

MAT2351 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis I, 2019
Lista 6 - Regra da cadeia - Derivadas direcionais - Vetor gradiente

Wilson Cuellar

1. Calcule $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ usando a regra da cadeia.
 - (a) $z = 2x^2 - y^3$; $x(u, v) = u^2 - e^v$, $y = 3v \operatorname{sen}(u)$.
 - (b) $z = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$; $x(u, v) = u \cos(v)$, $y = u \operatorname{sen}(v)$.
2. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis até segunda ordem.
 - (a) Mostre que $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ satisfaz a equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
 - (b) Mostre que $u(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$ satisfaz a equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
3. Considere a curva C dada pela equação $3y^2 - x^2 - \operatorname{sen}(x - y) = 8$. Determine a equação da reta tangente a C no ponto $(2, 2)$.
4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, com $\nabla f(-3, -3) = (-2, a)$ e seja $g(t) = f(2t^2 - 5t, t^3 - 4t^2)$. Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta de equação $y = -3x + 2$.
5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2, f(0, 2))$. Seja $g(u, v) = uf(\operatorname{sen}(u^2 - v^3), 2u^2v)$. Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, g(1, 1))$ seja paralelo ao vetor $(4, 2, a)$.
6. Determine a derivada direcional máxima de f em P e encontre a direção e sentido em que ela ocorre.
 - (a) $f(x, y) = xye^{x^2y^2}$, $P = (2, 3)$
 - (c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $P = (1, 1)$
 - (b) $f(x, y) = \ln(1 + \sin^2(x^2y^3))$, $P = (0, 1)$
 - (d) $f(x, y) = \frac{x^2y - xy^2}{x^2 + y^2}$, $P = (1, -1)$
7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Suponha que para um ponto $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que não pode ser curva de nível de f passando pelo ponto p
 - (a) $\gamma(t) = (-\frac{1}{t}, t)$
 - (b) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$
 - (c) $\gamma(t) = (\frac{t^5}{5}, -\frac{2t^3}{3} + 3t)$
8. Determine todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é na direção do vetor $(1, 1)$.
9. Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1, 2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r .
10. **Quádricas.** Esboce o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem
 - (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
 - (c) $2x^2 - y^2 + z^2 = 0$
 - (b) $x^2 + y^2 = z^2$
 - (d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$
11. Determine um plano tangente à superfície $xyz = a$, $a \neq 0$, e que seja paralelo ao plano $x + y + z = 100$.
12. Determine os pontos do elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $3x - y + 3z = 1$.