M_T \\ Izz\dot{R} - Ixz\dot{P} + (Iyy - Ixx)PQ + IxzQR &= N_A + N_T \end{aligned}\right\}$$

PLANO SIMETRIA

(1.41)

$$\begin{Bmatrix} L \\ M \\ N \end{Bmatrix} = I \bullet \dot{\omega} + \omega \otimes (I \bullet \omega) \qquad I = \begin{bmatrix} Ixx & -Ixy & -Ixz \\ -Iyx & Iyy & -Iyz \\ -Izx & -Izy & Izz \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} m \cdot (\dot{U} - VR + QW) &= m.g_x + FA_x + FT_x \\ m \cdot (\dot{V} + UR - WP) &= m.g_y + FA_y + FT_y \\ m \cdot (\dot{W} - UQ + VP) &= m.g_z + FA_z = FT_z \end{aligned}\right\}$$

(1.37)

$$\begin{Bmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \end{Bmatrix} = m \bullet \left(\dot{Vp} + \omega \otimes Vp \right)$$

Slide 18

$$\begin{Bmatrix} P \\ Q \\ R \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\text{sen}\,\Theta \\ 0 & \cos\Phi & \cos\Theta\,.\text{sen}\,\Phi \\ 0 & -\text{sen}\,\Phi & \cos\Theta\,.\cos\Phi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.65)$$

J

$$\begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{sen}\,\Phi.\text{tg}\,\Theta & \cos\Phi.\text{tg}\,\Theta \\ 0 & \cos\Phi & -\text{sen}\,\Phi \\ 0 & \text{sen}\,\Phi.\sec\Theta & \cos\Phi.\sec\Theta \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ Q \\ R \end{Bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots (1.66)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Psi & -\text{sen}\,\Psi & 0 \\ \text{sen}\,\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Theta & 0 & \text{sen}\,\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\Theta & 0 & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & -\text{sen}\,\Phi \\ 0 & \text{sen}\,\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \ldots\ldots (1.53)$$

Relações cinemáticas

Slide 19

MOVIMENTO perturbado

$$U = U_1 + u(t) \qquad V = V_1 + v(t) \qquad W = W_1 + w(t)$$

$$P = P_1 + p(t) \qquad Q = Q_1 + q(t) \qquad R = R_1 + r(t)$$

$$\Psi = \Psi_1 + \psi(t) \qquad \Theta = \Theta_1 + \vartheta(t) \qquad \Phi = \Phi_1 + \varphi(t)$$

$$F_{A_x} = F_{A_{x_1}} + f_{Ax} \qquad F_{T_x} = F_{T_{x_1}} + f_{Tx}$$

$$F_{Ay} = F_{A_{y_1}} + f_{Ay} \qquad F_{Ty} = F_{T_{y_1}} + f_{Ty}$$

$$F_{Az} = F_{A_{z_1}} + f_{A_z} \qquad F_{Tz} = F_{T_{z_1}} + f_{Tz}$$

$$L_A = L_{A_1} + l_A(t) \qquad L_T = L_{T_1} + l_T$$

$$M_A = M_{A_1} + m_A(t) \qquad M_T = M_{T_1} + m_T$$

$$N_A(t) = N_{A1} + n_A(t) \qquad N_T = N_{T_1} + n_T$$

Substituindo (2.17), (2.16) e (2.15) em (1.70), (1.46), (1.47) e (1.48), pag 25, e ainda lembrando que

$$\dot{U}_1 = \dot{V}_1 = \dot{W}_1 = \dot{P}_1 = \dot{Q}_1 = \dot{R}_1 = 0$$ Pag 41

Slide 20

Não há velocidade inicial de escorregamento $\Rightarrow V_1 = 0$

Não há ângulo rolamento $\Phi_1 = 0$

$V_1 = \Phi_1 = 0$

$P_1 = Q_1 = R_1 = \dot{\Psi}_1 = \dot{\Theta}_1 = \dot{\Phi}_1 = 0$

$$m\left(\dot{\mu} + W_1.q\right) = -mg.\vartheta.\cos\Theta_1 + f_{A_x} + f_{T_x}$$

$$m\left(\dot{w} - U_1.q\right) = -mg.\vartheta.\text{sen}\,\Theta_1 + f_{A_z} + f_{T_z}$$

$$Iyy.\dot{q} = m_A + m_T$$

$$q = \dot{\vartheta}$$

$$m\left(\dot{v} + U_1.r - W_1.p\right) = -mg.\varphi.\cos\Theta_1 + f_{A_y} + f_{T_y}$$

$$Ixx.\dot{p} - Ixz.\dot{r} = l_A + l_T$$

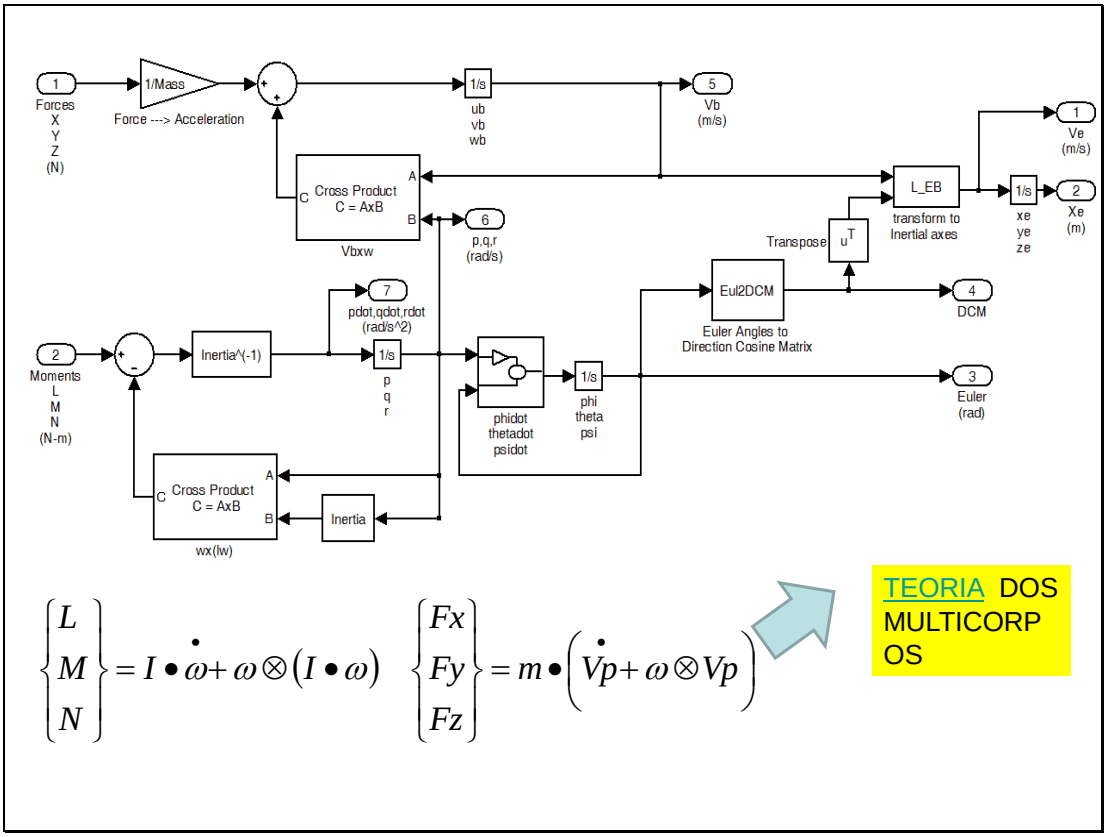
$$Izz.\dot{r} - Ixz.\dot{p} = m_A + m_T$$

$$p = \dot{\varphi} - \dot{\psi}.\text{sen}\,\Theta_1$$

$$r = \dot{\varphi}\cos\Theta_1$$

Sistema de equações diferenciais linear de 9 x 9
Solução mais fácil e rápida que o não linear.

Slide 21



$$\begin{Bmatrix} L \\ M \\ N \end{Bmatrix} = I \bullet \dot{\omega} + \omega \otimes (I \bullet \omega) \qquad \begin{Bmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \end{Bmatrix} = m \bullet \left(\dot{Vp} + \omega \otimes Vp \right)$$

TEORIA DOS MULTICORPOS