

Lista 4: Sistemas bosônicos e fermiônicos simples

SFI5704 - Mecânica Estatística (1/2025)

Prof. Victor L. Quito

3 de maio de 2025

Note e adote: Nessa lista, usamos $v = V/N$ e $n = N/V$.

Se necessário use nos exercícios (não precisa demonstrar) as seguinte relações termodinâmicas:

$$C_P - C_V = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad (1)$$

e

$$\frac{C_P}{C_V} = T \kappa_T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2. \quad (2)$$

Quando necessário, use

$$g_\nu(e^{-\alpha}) = \frac{\Gamma(1-\nu)}{\alpha^{1-\nu}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \zeta(\nu-k) \alpha^k \quad (3)$$

onde $\zeta(s)$ é a função zeta de Riemann continuada analiticamente para todo $s \neq 1$. Essa equação isola a singularidade da função $g_\nu(e^{-\alpha})$ em $\alpha = 0$; o restante da função pode ser expandido em potências de α .

Pelo lema de Sommerfeld,

$$\begin{aligned} f_\nu(e^\xi) &= \frac{\xi^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 + 2\nu \sum_{j=1,3,5,\dots} \left\{ (\nu-1) \cdots (\nu-j) \left(1 - \frac{1}{2j} \right) \frac{\zeta(j+1)}{\xi^{j+1}} \right\} \right], \\ &= \frac{\xi^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 + \nu(\nu-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\xi^2} + \nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3) \frac{7\pi^4}{360} \frac{1}{\xi^4} + \cdots \right]. \end{aligned}$$

① Mostre que a entropia de um gás ideal em equilíbrio térmico é dada pela fórmula

$$S = k_B \sum_{\epsilon} [(\langle n_{\epsilon} \rangle + 1) \ln(\langle n_{\epsilon} \rangle + 1) - \langle n_{\epsilon} \rangle \ln \langle n_{\epsilon} \rangle], \quad (4)$$

no caso de **bósons**, e pela fórmula

$$S = k_B \sum_{\epsilon} [-(1 - \langle n_{\epsilon} \rangle) \ln(1 - \langle n_{\epsilon} \rangle) - \langle n_{\epsilon} \rangle \ln \langle n_{\epsilon} \rangle], \quad (5)$$

no caso de **férmions**. Verifique que esses resultados são consistentes com a fórmula geral

$$S = -k_B \sum_{\epsilon} \left\{ \sum_n p_{\epsilon}(n) \ln p_{\epsilon}(n) \right\}, \quad (6)$$

onde $p_\varepsilon(n)$ é a probabilidade de haver exatamente n partículas no estado de energia ε .

② Calcule, para as três estatísticas, as expressões relevantes para a quantidade $\langle n_\varepsilon^2 \rangle - \langle n_\varepsilon \rangle^2$ a partir das respectivas probabilidades $p_\varepsilon(n)$. Mostre que, de forma geral,

$$\langle n_\varepsilon^2 \rangle - \langle n_\varepsilon \rangle^2 = k_B T \left(\frac{\partial \langle n_\varepsilon \rangle}{\partial \mu} \right)_T. \quad (7)$$

Compare com o resultado correspondente para um sistema embutido em um ensemble canônico grande.

③, * Mostre que, se o número de ocupação n_ε de um nível de energia ε for restrito aos valores $0, 1, \dots, l$, então o número médio de ocupação daquele nível é dado por

$$\langle n_\varepsilon \rangle = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} - 1} - \frac{l+1}{(z^{-1}e^{\beta\varepsilon})^{l+1} - 1}. \quad (8)$$

Verifique que, enquanto $l = 1$ leva a $\langle n_\varepsilon \rangle_{\text{F.D.}}$, $l \rightarrow \infty$ leva a $\langle n_\varepsilon \rangle_{\text{B.E.}}$.

④, * A criticalidade do gás de bósons ideal.

(a) Combinando as equações seguintes para o comportamento crítico do gás de bósons,

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k} \left\{ \frac{N}{V \zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \right\}^{2/3} \quad (9)$$

e

$$g_{3/2}(z \rightarrow 1) = \left(\frac{\lambda_T^3}{v_c} \right) = \zeta(3/2) \approx 2.612 \quad (10)$$

mostre que, à medida que T se aproxima de T_c por cima, o parâmetro $\alpha = -\ln z$ do gás de Bose ideal assume a forma:

$$\alpha \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{3\zeta(3/2)}{4} \right)^2 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^2. \quad (11)$$

(b) Mostre que, para um gás de Bose ideal:

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_P = -\frac{5}{2T} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}, \quad (12)$$

enquanto

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_V = -\frac{3}{2T} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}. \quad (13)$$

Mostre, então, que:

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_V} = \frac{5}{3} \frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{\{g_{3/2}(z)\}^2}, \quad (14)$$

Verifique que, à medida que T se aproxima de T_c por cima, tanto γ quanto C_P divergem como $(T - T_c)^{-1}$.

⑤ Propriedades do gás de Bose ideal.

- (a) Mostre que a compressibilidade isotérmica κ_T e a compressibilidade adiabática κ_S de um gás de Bose ideal são dadas por:

$$\kappa_T = \frac{1}{nk_B T} \frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)}, \quad \kappa_S = \frac{3}{5nk_B T} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{5/2}(z)}, \quad (15)$$

onde $n(= N/V)$ é a densidade de partículas no gás. Note que, conforme $z \rightarrow 0$, κ_T e κ_S se aproximam de seus respectivos valores clássicos, a saber, $1/P$ e $1/\gamma P$. Como elas se comportam quando $z \rightarrow 1$?

- (b) Usando relações termodinâmicas mostre que

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{4C_V g_{1/2}(z)}{9Nk_B g_{3/2}(z)} = \frac{5}{3} \frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{\{g_{3/2}(z)\}^2}. \quad (16)$$

Extra: calcule γ em termos de T, V, N para o gás de bósons não condensado. Para tal, use softwares algébricos, como o Mathematica.

⑥, * Considere um gás de Bose ideal em um campo gravitacional uniforme com aceleração g .

- (a) Mostre que o fenômeno de condensação de Bose-Einstein nesse gás ocorre a uma temperatura T_c dada por:

$$T_c \simeq T_c^0 \left[1 + \frac{8}{9} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\pi m g L}{k_B T_c^0}\right)^{1/2} \right], \quad (17)$$

onde L é a altura do recipiente e $mgL \ll k_B T_c^0$. Para tal, comece calculando a densidade de estados. Durante o cálculo, mantenha sempre em mente que $mgL \ll k_B T_c^0$ e use isso durante a conta (e não somente no final).

- (b) Mostre que a condensação é acompanhada por uma descontinuidade no calor específico C_V do gás:

$$(\Delta C_V)_{T=T_c} \simeq -\frac{9}{8\pi} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) N k_B \left(\frac{\pi m g L}{k_B T_c^0}\right)^{1/2}. \quad (18)$$

7, * Considere um gás de Bose ideal confinado a uma região de área A em duas dimensões.

- (a) Expresse o número de partículas nos estados excitados, N_e , e o número de partículas no estado fundamental, N_0 , em termos de z , T e A , e mostre que o sistema não exibe condensação de Bose-Einstein, a menos que $T \rightarrow 0$ K.
- (b) Refine seu argumento para mostrar que, se a área A e o número total de partículas N forem mantidos fixos e exigirmos que tanto N_e quanto N_0 sejam da ordem de N , então alcançamos condensação quando:

$$T \sim \frac{h^2}{m k_B l^2} \frac{1}{\ln N}, \quad (19)$$

onde $l = \sqrt{A/N}$ é a distância média entre partículas no sistema. Com isso, se tanto A quanto $N \rightarrow \infty$, mantendo l fixo, então a temperatura de condensação realmente tende a zero.

8, * Considere um gás de Bose n -dimensional cujo espectro de energia de uma única partícula é dado por $\epsilon \propto p^s$, onde s é um número positivo.

- (a) Discuta o início da condensação de Bose-Einstein nesse sistema, especialmente sua dependência com n e s .
- (b) Estude o comportamento termodinâmico desse sistema e mostre que:

$$P = \frac{s}{n} \frac{U}{V}, \quad C_V(T \rightarrow \infty) = \frac{n}{s} N k_B \quad \text{e} \quad C_P(T \rightarrow \infty) = \left(\frac{n}{s} + 1\right) N k_B. \quad (20)$$

9 Calcule a densidade numérica de fótons, a densidade de entropia e a densidade de energia do fundo cósmico de microondas a 2725 K.

10, * Assumindo a relação de dispersão $\omega = Ak^s$, onde ω é a frequência angular e k é o número de onda de um modo vibracional existente em um sólido n -dimensional, mostre que a respectiva contribuição para o calor específico do sólido em baixas temperaturas é proporcional a $T^{n/s}$. Note que, enquanto $s = 1$ corresponde ao caso de ondas elásticas em sólidos, $s = 2$ se aplica a ondas de spin propagando-se em um sistema ferromagnético. Note ainda que os elementos selênio e telúrio formam cristais nos quais cadeias atômicas estão organizadas em paralelo, de modo que eles se comportam aproximadamente como unidimensionais. Assim, em uma certa faixa de temperaturas, a lei T^1 é válida. Por uma razão semelhante, o grafeno ($n = 2$, $s = 1$) obedece a uma lei T^2 em uma certa faixa de temperaturas.

11 O gás de Fermi ideal.

(a) Mostre que

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_P = - \frac{5}{2T} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \quad (21)$$

e

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_V = - \frac{3}{2T} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)}. \quad (22)$$

(b) Mostre, então, que:

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_P}{\left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_V} = \frac{5}{3} \frac{f_{5/2}(z)f_{1/2}(z)}{\{f_{3/2}(z)\}^2}. \quad (23)$$

(c) Em baixas temperaturas, conclua que:

$$\gamma \simeq 1 + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2. \quad (24)$$

(d) Mostre que as compressibilidade isotérmica κ_T e compressibilidade adiabática κ_S são dadas por:

$$\kappa_T = \frac{1}{nk_B T} \frac{f_{1/2}(z)}{f_{3/2}(z)}, \quad \kappa_S = \frac{3}{5nk_B T} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{5/2}(z)}, \quad (25)$$

onde $n = N/V$ é a densidade de partículas no gás.

(e) Em baixas temperaturas, encontre que:

$$\kappa_T \simeq \frac{3}{2n\epsilon_F} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 \right], \quad \kappa_S \simeq \frac{3}{2n\epsilon_F} \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (26)$$

(f) Utilizando a relação termodinâmica:

$$C_P - C_V = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = TV \kappa_T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2, \quad (27)$$

mostre que:

$$\frac{C_P - C_V}{C_V} = \frac{4}{9} \frac{C_V f_{1/2}(z)}{N k_B f_{3/2}(z)} \simeq \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 \quad (k_B T \ll \epsilon_F). \quad (28)$$

(g) Finalmente, utilizando a relação termodinâmica $\gamma = \kappa_T / \kappa_S$, verifique os resultados para γ encontrados em (a)-(c).

(12) Obtenha estimativas numéricas da energia de Fermi (em eV) e da temperatura de Fermi (em K) para os seguintes sistemas: (a) elétrons de condução em prata, chumbo e alumínio; (b) núcleons em um núcleo pesado, como $^{200}\text{Hg}_{80}$; e (c) átomos de ^3He no hélio líquido-3 (volume atômico: $63 \text{ \AA}^3$ por átomo).

(13) Utilizando o lema de Sommerfeld, mostre que o potencial químico de um gás de Fermi em baixas temperaturas é dado por:

$$\mu \simeq \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 - \frac{\pi^4}{80} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^4 \right], \quad (29)$$

e a energia média por partícula é dada por:

$$\frac{U}{N} \simeq \frac{3}{5} \epsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 - \frac{\pi^4}{16} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^4 \right]. \quad (30)$$

Determine, assim, a correção de T^3 para o resultado usual de T^1 para o calor específico de um gás de elétrons. Compare a magnitude do termo de T^3 , em um metal típico como o cobre, com o calor específico em baixas temperaturas decorrente dos modos de Debye em sólidos.

(14, *) Considere um gás de Fermi ideal, com espectro de energia $\epsilon \propto p^s$, contido em uma caixa de “volume” V em um espaço de n dimensões. Mostre que, para este sistema:

(a)

$$PV = \frac{s}{n} U \quad (31)$$

(b)

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \frac{n}{s} \left(\frac{n}{s} + 1 \right) \frac{f_{(n/s)+1}(z)}{f_{n/s}(z)} - \left(\frac{n}{s} \right)^2 \frac{f_{n/s}(z)}{f_{(n/s)-1}(z)} \quad (32)$$

(c)

$$\frac{C_P - C_V}{Nk_B} = \left(\frac{sC_V}{nNk_B} \right)^2 \frac{f_{(n/s)-1}(z)}{f_{n/s}(z)} \quad (33)$$

(d) A equação de uma adiabática é $PV^{1+(s/n)} = \text{constante}$.

(e) C_P/C_V tende a $1 + (s/n)$ quando $T \gg T_F$, enquanto para $T \ll T_F$, $C_P/C_V \simeq 1 + (\pi^2/3)(k_B T/\epsilon_F)^2$, independentemente dos valores de s e n .

(f) Examine os resultados (b) e (c) no limite de altas temperaturas ($T \gg T_F$), bem como no limite de baixas temperaturas ($T \ll T_F$), e compare as expressões resultantes com aquelas de um gás não relativístico e um gás relativístico extremo em três dimensões. Extra, não precisa entregar: usando softwares algébricos (como o Mathematica) repita a análise para temperaturas arbitrárias.

(15) Considere o paramagnetismo de Pauli de um gás ideal de férmions com momento magnético intrínseco μ^* e spin $J\hbar$ ($J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$).

Encontre expressões para:

- (a) A energia de Fermi do gás, levando em conta o fator de degenerescência.
- (b) A magnetização e susceptibilidade do sistema em baixas temperaturas. Para determinar os regimes de alta e baixa temperaturas, você deve primeiro identificar a escala de temperatura característica do problema.
- (c) A magnetização e susceptibilidade do sistema em altas temperaturas (você deve recuperar a função de Brillouin $B_J(x)$, [veja aqui](#)). Grafique $M/(Ng\mu_B J)$ como função de $x = Jg\mu_B B/(k_B T)$.

Note e adote: A energia potencial de um dipolo magnético na presença de um campo magnético de módulo B na direção z é dada por $-(g\mu_B m)B$, onde $m = -J, \dots, +J$. A energia total ε do dipolo para uma determinada configuração é então dada por $\varepsilon = \frac{p^2}{2M} - g\mu_B mB$, sendo M a massa da partícula.

(16, *) O gás de elétrons relativístico.

(a) Mostre que a energia do estado fundamental E_0 é:

$$E_0 = \frac{\pi V m^4 c^5}{3\hbar^3} B(x), \quad (34)$$

onde:

$$B(x) = 8x^3 \left[(x^2 + 1)^{1/2} - 1 \right] - A(x), \quad (35)$$

com $A(x)$ e x sendo dados por

$$A(x) = x(x^2 + 1)^{1/2}(2x^2 - 3) + 3 \sinh^{-1} x, \quad (36)$$

$$x = \sinh \theta_F = \frac{p_F}{mc} = \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{h}{mc} \right). \quad (37)$$

Grafique $E_0(x)/V$ como função de x mantendo os demais parâmetros constantes.

(b) Verifique que o resultado acima para E_0 e a equação

$$P_0 = \frac{8\pi m^4 c^5}{3\hbar^3} \int_0^{\theta_F} \sinh^4 \theta d\theta = \frac{\pi m^4 c^5}{3\hbar^3} A(x) \quad (38)$$

para P_0 satisfazem as relações termodinâmicas:

$$E_0 + P_0 V = N\mu_0 \quad \text{e} \quad P_0 = - \left(\frac{\partial E_0}{\partial V} \right)_N. \quad (39)$$

Grafique $P_0(x)/V$ como função de x .

(c) Mostre que o calor específico em baixas temperaturas é dado por:

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \pi^2 \frac{(x^2 + 1)^{1/2}}{x^2} \frac{k_B T}{mc^2}, \quad \left(x = \frac{p_F}{mc} \right). \quad (40)$$

Verifique que esta fórmula fornece resultados corretos tanto para o caso não relativístico quanto para o caso relativístico extremo. Extra, não precisa entregar: usando softwares algébricos (como o Mathematica) calcule $\frac{C_V}{Nk_B}$ para temperaturas arbitrárias. Grafique o resultado.