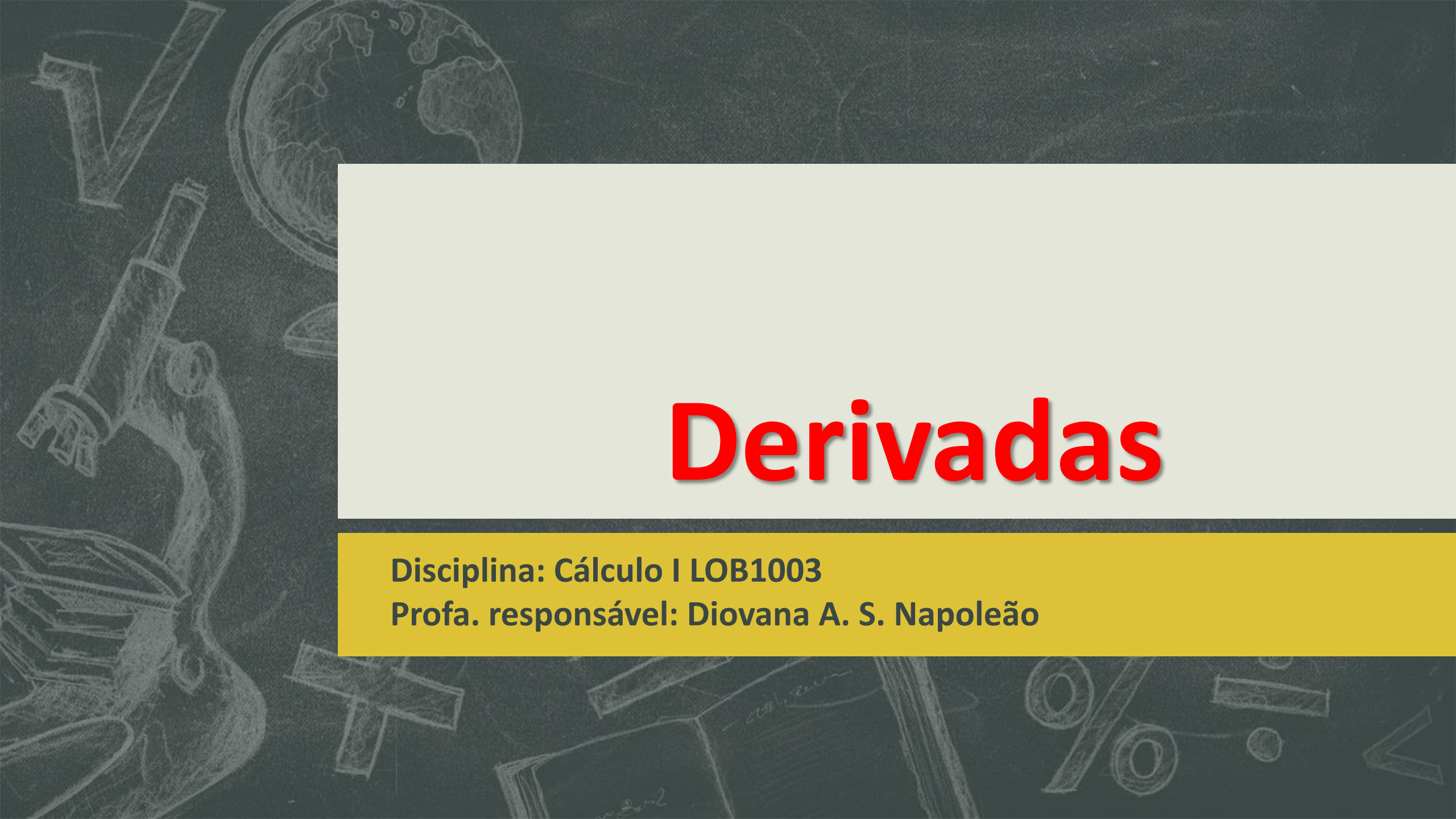




Derivadas

Disciplina: Cálculo I LOB1003

Profa. responsável: Diovana A. S. Napoleão

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

Contextualização do Tema

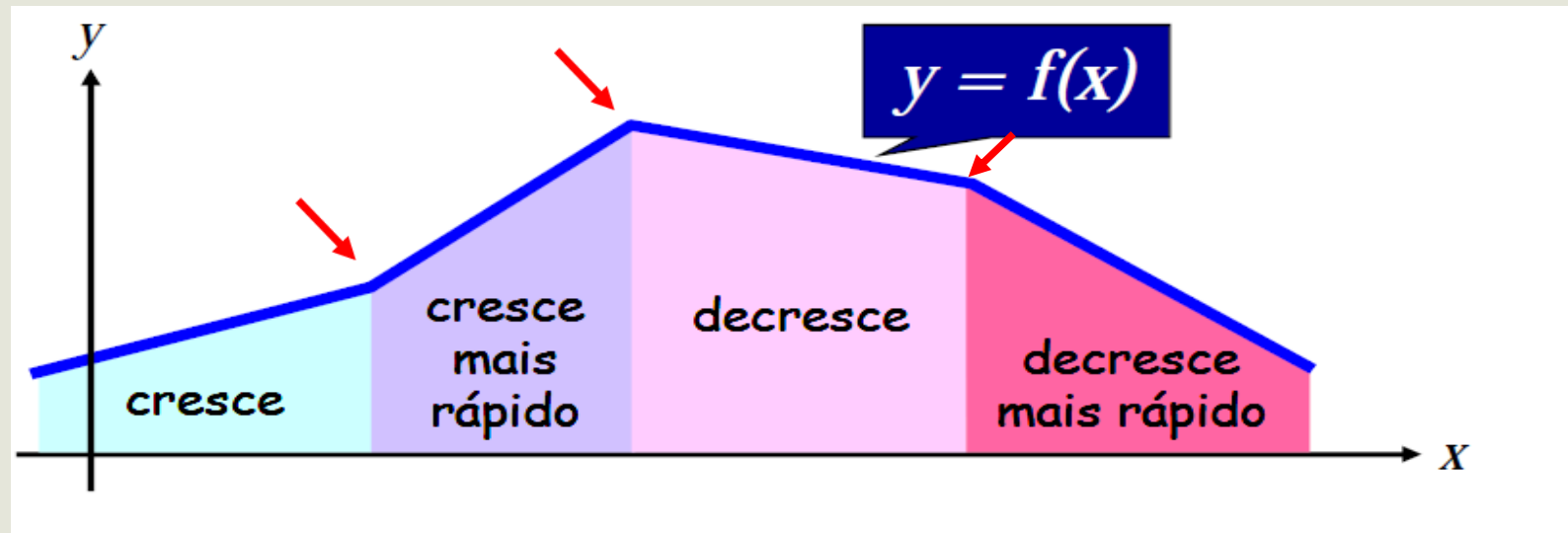
- ✓ O problema para encontrar a **reta tangente a uma curva** e para encontrar **a velocidade de um objeto** que envolve determinar o mesmo tipo de limite. Esse tipo especial de limite é denominado Derivada.

Objetivo

- ✓ Estudar as taxas variáveis de grandezas físicas;
- ✓ Aplicar os conhecimentos em grandezas desde que sejam representadas através de funções.

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

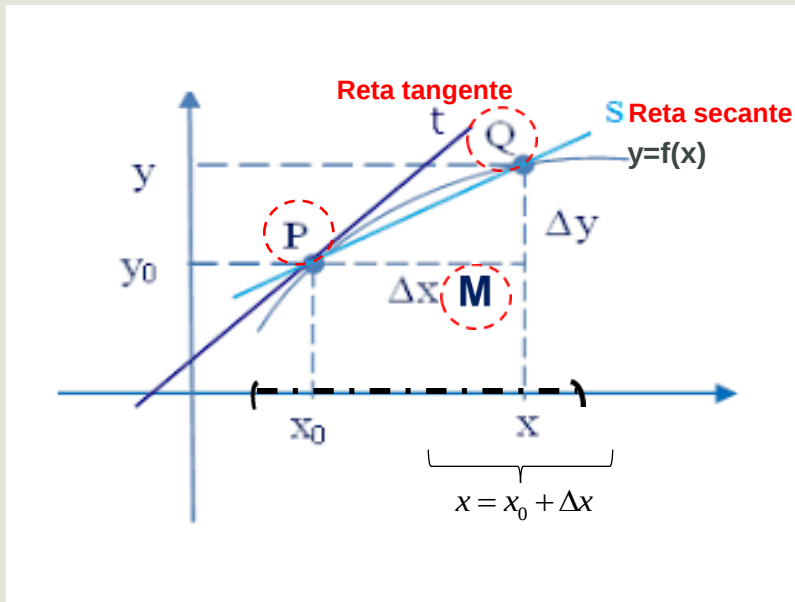
Considere o gráfico abaixo:



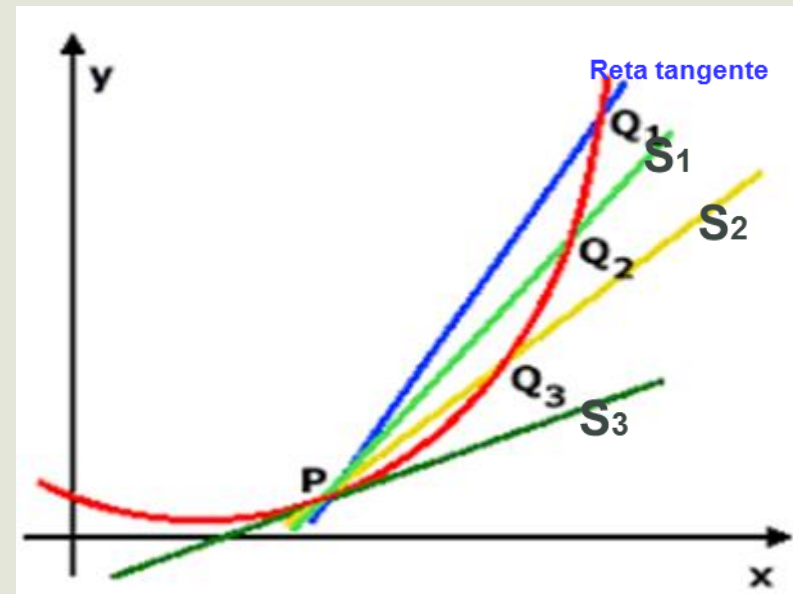
O coeficiente angular da reta tangente à curva pode indicar se há crescimento ou decréscimo, além da intensidade da mudança.

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

Considere as seguintes figuras:

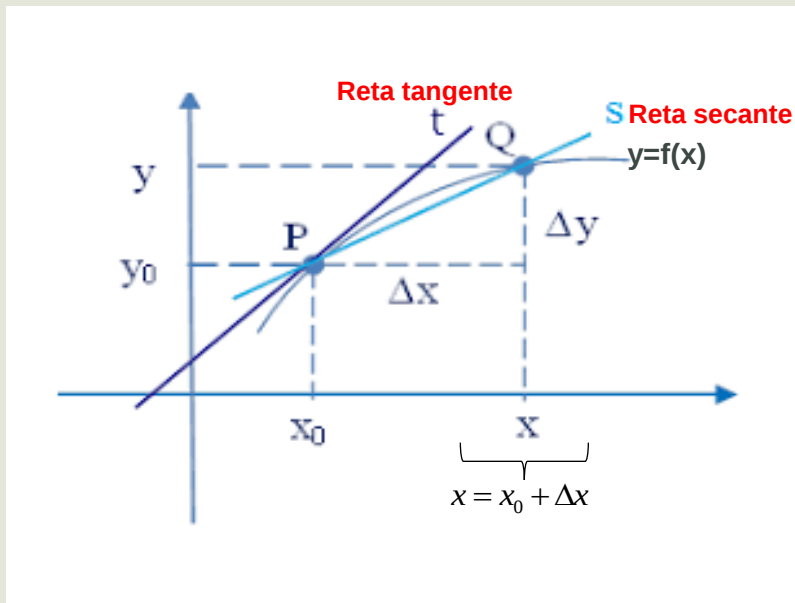


$$\operatorname{tg} \alpha = m_s = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Taxa de variação de $f(x)$

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO



$$\operatorname{tg} \alpha = m_s = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(y) - f(y_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$

$f'(x)$

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

Correspondente a derivada de $f(x)$ em x , se este limite existir. Para um x qualquer, $x \in (a, b)$, tem-se:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

EXEMPLO 1:

Determine a inclinação da reta tangente à curva definida pela função $f(x) = x^2/2$ no ponto de abscissa $x = 2$.

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{2\Delta x}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + \Delta x}{2}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(2 + \Delta x)^2}{2} - \frac{2^2}{2}}{\Delta x}$$

$$\therefore m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{2\Delta x}$$

$$\boxed{m = 2}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

$$\operatorname{tg} \alpha = m_s = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = \operatorname{tg} \alpha \Delta x$$

$$(y - y_0) = \operatorname{tg} \alpha \cdot (x - x_0)$$

$$(y - y_0) = f'(x) \cdot (x - x_0)$$

Equação da reta tangente

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

EXEMPLO 1: Continuação

$$(y - y_0) = f'(x) \cdot (x - x_0)$$

A reta tangente:

$$y = mx + b$$

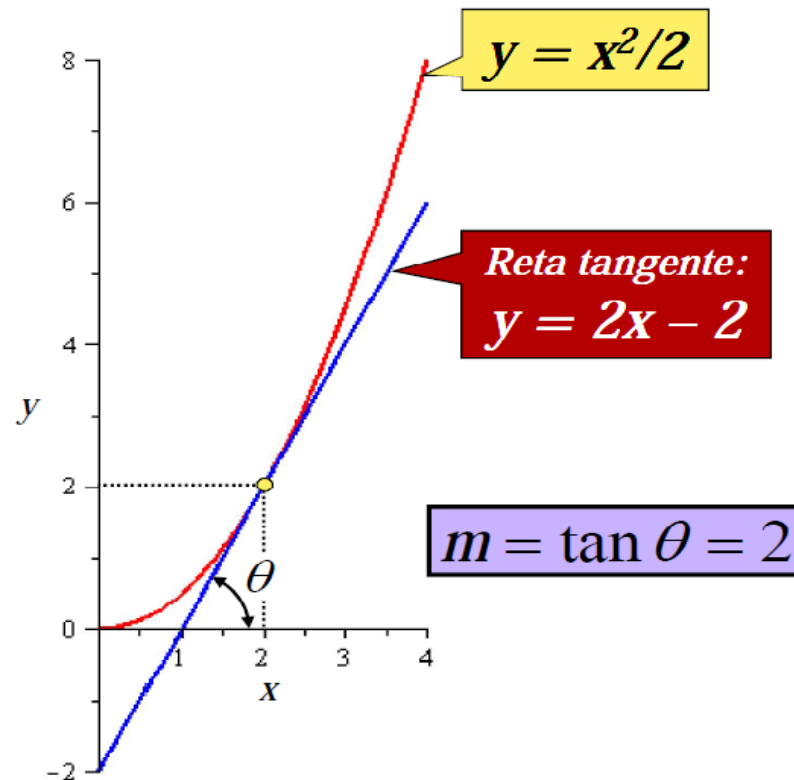
Como o ponto $(2, f(2))$ da curva também pertence a esta reta, calcula-se o coeficiente linear b impondo-se o atendimento da equação

impondo-se o

atendimento da equação

$$\therefore f(2) = 2m + b$$

$$\Rightarrow b = f(2) - 2m$$



DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

EXEMPLO 2:

Calcule a derivada da função $f(x) = x^3 + 2x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x)] - (x^3 + 2x)}{\Delta x}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2x + 2\Delta x) - (x^3 + 2x)}{\Delta x}$$

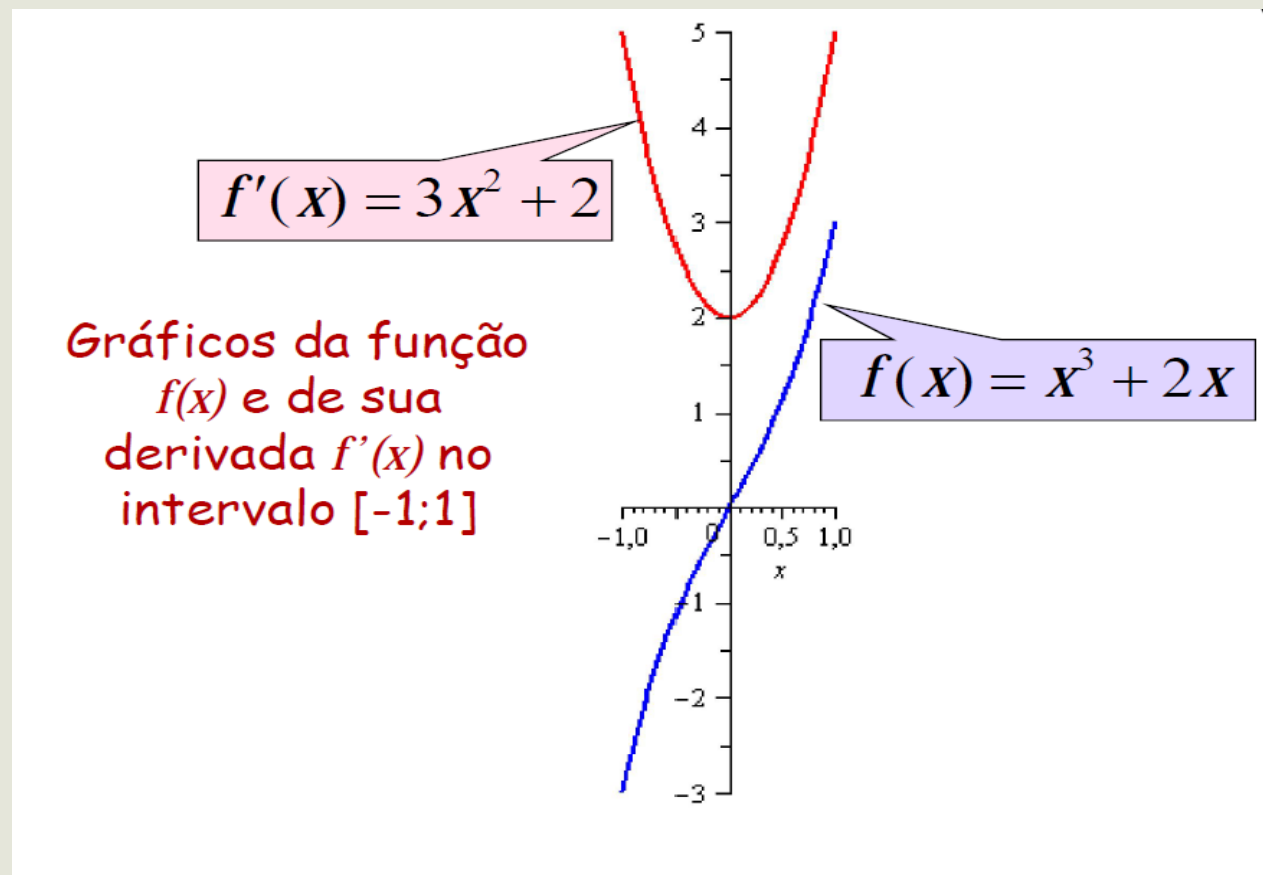
$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2)$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 + 2}$$

DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

EXEMPLO 2: Continuação



DERIVADAS E TAXA DE VARIAÇÃO

1- DEFINIÇÃO DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Sejam f uma função e p um ponto do seu domínio. O limite

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$. Assim:

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

“Se f admite derivada em p , então diremos que f é derivável ou diferenciável em p ”.

REGRAS DE DERIVAÇÃO

PROPOSIÇÃO 1- Derivada de uma Constante

Se C é uma constante e $f(x) = C$ para todo x , então $f'(x) = 0$.

PROPOSIÇÃO 2- Derivada do Produto de uma Constante por uma Função

Sejam f uma função e C uma constante e g a função definida por $g(x) = C \cdot f(x)$. Se $f'(x)$ existe, então

$$g'(x) = C \cdot f'(x)$$

PROPOSIÇÃO 3- Derivada de uma Soma

Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

PROPOSIÇÃO 4- Regra da Potência

Se n é um número positivo e $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{n-1}$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

PROPOSIÇÃO 5- Derivada de um Produto

Sejam f e g funções e h a função $h(x) = f(x).g(x)$, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então

$$h'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x); \quad \Rightarrow \quad h'(x) = u.dv + du.v; \quad u = f(x) \text{ e } g(x) = v \\ du = f'(x) \text{ e } dv = g'(x)$$

PROPOSIÇÃO 6- Derivada do Quociente

Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = (v.du - u.dv)/v^2$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

PROPOSIÇÃO 7- Derivada de uma Função Exponencial

Se $f(x) = a^x$, ($a > 0$ e $a \neq 1$), então $f'(x) = a^x \ln a$

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x dx, \text{ se } a = e$$

PROPOSIÇÃO 8- Regra da Cadeia

$$\frac{dy}{du} \text{ e } \frac{du}{dx}$$

Sendo $y = g(u)$, $u = f(x)$ e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então a função composta $y = g[f(x)]$ tem a derivada dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

PROPOSIÇÃO 9- Derivada de uma Função Logarítmica

Se $y = \log_{\underset{a}{x}} (\underset{a}{a} > 0 \text{ e } a \neq 1)$, então $y' = \frac{1}{x} \log_{\underset{a}{e}}$

A função logarítmica natural $y = \ln x$

$$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x} \cdot dx$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

PROPOSIÇÃO 10- Derivada de Funções Trigonométricas

Derivadas de Funções Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \cotg x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\frac{d}{dx}(\cotg x) = -\operatorname{cossec}^2 x$$