

DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA DE CÁLCULO DA ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Adaptado de : <http://www2.unemat.br/eugenio/arquivos/esfera.pdf>

Elemento diferencial de Área (dA)

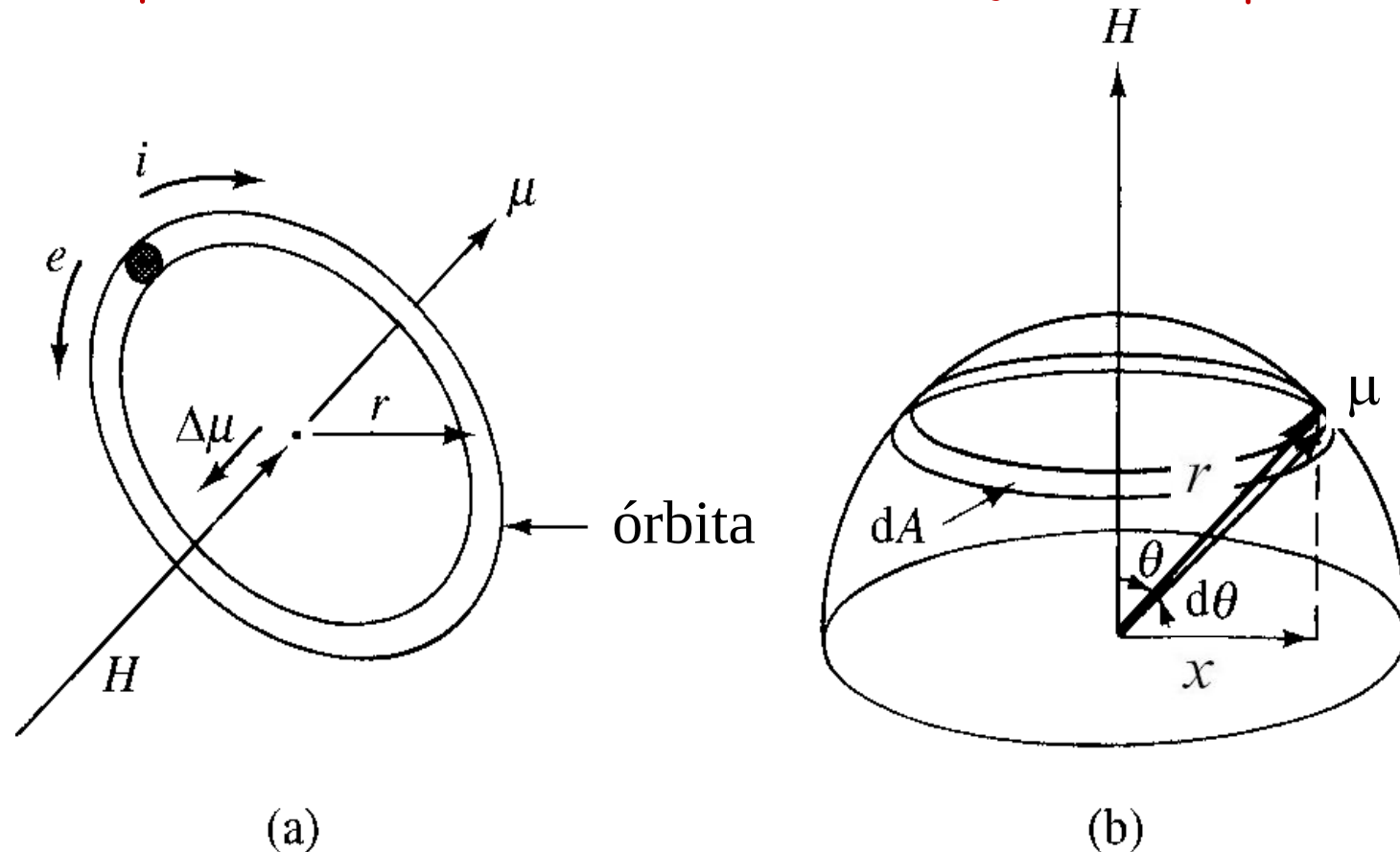
Descascando uma laranja em anéis (e não helicoidais), fora do equador, as bordas de cada anel serão circunferências com raios distintos, uma maior que a outra:



Figura1 – Laranja

Este cálculo é utilizado na definição do ângulo sólido para o qual o momento magnético μ pode estar para o ângulo θ variando de $0 \leq \theta \leq \pi$.

Para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, corresponderia ao caso do momento magnético estar se alinhando no sentido contrário ao campo, o que não corresponde a situação que estudamos, ou seja, ao aplicar um campo perpendicular à órbita, a tendência é que os momentos se alinhem na direção do campo.



A largura do anel pode ser descrita pela forma simplificada do comprimento de arco:

$$dl = r \cdot d\theta$$

onde dl largura do anel, r é o raio da circunferência e $d\theta$ é a variação infinitesimal do ângulo central.

$$x = r \cdot \sin\theta$$

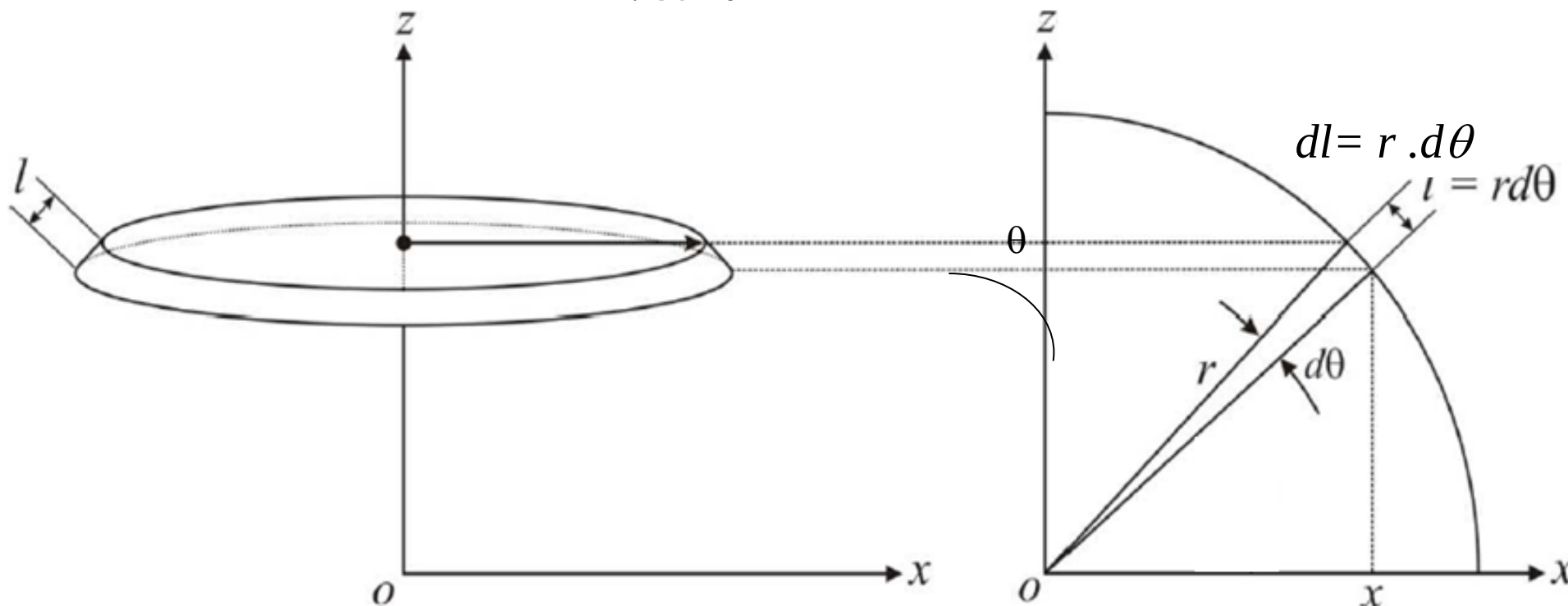


Figura 2 – Construção dos elementos diferenciais de área em coordenadas polares

Mas, se estes anéis tiverem larguras infinitesimais, os raios se confundem e o perímetro do anel de largura infinitesimal é dado por:

$$C(x) = 2\pi x \quad (I)$$

Vejam que o perímetro C está em função do raio x .

Fazendo uma transformação para coordenadas polares, destacamos o triângulo retângulo da figura 2:

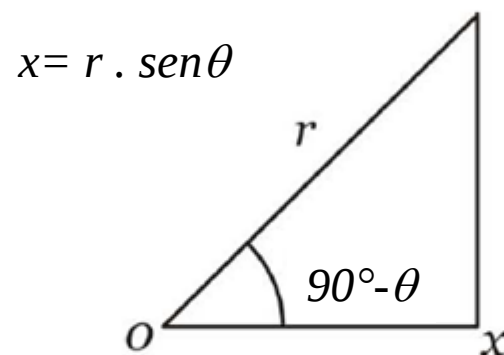


Figura 3 – Triângulo retângulo

Temos que:

$$x = r \cdot \text{sen} \theta \quad (II)$$

Substituindo o membro da direita da equação (II) em (I), obtemos:

$$C(\theta) = 2\pi r \cdot \text{sen} \theta$$

Ângulo Sólido

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2}$$

$$dA = C(\theta) \times dl$$

$$C(\theta) = 2\pi r \cdot \text{sen}\theta$$

$$dl = r d\theta$$

$$d\Omega = \frac{2\pi r \text{ sen } \theta \times r d\theta}{r^2}$$

$$d\Omega = 2\pi \text{ sen } \theta d\theta$$