



Departamento de Engenharia de Materiais (SMM)
Escola de Engenharia de São Carlos (EESC)
Universidade de São Paulo (USP)

SMM0315 – Processamento de Materiais IX: Polímeros

Docente: Marcelo A. Chinelatto

Março – Julho de 2025


1

MODELAGEM DA ETAPA DE DOSAGEM DA ROSCA

Hipóteses consideradas para o desenvolvimento simplificado do transporte do fundido polimérico através do canal raso da extrusora no zona de vazão ou dosagem.

- ✓ **O fundido polimérico é Newtoniano e o fluxo é isotérmico e incompressível.**
- ✓ **A profundidade do canal e o passo da rosca são constantes.**
- ✓ **A profundidade do canal é pequena em relação à largura do canal. Isto é, o fluxo de arraste nas paredes dos filetes da rosca é desprezado no cálculo.**
- ✓ **Não existe fluxo de retorno (“vazamento”) na folga da rosca (isto é, no topo da crista do filete).**
- ✓ **O canal da zona de controle de vazão está repleto de fluido polimérico.**


2



Middlemann fez o cálculo do ponto de operação de uma extrusora de rosca simples utilizando equações constitutivas do fluido Newtoniano e do fluido da Lei das Potências, assumindo um fluxo isotérmico.

Modelagem válida somente para a zona em que o material está totalmente fundido.

3



Na análise isotérmica Newtoniana, Middlemann assumiu que o barril é que girava com velocidade de rotação, enquanto o parafuso permanecia parado.

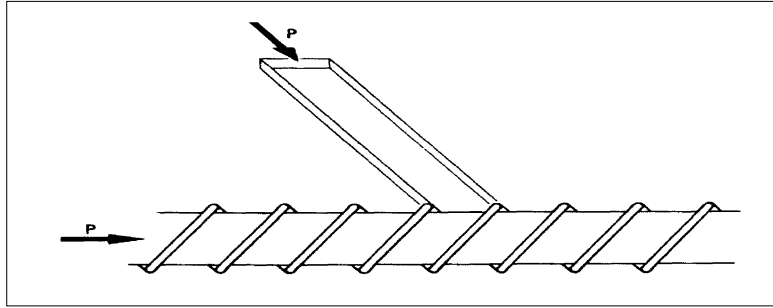


simplificar o tratamento matemático

Para simplificar ainda mais, a carcaça e o parafuso foram desenrolados

4

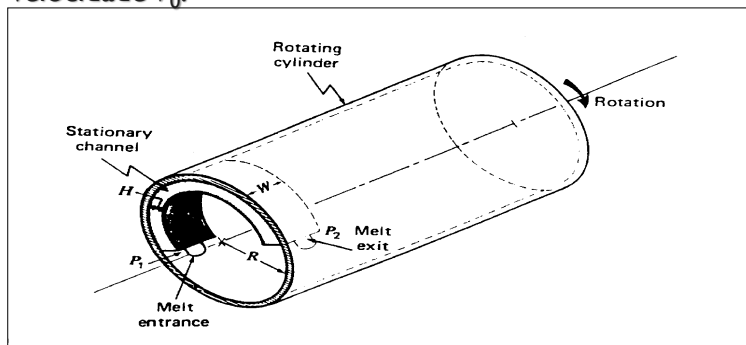
O desenvolvimento matemático para determinar-se a equação diferencial de fluxo de uma extrusora de rosca simples será realizada inicialmente desprezando-se os efeitos de curvatura do canal em situação real na extrusora. Sua largura é delimitada pela largura dos filetes da rosca.



A figura acima mostra um canal raso helicoidal na zona de dosagem da extrusora sendo desenrolado em um canal reto.

5

Canal retangular raso de comprimento "L" finito sobre o qual uma placa de comprimento infinito, representada pela superfície interna do barril, está em movimento com velocidade V_0 .

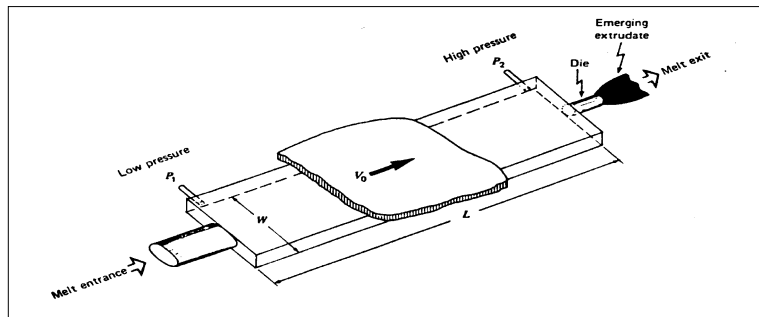


- ✓ superfície do barril em movimento
- ✓ canal da rosca estacionado

6

O movimento do fluido na zona de dosagem se deve ao fluxo de arraste, gerado pela superfície do barril e, fluxo de contra-pressão devido ao aumento de pressão imposto pela matriz.

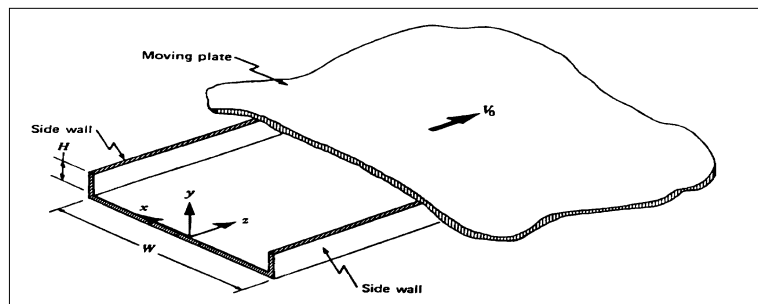
O escoamento do polímero fundido é típico de um fluido viscoso e incompressível de extensão finita em movimento uniforme sob fluxo de arraste e contra-pressão.



7

As coordenadas retangulares (x , y e z) neste canal, sendo que z representa o movimento ao longo do canal

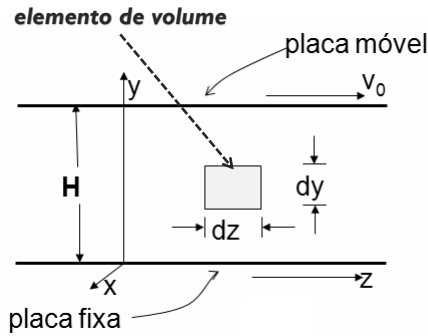
A largura do canal " W " é maior que a sua altura " H " ($W/H > 10$). Com isto **pode-se desprezar o arraste do fluido nas paredes laterais dos filetes da rosca.**



8

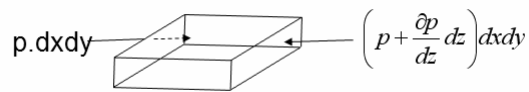
Equação Diferencial para Fluxo em uma Extrusora de Rosca Única

Considere um fluido viscoso e incompressível de extensão infinita em movimento uniforme e sob pressão entre duas placas paralelas separadas por uma distância "H". Uma das placas se movimenta com velocidade "V" e a outra está fixa.

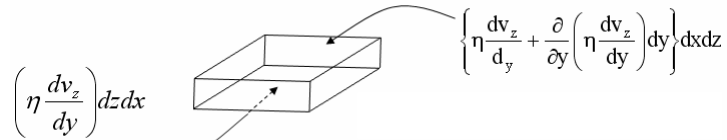
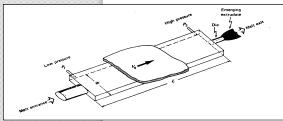


9

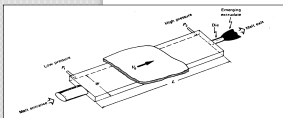
Elemento de Fluido Unitário



a) sob forças de pressão



b) sob esforço cisalhante



10

Balanço de Forças

Num balanço de forças viscosas para equilíbrio (mecânico contínuo) as forças geradas devido à pressão devem equilibrar com as forças geradas por esforço cisalhante.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \cdot \frac{dv_z}{dy} \right) = \frac{\partial P}{\partial z}$$

Assumindo que não existe movimento paralelo à direção x. Então

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \text{constante} = \frac{dP}{dz}$$

Também considerando fluxo uniforme, isotérmico e Newtoniano (η é constante) tem-se:

11

$$\frac{d^2 v_z}{dy^2} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) \quad \text{Equação Geral}$$

Integrando a equação acima com respeito a “y” tem-se:

$$\frac{dv_z}{dy} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dP}{dz} \cdot y + A \quad \longrightarrow \quad 1^{\text{a}} \text{ Integração}$$

$$v_z = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dP}{dz} y^2 + Ay + B \quad \longrightarrow \quad 2^{\text{a}} \text{ Integração}$$

Considerando as condições de contorno:

a) $y=0$; $V_z=0$ deslizamento nulo na superfície da placa estacionária,

b) $y=H$; $V_z=V_0$ fluxo na direção OX é zero, ie, não existe fluxo de vazamento (retorno)

12

Da condição (a) tem-se que $B=0$ ($y=0$; $V_z=0$ e portanto $B=0$)

Da condição (b)
$$V_0 = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dP}{dz} \cdot H^2 + AH$$

Assim:
$$A = \left(\frac{V_0}{H} - \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dP}{dz} \cdot H \right)$$

Substituindo A na equação geral e rearranjando tem-se:

$$V_z = \frac{V_0 y}{H} - \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dP}{dz} \cdot (Hy - y^2)$$

Fluxo de Arraste Fluxo de contrapressão

Válida somente para $H/W < 0,1$, ie, largura do canal (W) é grande em relação à profundidade do canal (H).

13

A taxa de descarga volumétrica do fluido (Q) é dada integrando-se a equação de V_z anterior para toda a extensão do canal

$$Q = \int_0^H W V_z dy$$

$$Q = W \int_0^H \left[\frac{V_0 y}{H} - \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dP}{dz} \cdot (Hy - y^2) \right] dy$$

$$Q = W \int_0^H \left[\frac{V_0}{2H} \cdot y^2 - \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dP}{dz} \cdot \left(\frac{Hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \right] dy$$

$$Q = W \left[\frac{V_0 H}{2} - \frac{1}{12\eta} \cdot \frac{dP}{dz} \cdot H^3 \right]$$

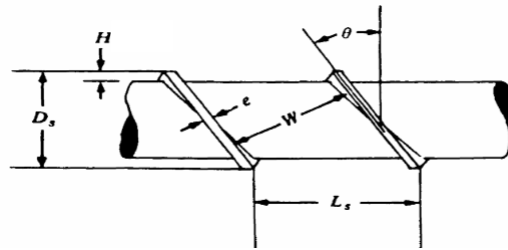
Fluxo de Arraste Fluxo de Contra-Pressão

$$Q = \frac{V_0 W H}{2} - \frac{W H^3}{12\eta} \cdot \left(\frac{dP}{dz} \right)$$

14

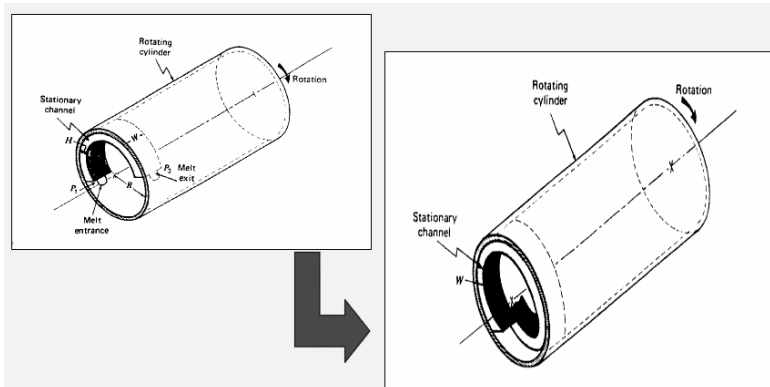
A equação anterior foi deduzida para fluxo entre placas planas, assumindo que os filetes da rosca estão paralelos com ângulo de hélice $\theta = 0^\circ$. Entretanto, para uma extrusora há uma rosca com hélice de ângulo θ .

A figura abaixo mostra a geometria de uma rosca representando um passo (L_s) completo, com filete helicoidal apresentando um ângulo da hélice igual a θ



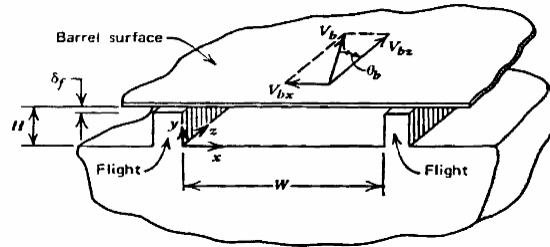
15

Ocorre, portanto, uma nova configuração geométrica, onde o canal helicoidal se desloca o equivalente a uma distância correspondente à largura do canal (passo da rosca) a partir de uma volta completa no mandril da rosca.



16

Portanto, trazendo para um caso mais próximo de uma extrusora rosca simples tem-se:



Então a velocidade do fluido na parede do barril, relativo a parede da rosca

$$V_b = \pi D_b N$$

onde D_b é o diâmetro do barril e N é a rotação da rosca em RPM.

17

V_{bx} = componente da velocidade do fluido V_b na direção x (seção transversal do canal da rosca)

$$V_{bx} = \pi D_b N \sin\theta$$

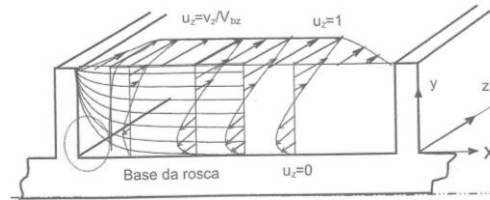
V_{bz} = componente da velocidade do fluido V_b na direção z (ao longo do canal)

$$V_{bz} = \pi D_b N \cos\theta$$

18

❑ Determinando a velocidade na direção z.

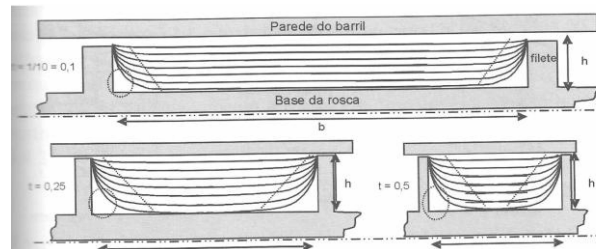
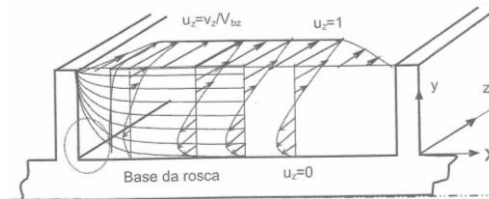
◦ No topo rente ao barril ocorre a velocidade máxima V_{bz} e na base do canal ocorre velocidade mínima, teoricamente igual a zero. Entre esses extremos, a velocidade forma um gradiente.



Um paralelismo entre as curvas de velocidade só seria possível se não existisse as laterais.

19

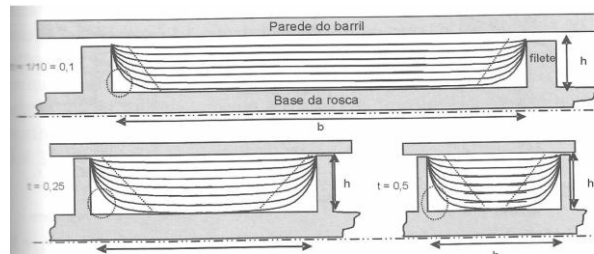
❑ Determinando a velocidade na direção z.



Para canais de rosca, a presença das laterais distorce essas linhas tanto mais quanto maior a relação h/b

20

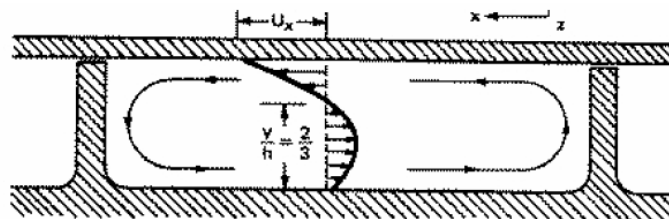
❑ **Determinando a velocidade na direção z.**



- ❑ Se $t = 0,5$ os valores de F_d e F_p (fatores de correção do fluxo de arraste (d) e de pressão (p)) são aproximadamente de 0,8 e 0,7, respectivamente. Isso significa uma redução de 20 e 30% no transporte do fundido através do canal da rosca.

21

❑ **Perfil de velocidades ao longo do canal da rosca**

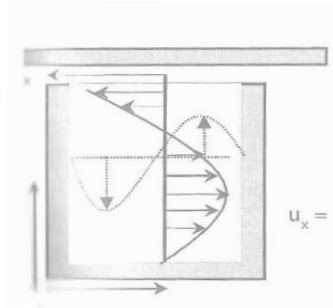


Modelo de fusão entre os filetes da rosca;

- turbilhonamento para otimizar a distribuição dos grânulos e garantir contato com as paredes para fusão.

22

❑ Determinando a velocidade na direção x.



$$Q = V \times A$$

$Q = 0$, pois não há escape pela folga da rosca

$$\int_0^1 U_x d\xi \quad \xi = y/h$$

$$u_x = \xi(2-3\xi)$$

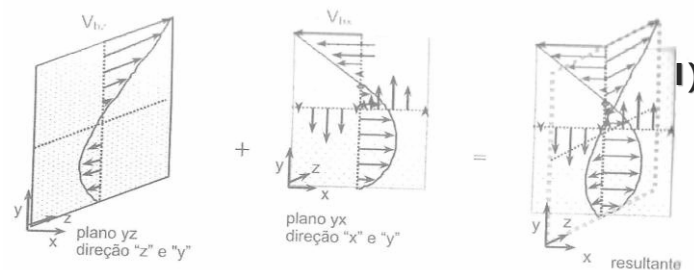
A velocidade é zero em dois pontos: $\xi=0$ e $\xi = 2/3$

O polímero flui para a direita (inferior) e para a esquerda (superior).

23

❑ Sobrepondo os diferentes perfis de velocidade.

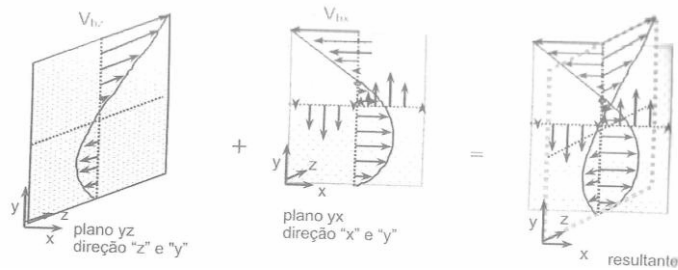
A sobreposição dos diferentes perfis de velocidade mostra o complexo caminho percorrido por uma partícula.



No ponto 1) a partícula é levada para cima e para a esquerda, bem como para a frente. A partícula é então arrastada para outro ponto, subindo e descendo, indo para frente e para trás.

24

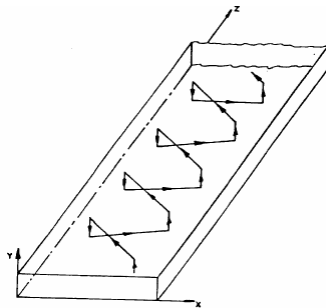
□ **Sobrepondo os diferentes perfis de velocidade.**



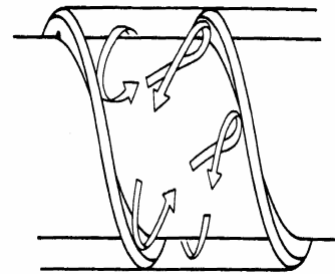
□ **Resultado:** é um caminho **helicoidal**, cujo passo da hélice depende dos **perfis de velocidade**.

25

De acordo com o que foi exposto anteriormente as figuras abaixo descrevem o caminho circulatorio de um elemento de fluido durante seu avanço ao longo do canal de extrusão.



Caminho circulatorio de um elemento de fluido dentro do canal de uma extrusora



Fluxo circulatorio helicoidal dentro do canal de uma extrusora (visão mais próxima da realidade).

26

Homogeneização e Plastificação nos Canais da Rosca

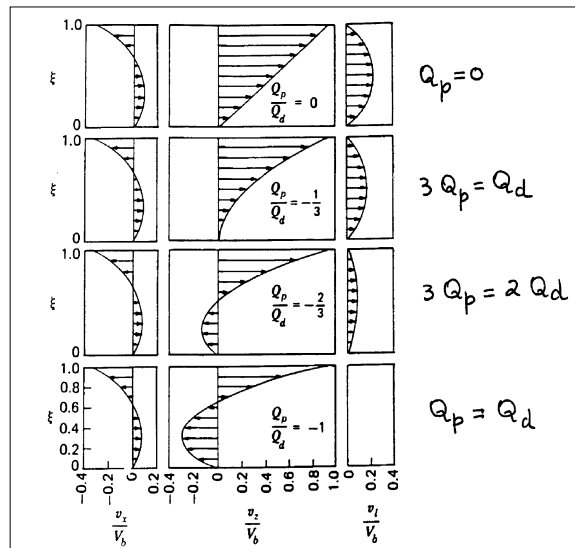
A descarga volumétrica é dependente exclusivamente do perfil de velocidade na direção z .

O perfil de velocidade no **plano yx** e associado a **V_b** afeta o grau de **homogeneização** devido ao intenso movimento circulatório.

Uma mistura adequada ocorre quando a extrusora trabalha na condição de $Q_p/Q_d \approx 0,6$

27

Homogeneização e Plastificação nos Canais da Rosca



28

A componente:

- V_{bx} produz fluxo transversal para a mistura no canal da rosca.
- V_{bz} contribui para o fluxo de descarga da extrusora.

Considerando a geometria do canal da extrusora de acordo com a figura anterior, a equação de vazão total desenvolvida para o caso de placas planas, pode ser substituída para um caso mais real.

$$Q_{\text{Total}} = Q_{\text{Arraste}} - Q_{\text{ContraPressão}} - Q_{\text{Vazamento}}$$


29

$$Q_{\text{Total}} = Q_{\text{Arraste}} - Q_{\text{Contra-Pressão}}$$

$$Q = \left[\frac{\pi D_b N \cos\theta \cdot WH}{2} \right] \cdot F_d - \left[\frac{WH^3}{12\eta} \cdot \left(\frac{dP}{dz} \right) \right] \cdot F_p$$

F_d e F_p são os fatores de correção do fluxo de arraste e contrapressão, respectivamente.

Representam o efeito negativo (F_d e $F_p \leq 1$) da redução do fluxo devido a presença dos filetes da rosca.

30

F_d e F_p são calculados pelas seguintes equações:

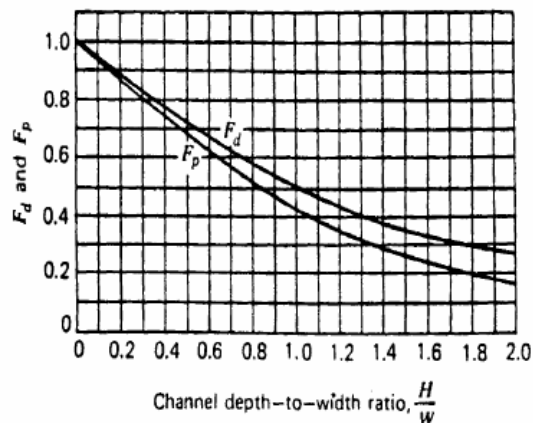
$$F_d = \frac{16.W}{\pi^3.H} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^3} \tanh\left(\frac{i \pi H}{2W}\right)$$

$$F_p = 1 - \frac{192.H}{i^5.W} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^5} \tanh\left(\frac{i \pi W}{2H}\right)$$

F_d e F_p são dependentes da relação H/W do canal da extrusora. Quando $H/W < 0,1$ os valores de $F_d \cong F_p = 1$.

31

Curvas dos fatores de forma ou fatores geométricos ou ainda fatores de correção (F_d e F_p) como uma função da relação H/W do canal.



32

$$Q_{\text{Total}} = Q_{\text{Arraste}} - Q_{\text{Contra-Pressão}}$$

$$Q = \left[\frac{\pi D_b N \cos\theta \cdot WH}{2} \right] \cdot F_d - \left[\frac{WH^3}{12\eta} \cdot \left(\frac{dP}{dz} \right) \right] \cdot F_p$$

onde:

$\pi = 3,14$

N = rotação da rosca (RPM)

W = largura do canal

η = viscosidade, que é constante

em se tratando de fluxo isotérmico dP/dz = variação da pressão em relação ao eixo z.

D_b = diâmetro do barril

θ = ângulo da hélice da rosca

H = profundidade do canal

33

A eficiência de descarga volumétrica da extrusora é dada por:

$$\frac{Q}{V_{bz}WH} = \frac{1}{2} - \frac{H^2}{12\eta V_{bz}} \cdot \left(\frac{dP}{dz} \right)$$

De acordo com a equação acima o valor máximo da eficiência de descarga volumétrica da extrusora será igual 0,5. Na prática:

$$0,3 < \frac{Q}{V_{bz}WH} < 0,5$$

34

A eficiência de descarga pode ser ainda calculada pela razão entre a vazão de pressão (contra pressão) e vazão de arraste:

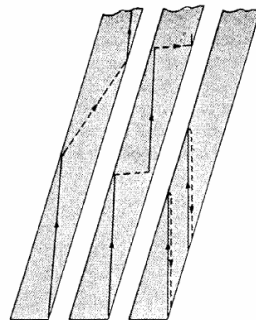
$$-\frac{Q_p}{Q_d} = \frac{H^2}{6\eta V_{bz}} \cdot \left(\frac{dP}{dz}\right) \cdot \frac{F_p}{F_d}$$

Se:

- I. $Q_p = 0$: máxima eficiência de descarga, porém sem mistura e homogeneização.
- II. $Q_p = Q_d$: máxima homogeneização e mistura, porém sem descarga de material.

35

O percurso de um elemento de fluido dentro do canal da extrusora é uma combinação dos efeitos combinados dos perfis de velocidade para **fluxo transversal (V_{bx})** e **fluxo ao longo do canal (V_{bz})** para três situações distintas:



$$\frac{Q_p}{Q_d} = 0 \quad \frac{Q_p}{Q_d} = -0.5 \quad \frac{Q_p}{Q_d} = -1.0$$

▪ a linha sólida corresponde ao caminho da partícula na parte superior do canal

▪ a linha tracejada corresponde ao caminho da partícula após sua descida na parte inferior do canal.

36

Determinação o ponto operacional de uma extrusora

▪ Equação característica de uma extrusora

$$Q = \left[\frac{\pi D_b N \cos\theta \cdot WH}{2} \right] \cdot F_d - \left[\frac{WH^3}{12\eta} \cdot \left(\frac{dP}{dz} \right) \right] \cdot F_p$$

□ Simplificando

$$Q = \alpha N - \beta \frac{\Delta P}{\eta}$$

Fluxo de Arraste

Fluxo de Contra-Pressão

37

Determinação o ponto operacional de uma extrusora

▪ Equação característica de uma extrusora

Pode-se ainda reescrever a equação de Q anterior usando os cálculos de geometria da rosca e de trigonometria. Tem-se:

$$\alpha = \frac{\pi^2 \cdot D^2 \cdot H \cdot (1 - ne/t) \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{cos}\theta}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi \cdot D \cdot H^3 \cdot (1 - ne/t) \cdot \text{sen}^2\theta}{12 L}$$

onde:

e = largura do filete
t = comprimento do passo
n = número de filetes

38

(a) Drag Flow Consider the flow of the melt between parallel plates as shown in Fig. 4.7(a).

For the small element of fluid ABCD the volume flow rate dQ is given by

$$dQ = V \cdot dy \cdot dx \quad (4.1)$$

Assuming the velocity gradient is linear, then

$$V = V_d \left[\frac{y}{H} \right]$$

Substituting in (4.1) and integrating over the channel depth, H , then the total drag flow, Q_d , is given by

$$Q_d = \int_0^H \int_0^T \frac{V_d y}{H} \cdot dy \cdot dx$$

$$Q_d = \frac{1}{2} THV_d \quad (4.2)$$

This may be compared to the situation in the extruder where the fluid is being dragged along by the relative movement of the screw and barrel. Fig. 4.8 shows the position of the element of fluid and (4.2) may be modified to include terms relevant to the extruder dimensions.

For example $V_d = \pi DN \cos \phi$

39

where N is the screw speed (in revolutions per unit time).

$$T = (\pi D \tan \phi - e) \cos \phi$$

So $Q_d = \frac{1}{2} (\pi D \tan \phi - e) (\pi DN \cos^2 \phi) H$

In most cases the term, e , is small in comparison with $(\pi D \tan \phi)$ so this expression is reduced to

$$Q_d = \frac{1}{2} \pi^2 D^2 NH \sin \phi \cos \phi \quad (4.3)$$

Note that the shear rate in the metering zone will be given by V_d/H .

40