

CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

Disciplina: Cálculo I LOB1003

Profa. responsável: Diovana A. S. Napoleão

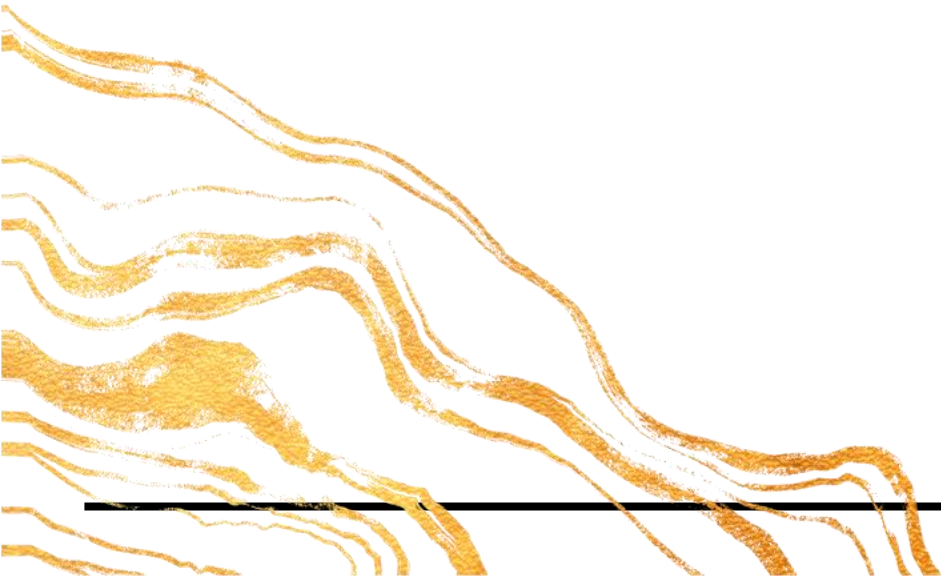
Departamento de Ciências Básicas e Ambientais – EEL-USP

DEFINIÇÃO

Uma função f é contínua em um número a se as seguintes condições são satisfeitas:

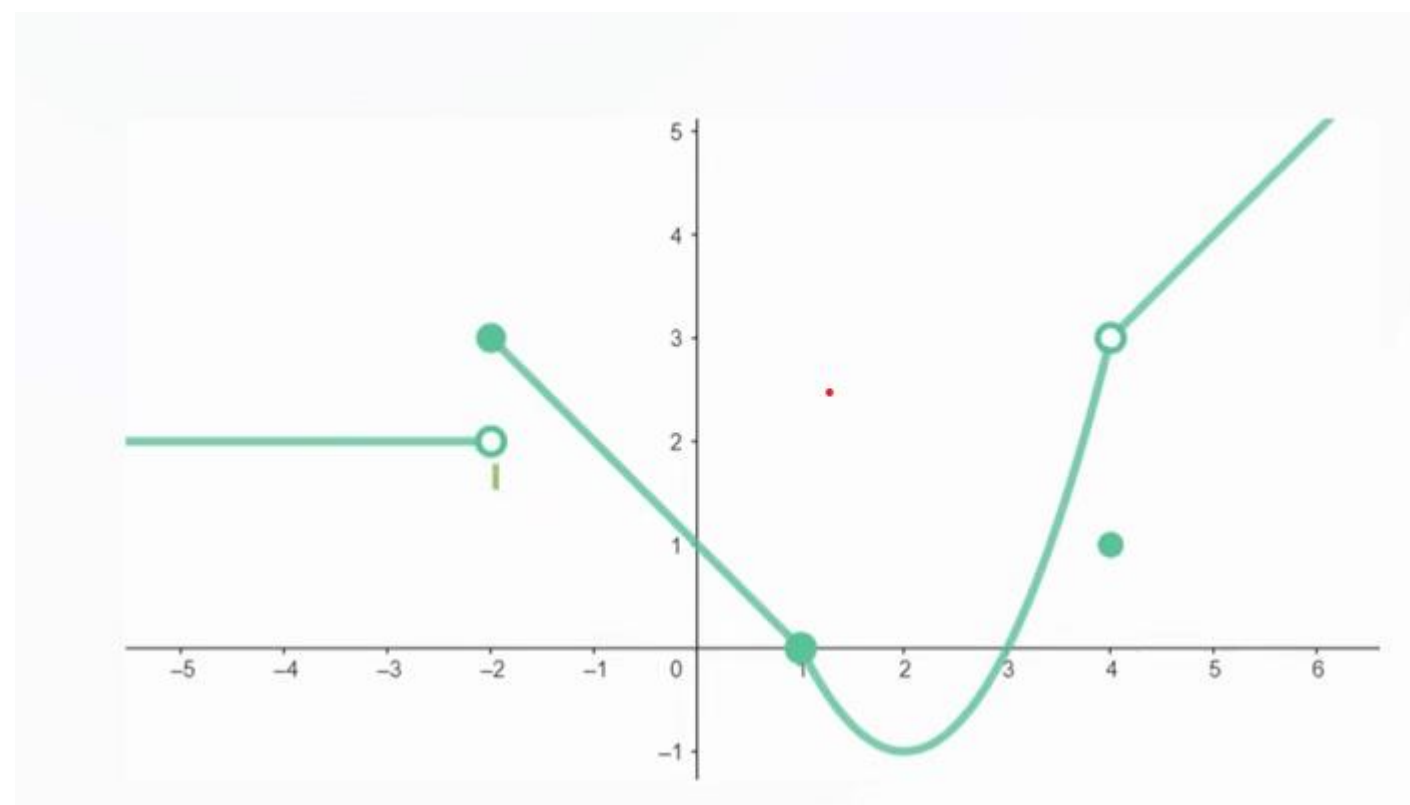
- a) f é definida no ponto a ; $f(a)$ existe (a pertence ao domínio da f)
- b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
- c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$f(x)$ é contínua em a se $f(x)$ tende a $f(a)$ quando x tende a a .

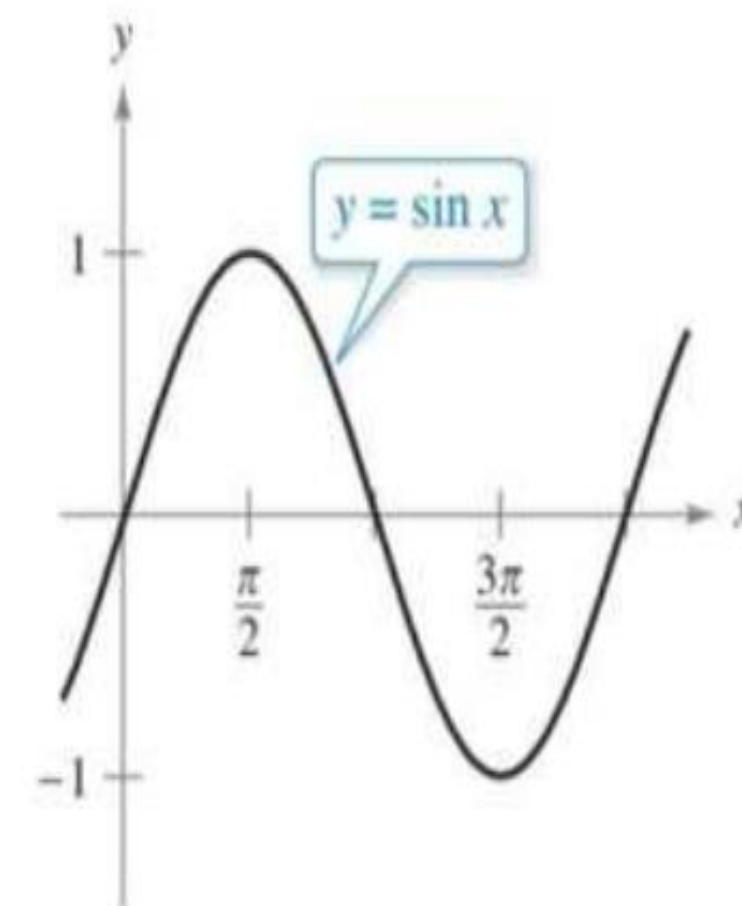
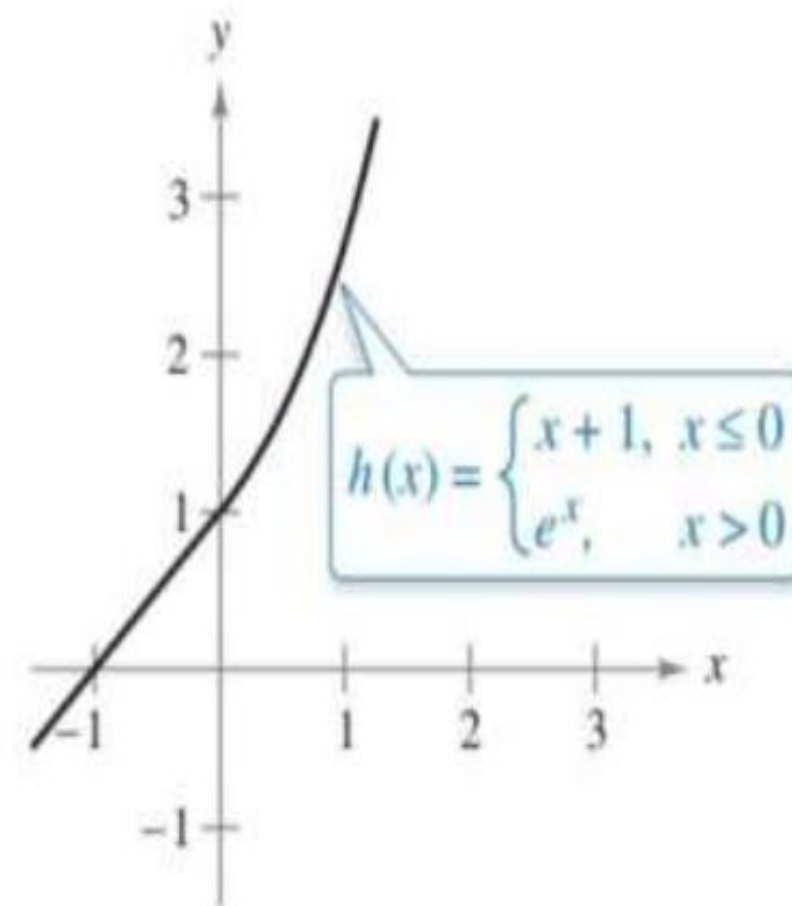


EXEMPLOS DE CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

Abordagens de exemplos intuitivos de continuidade:



$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x < -2 \\ -x + 1, & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 3, & \text{se } 1 < x < 4 \\ 1, & \text{se } x = 4 \\ x - 1, & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

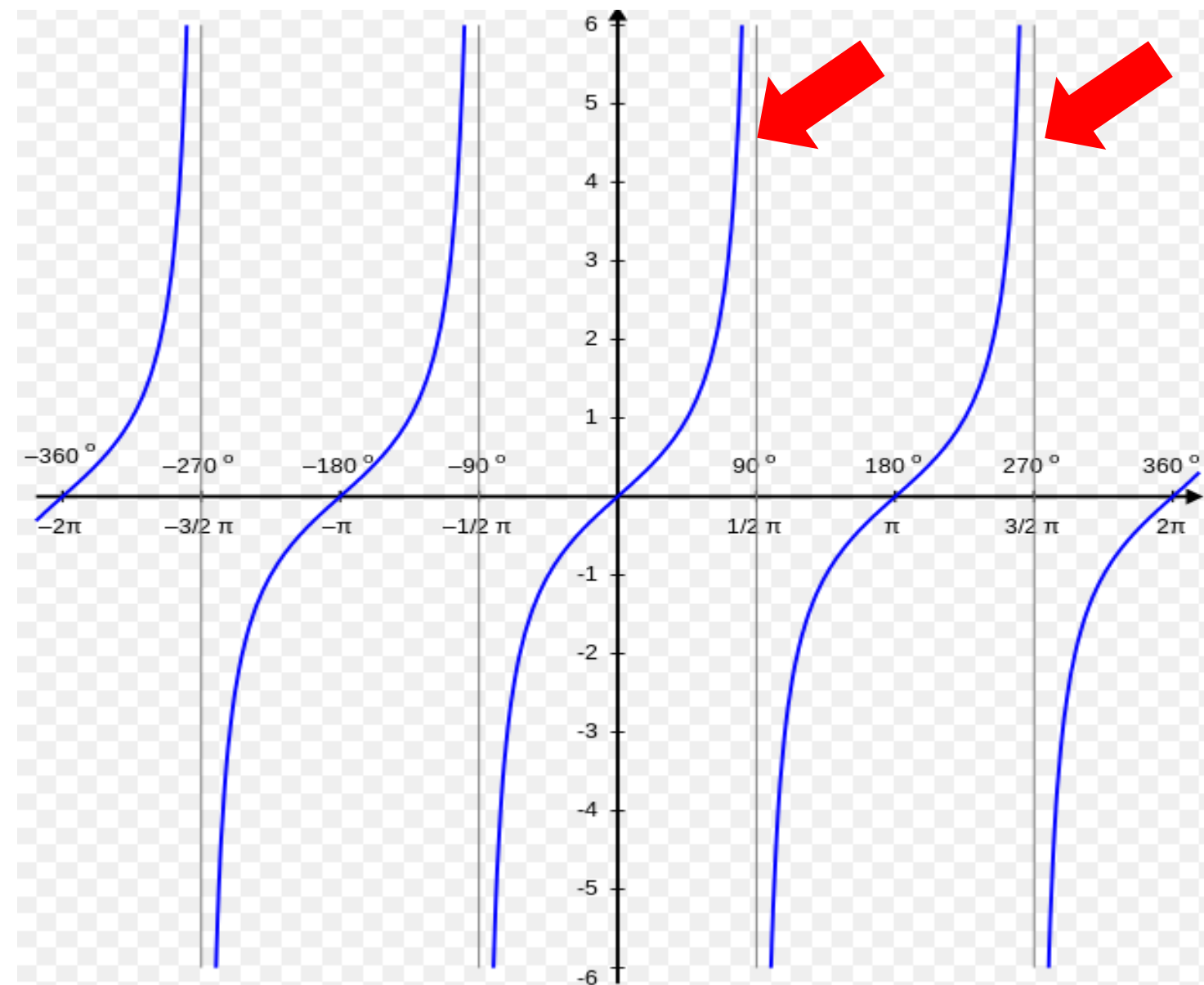


EXEMPLOS DE CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

Existência da continuidade em alguns casos de funções:

- Funções polinomiais de qualquer ordem
- Função exponencial
- Função cosseno e seno
- Função tangente

Função tangente



1- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

2- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, K \in \mathbb{Z} \right\}$

EXEMPLOS DE CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

Exemplo 1. Verificar se a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 7x-6, & \text{se } x < 2 \\ 2x^2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \text{ é contínua em } x = 2.$$

Resolução: Vamos verificar se $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$. Inicialmente ob-

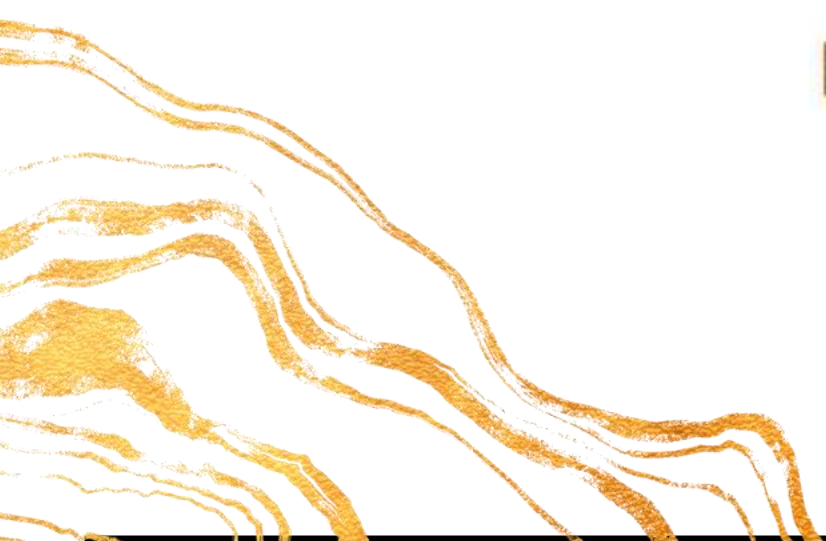
serve que $f(x) = 2x^2$ para $x \geq 2$, assim $f(2) = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8$,

ou seja, $f(2) = 8$. Agora, vamos calcular os limites laterais e te-

mos $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^2) = 2 \cdot 2^2 = 8$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (7x-6) =$

$7 \cdot 2 - 6 = 8$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8 = f(2)$.

Portanto, $f(x)$ é contínua em $x = 2$.



DESCONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

Definição

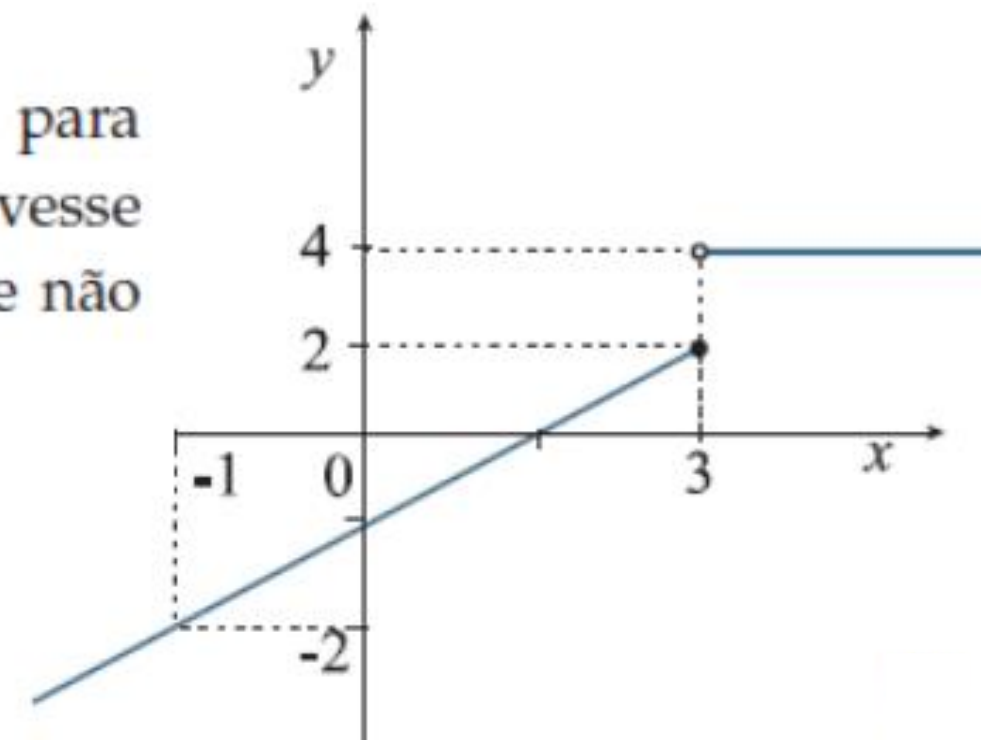
Seja $a \in \text{Dom } f$ diz-se que uma função é descontínua no ponto $x = a$ se f não for contínua em $x = a$. Isto significa que f é **descontínua em $x = a$** se ocorrer ao menos uma das seguintes condições:

1- Não existe o $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Exemplo: Seja $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \leq 3 \\ 4, & \text{se } x > 3 \end{cases}$

A função $f(x)$ é descontínua no ponto $x=3$, pois, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-1) = 3-1 = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 4 = 4$, logo não existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Observe que $f(3) = 3-1 = 2$, mas isto não é suficiente para a continuidade de $f(x)$. Seria necessário que se tivesse $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ o que jamais poderia ocorrer visto que não existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$. Veja o gráfico de $f(x)$ a seguir.



$$\text{Existe } f(a), \text{ mas } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$

EXEMPLO DE DESCONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

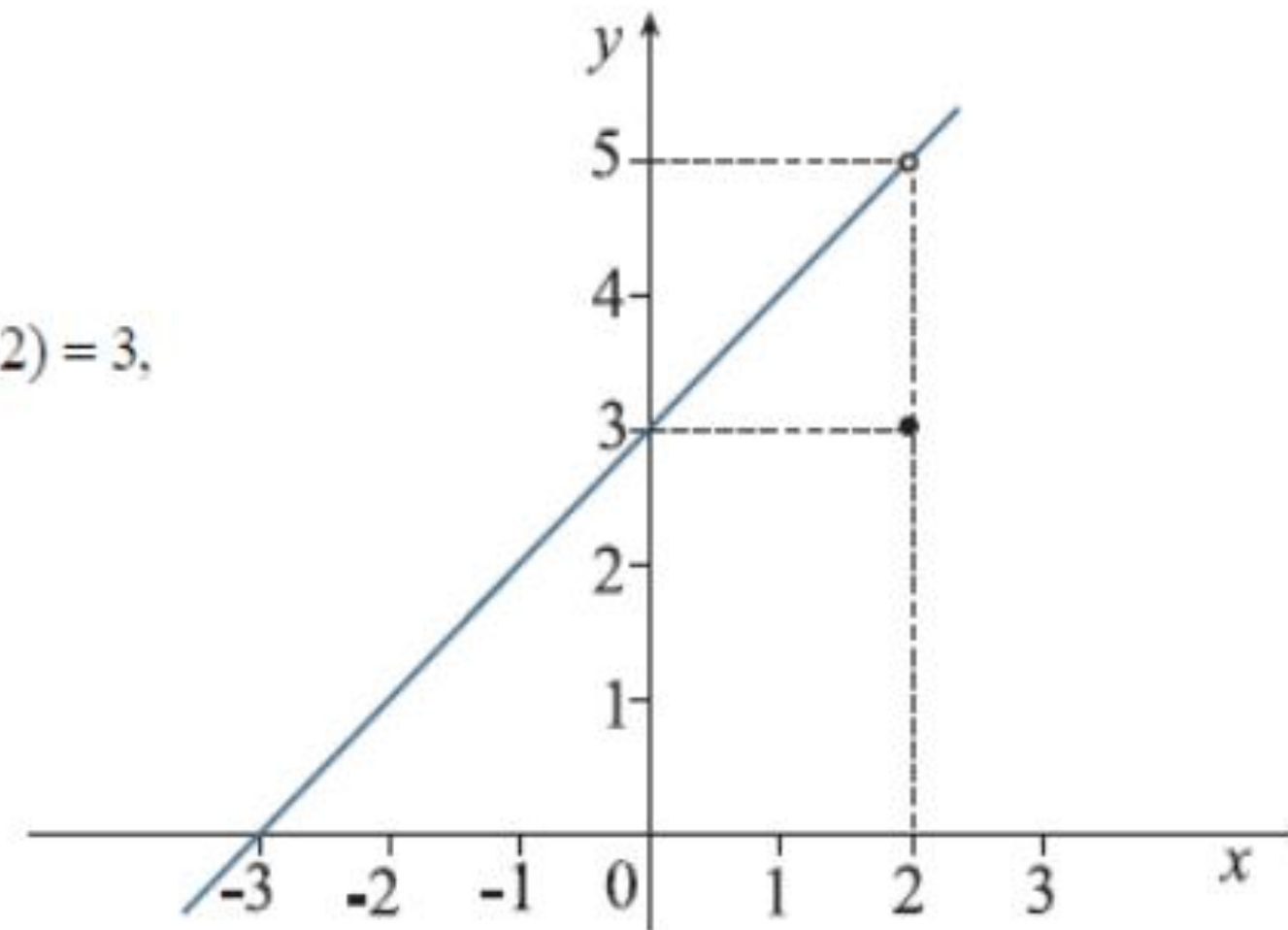
Exemplo: A função $f(x) = \begin{cases} \frac{(x+3) \cdot (x-2)}{(x-2)}, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

A função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 2$, pois,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3) \cdot (x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = 2+3 = 5 \text{ e } f(2) = 3,$$

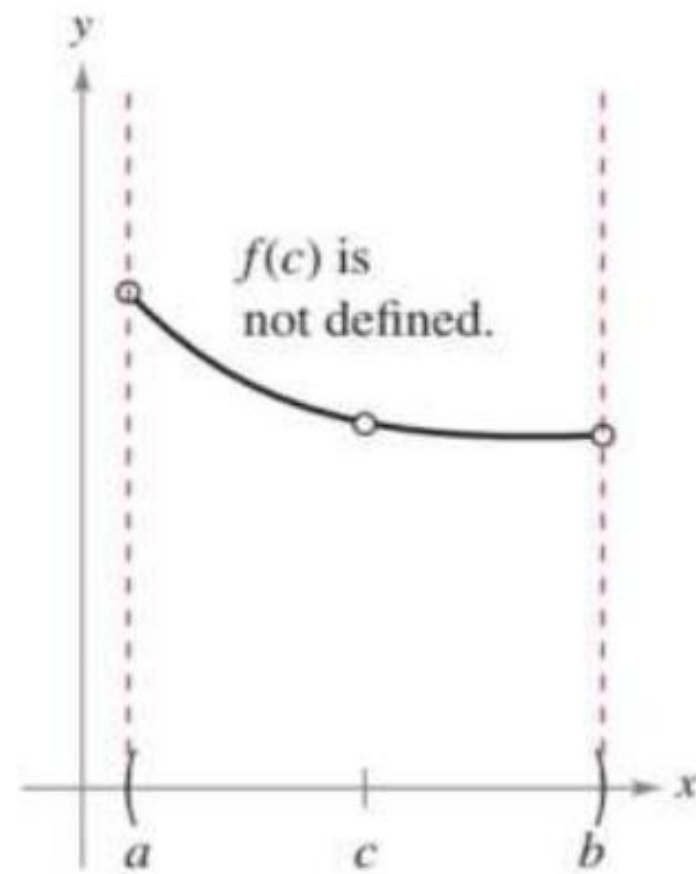
isto é, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$.

Veja o gráfico de $f(x)$ na figura

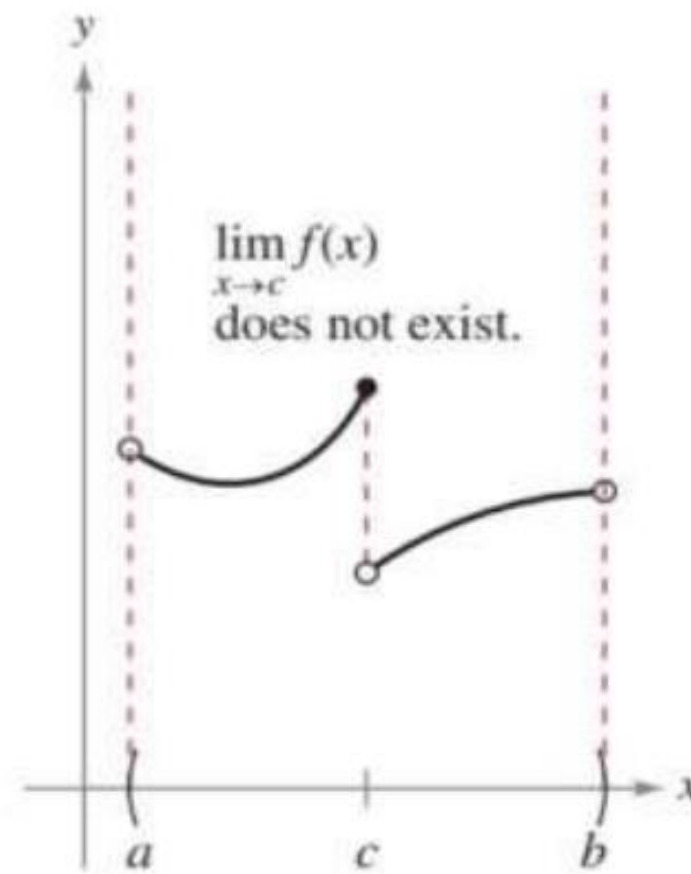


EXEMPLOS DE DESCONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

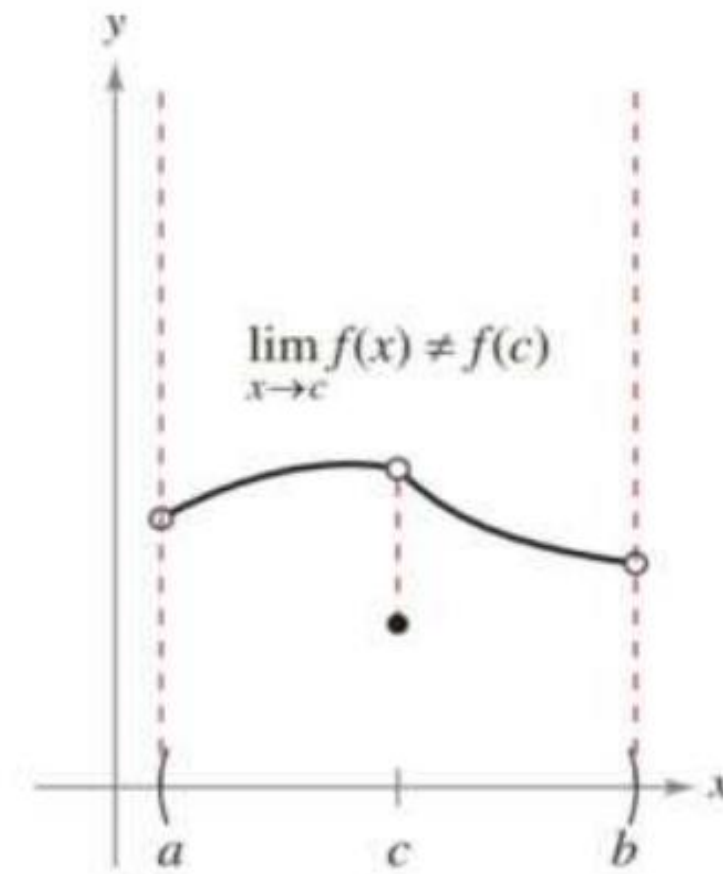
Serão abordadas três condições de existência neste estudo para o gráfico $f(x)$ que não é contínua em $x = c$.



(a)



(b)

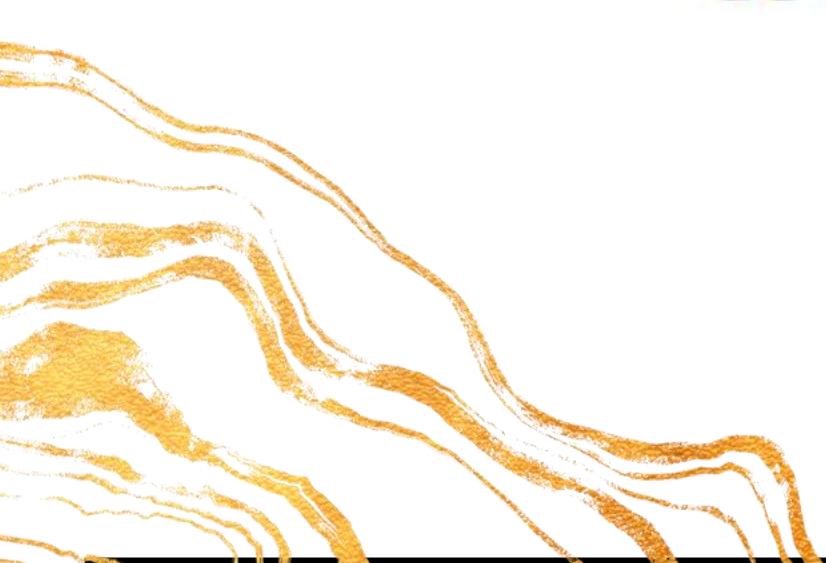


(c)

Neste contexto serão abordados os teoremas elementares das funções contínuas, como soma, produto, quociente e composição.

Teorema 1: Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas em $x = a$ então:

- 1) A soma, $f(x) + g(x)$, é contínua em $x = a$;
- 2) A diferença, $f(x) - g(x)$ é contínua em $x = a$;
- 3) O produto, $f(x) \cdot g(x)$, é uma função contínua em $x = a$;
- 4) O quociente, $\frac{f(x)}{g(x)}$, é uma função contínua $x = a$, desde que se tenha $g(a) \neq 0$.



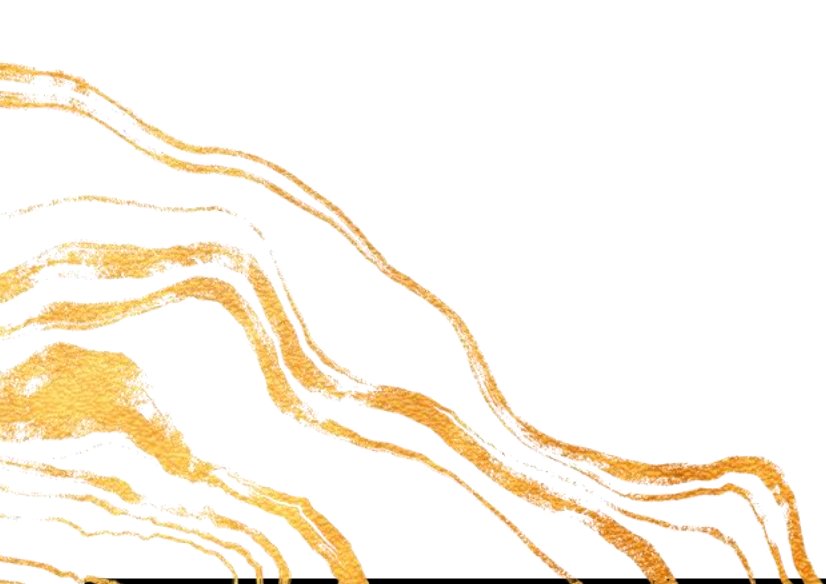
Teorema 2: A composição $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em $x = a$ desde que $g(x)$ seja contínua em $x = a$ e $f(x)$ seja contínua em $g(a)$.

Observação 1. A função polinomial $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ é contínua em $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Observação 2. Uma função racional é contínua em todo número real de seu domínio.

Observação 3. As funções abaixo são contínuas em todo número real x de seu domínio:

$$f(x) = a^x, \quad g(x) = \log_a x, \quad h(x) = \sqrt{x}.$$



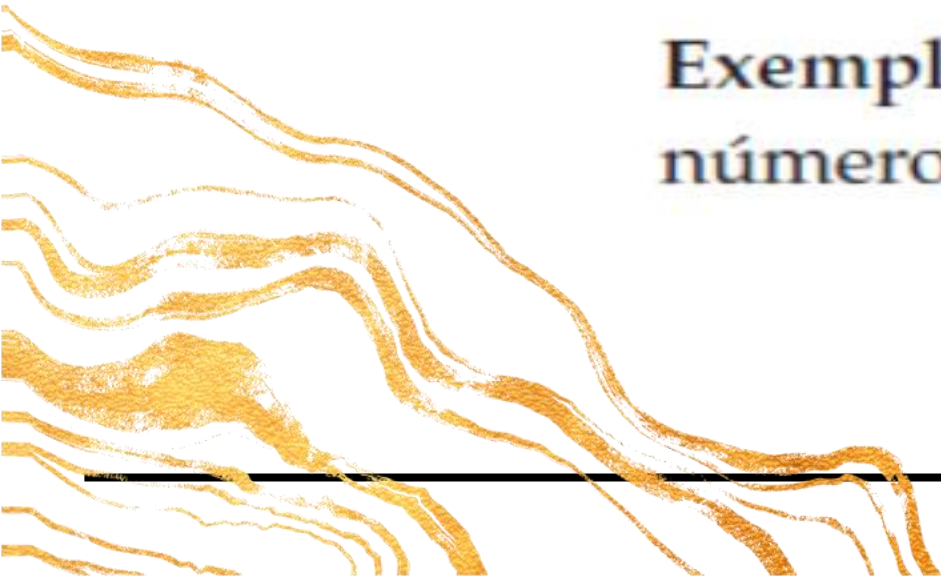
EXEMPLOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS APLICANDO OS TEOREMAS 1 E 2

Exemplo 1. As funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x$ são contínuas para todo número real x , logo, $(f + g)(x) = x^2 + 3x$ é contínua para todo número real x .

Exemplo 2. As funções $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \cos x$ são contínuas para todo número real x , logo, $(f \cdot g)(x) = (x + 1) \cdot \cos x$ é contínua para todo número real x .

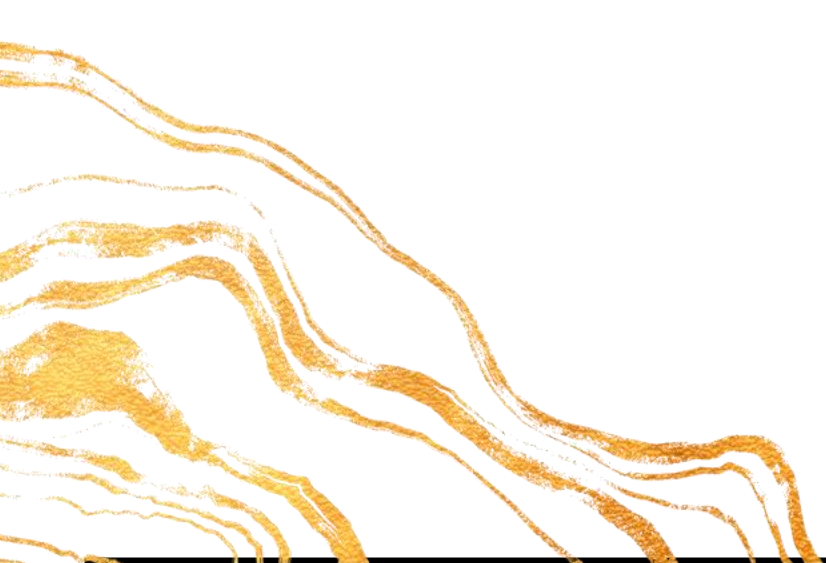
Exemplo 3. As funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 + 1$ são contínuas para todo número real x , logo, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ é contínua para todo número real x .

Exemplo 4. A função $f(x) = 2x^5 - x^3 + 3x^2 - 1$ é contínua para todo número real x .



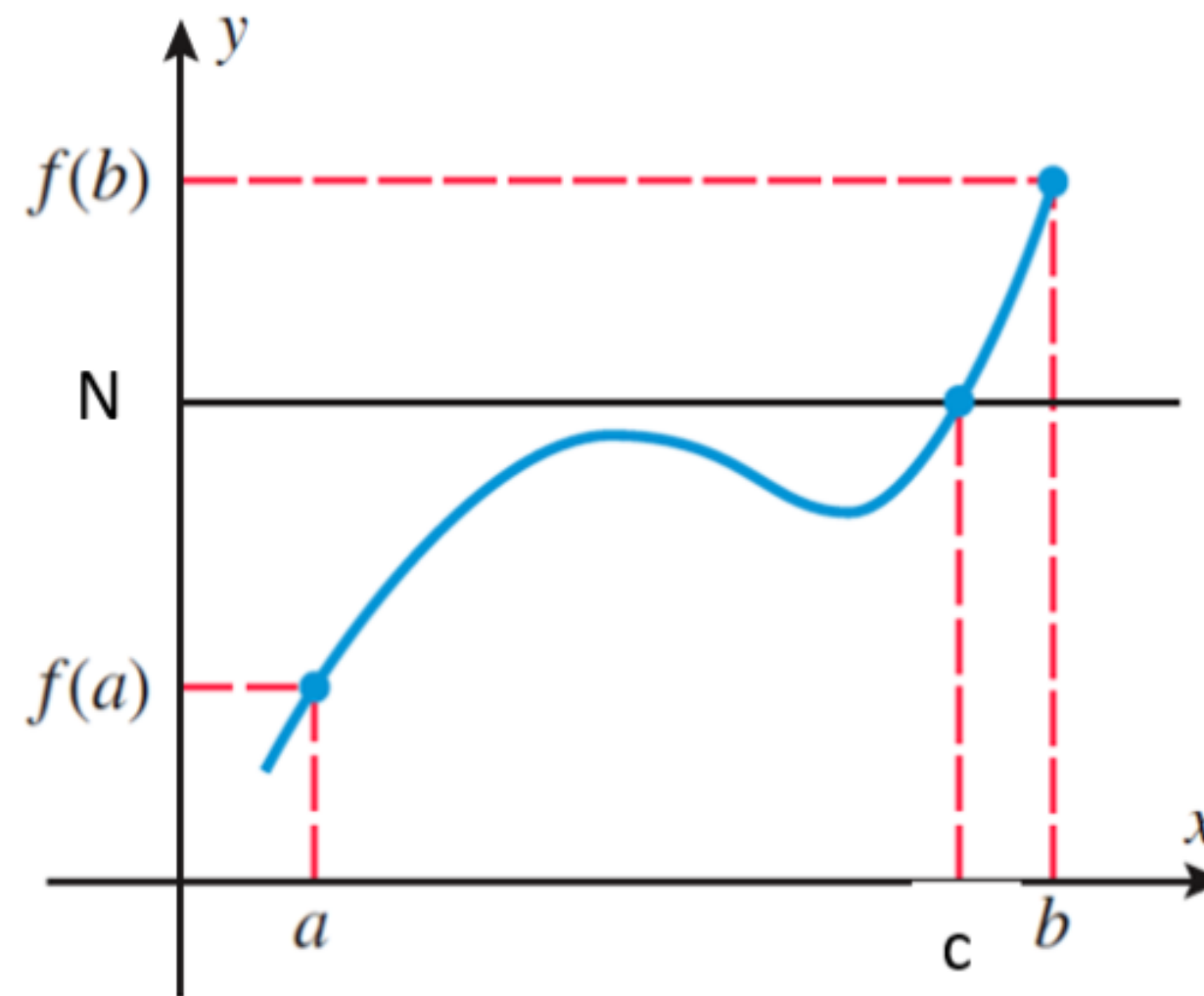
EXEMPLOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS APLICANDO OS TEOREMAS 1 E 2

Exemplo 5. As funções $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2x$ são contínuas para todo número real x , logo $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 4x + 1$, isto é, $(f \circ g)(x) = 4x + 1$ é contínua para todo número real x .



TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Teorema do Valor Intermediário Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, em que $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = N$.



CONSEQUÊNCIA DO TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Consequência

+

Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, então existe pelo menos um c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

Temos que:

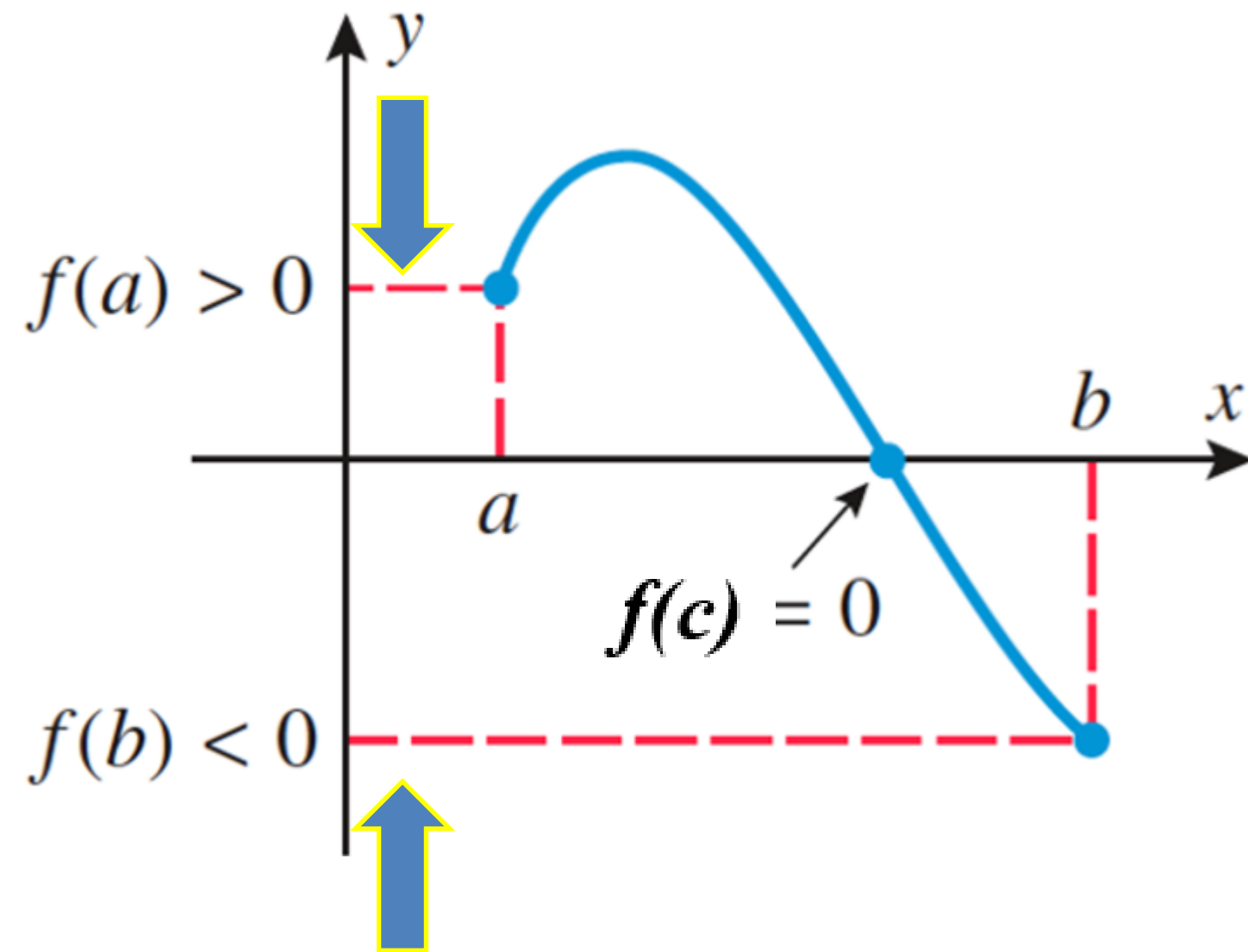
1) f é contínua em $[a, b]$

2) $f(a) > 0$

3) $f(b) < 0$

Então, existirá $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

c é raiz de f



Uma das aplicações do Teorema do Valor Intermediário é a localização das raízes de equações.

Exemplo:

Mostre que existe uma raiz da equação $x^4 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$ entre 1 e 2.

